



Calcul différentiel et intégral



uOttawa

Benoit Dionne
Université d'Ottawa

© Benoit Dionne, 2023 (Université d'Ottawa)

Version adaptée de *Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie*, manuel pour les cours MAT1730 et MAT1732, et des notes pour les cours MAT1720, MAT1722 et MAT2722 de calcul différentiel et intégral pour l'ingénierie.

Ce document est disponible aux endroits suivants :

Recherche uO: <http://hdl.handle.net/10393/44594>

GitHub: <https://github.com/BenoitDionne/Calculus>



Sauf indication contraire, ce livre est mis à disposition selon les termes de la licence [Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) (CC BY-NC-SA 4.0)

Page couverture:

Statue de Hans Lipperhey, Pays-Bas, 1570-1619, photo par Louise Oegema.

Un étang, photo par Patrice Dionne.

Entêtes des chapitres:

Les images utilisées pour les entêtes des chapitres sont quelques unes des illustrations produites par John Tenniel pour la version originale du livre **Alice's Adventures in Wonderland** par Lewis Carroll.

Table des matières

Avant-propos	xv
<hr/>	
Chapitre 1 Fonctions	1
1.1. Qu'est-ce qu'une fonction ?	1
1.2. Image et domaine d'une fonction	3
1.3. Composition de fonctions	5
1.4. Fonctions inverses (réciproques)	8
1.4.1. Inverse additif d'un nombre réel	8
1.4.2. Inverse multiplicatif d'un nombre réel	9
1.4.3. Inverse (réciproque) d'une fonction	9
1.4.4. Comment déterminer si une fonction a un inverse	11
1.4.5. Comment trouver l'inverse d'une fonction	13
1.4.6. Influence du domaine et de l'image	16
1.5. Fonctions trigonométriques 🌲 🔧	16
1.5.1. Identités trigonométriques	20
1.5.2. Graphes des fonctions trigonométriques	25
1.5.3. Fonctions trigonométriques inverses	28
1.6. Fonctions exponentielles et logarithmiques	32
1.6.1. Fonctions exponentielles	32
1.6.2. Fonctions logarithmiques	33
1.7. Exercices	37
1.7.1. Algèbre	37
1.7.2. Fonctions	38
1.7.3. Trigonométrie	39
1.7.4. Fonctions exponentielles	40

Chapitre 2	Suites et séries	43
2.1.	Suites	43
2.2.	Séries	51
2.2.1.	Tests de convergence 	61
2.2.2.	Convergence absolue et séries alternées 	66
2.3.	Le nombre e et la fonction e^x	70
2.3.1.	Fonctions hyperboliques 	73
2.4.	Exercices	75
2.4.1.	Suites	75
2.4.2.	Séries	75
2.4.3.	Tests de convergence	76
2.4.4.	Convergence absolue et séries alternées	77
<hr/>		
Chapitre 3	Limite et fonctions continues	79
3.1.	Limites	79
3.1.1.	Epsilon et delta 	84
3.1.2.	Règles pour évaluer les limites	87
3.2.	Fonctions continues	89
3.2.1.	Epsilon et delta 	92
3.3.	Quelques propriétés des fonctions continues	93
3.4.	Limites à l'infini et limites infinies	96
3.4.1.	Des définitions plus pratiques 	103
3.4.2.	Comportement asymptotique semblable 	106
3.5.	Exercices	107
3.5.1.	Limites	107
3.5.2.	Fonctions continues	109
3.5.3.	Limites à l'infini et limites infinies	110
<hr/>		
Chapitre 4	Dérivée	113
4.1.	Étude du graphe et comportement d'une fonction	113
4.2.	Taux de variation d'une fonction	115
4.3.	Dérivée d'une fonction en un point	120

4.4.	Dérivée d'une fonction	125
4.4.1.	Différentiable implique continue	131
4.4.2.	Une première application de la dérivée; la vitesse d'un objet	132
4.5.	Dérivées de quelques fonctions élémentaires	132
4.5.1.	Dérivée de $f(x) = x^n$ où n est un entier positif ou nul	133
4.5.2.	Dérivée du sinus et du cosinus 🌲 🔧	135
4.6.	Règles de dérivation	140
4.6.1.	Dérivée d'une fonction multipliée par une constante	140
4.6.2.	Dérivée d'une somme de fonctions	141
4.6.3.	Dérivée du produit de fonctions	143
4.6.4.	Dérivée du quotient de fonctions	145
4.6.5.	Dérivée de fonctions composées	147
4.7.	Encore plus de dérivées de fonctions élémentaires	150
4.7.1.	Dérivée de $f(x) = b^x$	150
4.7.2.	Dérivée de $\log_b(x)$	157
4.7.3.	Dérivée de x^α où α est réel	159
4.7.4.	Dérivée des fonction trigonométriques inverses 🌲 🔧	161
4.8.	Exercices	162
4.8.1.	Taux de variation	162
4.8.2.	Dérivée d'une fonction	164
4.8.3.	Calcul des dérivées	169
<hr/>		
Chapitre 5	Applications de la dérivée	173
5.1.	Étude de courbes	173
5.2.	Optimisation	183
5.3.	Taux liés 🔧	194
5.4.	Dérivées implicites 🔧	196
5.5.	Approximation locale des fonctions	199
5.5.1.	Calcul de limites 🔧	205
5.6.	Comportement asymptotique 🌲 🔧	207
5.7.	Méthode de Newton 🌲 🔧	221
5.8.	Systèmes dynamiques discrets 🌲	227
5.8.1.	Équation logistique	238

5.8.2.	Étude des points d'équilibre	241
5.8.3.	Étude des orbites périodiques 	246
5.9.	Exercices	249
5.9.1.	Dérivées d'ordres supérieures	249
5.9.2.	Graphes de fonctions	250
5.9.3.	Optimisation	254
5.9.4.	Taux liées	258
5.9.5.	Dérivées implicites	258
5.9.6.	Approximation locale des fonctions	259
5.9.7.	Comportement asymptotique	261
5.9.8.	Méthode de Newton	262
5.9.9.	Systèmes dynamiques discrets	263
<hr/>		
Chapitre 6	Intégrale	279
6.1.	Primitives et intégrales indéfinies	279
6.2.	Techniques d'intégration	283
6.2.1.	Substitutions	283
6.2.2.	Intégration par parties	292
6.2.3.	Fractions partielles	299
6.2.4.	Substitutions trigonométriques 	304
6.3.	Intégrales définies	308
6.3.1.	Définition	313
6.3.2.	Propriétés de l'intégrale définie	318
6.3.3.	Évaluations des intégrales définies 	320
6.3.4.	Déplacement	323
6.3.5.	L'intégrale de Riemann (Stieljes) 	326
6.4.	Théorème fondamental du calcul	327
6.4.1.	Première version du théorème fondamental du calcul	328
6.4.2.	Deuxième version du théorème fondamental du calcul	334
6.5.	Intégrales impropres	336
6.5.1.	Intégrales sur un intervalle d'intégration de longueur infinie	336
6.5.2.	Intégrales avec un intégrande non bornée	341
6.6.	Test de comparaison 	345

6.7.	Méthodes numériques d'intégration 	352
6.7.1.	Méthode du point milieu	352
6.7.2.	Méthode des trapèzes	355
6.7.3.	Méthode de Simpson	362
6.8.	Exercices	366
6.8.1.	Intégrales indéfinies	366
6.8.2.	Définition de l'intégrale définie	368
6.8.3.	Intégrales définies	372
6.8.4.	Intégrales impropres	373
<hr/>		
Chapitre 7	Applications de l'intégrale	375
7.1.	Aire entre deux courbes	375
7.2.	Valeur moyenne d'une fonction	379
7.3.	Volume d'un objet 	381
7.3.1.	Solides de révolution	385
7.4.	Masse d'un objet 	396
7.5.	Travail 	397
7.5.1.	Travail pour déplacer un objet	397
7.5.2.	Travail pour vider un réservoir	400
7.6.	Force et pression hydrostatique 	406
7.7.	Centre de masse 	410
7.8.	Débit sanguin 	413
7.9.	Applications à l'économie 	416
7.9.1.	Valeurs présentes et futures	418
7.9.2.	Surplus du consommateur et du producteur	421
7.10.	Test de l'intégrale 	422
7.11.	Exercices	426
7.11.1.	Aire entre deux courbes	426
7.11.2.	Valeur moyenne d'une fonction	427
7.11.3.	Volume d'un objet	428
7.11.4.	Masse d'un objet	430
7.11.5.	Travail	430
7.11.6.	Force	432

7.11.7.	Centre de masse	433
7.11.8.	Applications à l'économie	434
7.11.9.	Test de l'intégrale	434
<hr/>		
Chapitre 8	Séries entières 🔧	437
8.1.	Convergence des séries entières	437
8.2.	Fonctions définies par des séries	441
8.3.	Séries de Taylor et de MacLaurin	443
8.4.	Série du binôme	455
8.5.	Définition de l'exponentiel et de son inverse 👁	459
8.6.	Exercices	461
8.6.1.	Convergence des séries entières	461
8.6.2.	Fonctions définies par des séries	462
8.6.3.	Série du binôme	464
<hr/>		
Chapitre 9	Équations différentielles 🌲 🔧	465
9.1.	Introduction	465
9.2.	Équations différentielles séparables	469
9.3.	Équations non-autonomes 🌲	473
9.4.	Existence et unicité des solutions 👁	477
9.5.	Équations autonomes 🌲	479
9.5.1.	Points d'équilibre	479
9.5.2.	L'équation logistique	485
9.6.	Applications aux sciences physiques, biologiques et économiques	489
9.7.	Famille de courbe orthogonales 🔧	500
9.8.	Méthode d'Euler 🔧	502
9.9.	Exercices	508
9.9.1.	Introduction	508
9.9.2.	Équations différentielles séparables	513
9.9.3.	Équations différentielles autonomes	516
9.9.4.	Applications	519
9.9.5.	Méthode d'Euler	522

Chapitre 10	Vecteurs	523
10.1.	Définition	523
10.2.	Opérations sur les vecteurs	524
10.2.1.	Produit d'un vecteur par un nombre réel	525
10.2.2.	Somme de vecteurs	526
10.2.3.	Notation vectorielle classique	527
10.2.4.	Produit scalaire 	527
10.2.5.	Produit vectoriel 	530
10.3.	Équation d'une droite 	532
10.3.1.	Droites tangentes	535
10.3.2.	Intersection de deux droites	537
10.4.	Équation d'un plan 	537
10.4.1.	Représentations vectorielles et paramétriques du plan	540
10.4.2.	Intersection d'une droite et d'un plan	542
10.4.3.	Intersection de deux plans	543
10.4.4.	Intersection de trois plans	547
10.5.	Projections 	548
10.5.1.	Plus courte distance entre un point et une droite	548
10.5.2.	Plus courte distance entre un point et un plan de l'espace	550
10.6.	Exercices	552
10.6.1.	Équation d'une droite	552
10.6.2.	Équation d'un plan	552
<hr/>		
Chapitre 11	Algèbre linéaire  	553
11.1.	Systèmes d'équations linéaires	553
11.1.1.	Systèmes d'équations linéaires avec deux inconnues	555
11.1.2.	Systèmes d'équations linéaires avec plus de deux inconnues	557
11.2.	Matrices	562
11.2.1.	Opérations sur les matrices	563
11.2.2.	Inverse additif et multiplicatif d'une matrice	570
11.3.	Représentations matricielles	573
11.3.1.	Méthode d'élimination de Gauss	574

11.3.2.	Matrices inverses	575
11.3.3.	Intersection de trois plans dans \mathbb{R}^3	579
11.4.	Déterminant	580
11.4.1.	introduction	580
11.4.2.	Signe d'une permutation 	582
11.4.3.	Calcul du déterminant	583
11.5.	Suites dans \mathbb{R}^n	589
11.6.	Valeurs propres et vecteurs propres	589
11.7.	Systèmes Dynamiques Discrets Linéaires 	598
11.8.	Chaînes de Markov 	603
11.9.	Exercices	607
11.9.1.	Matrices	607
11.9.2.	Représentations matricielles des systèmes d'équations linéaires	608
11.9.3.	Déterminant	609
11.9.4.	Valeurs propres et vecteurs propres	610
11.9.5.	Chaînes de Markov	611
<hr/>		
Chapitre 12	Représentation paramétrique des courbes  	613
12.1.	Définition	613
12.2.	Droite tangente à une courbe	616
12.3.	Longueur d'une courbe 	622
12.4.	Aire d'une surface 	626
12.5.	Coordonnées polaires 	630
12.5.1.	Équations en coordonnées polaires	631
12.5.2.	Longueur d'une courbe	635
12.5.3.	Aire d'une région	636
12.6.	Exercices	639
12.6.1.	Droite tangente à une courbe	639
12.6.2.	Longueur d'une courbe	640
<hr/>		
Chapitre 13	Fonction de plusieurs variables  	641
13.1.	Definitions	641

13.2.	Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles	644
13.3.	Limites et fonctions continues	651
13.4.	Propriétés des fonctions continues 	660
13.5.	Exercices	660
13.5.1.	Fonctions de plusieurs variables	660
13.5.2.	Fonctions continues	663
<hr/>		
Chapitre 14	Dérivée de fonctions de plusieurs variables  	665
14.1.	Dérivées partielles	665
14.2.	Plan tangent à une surface (forme explicite)	672
14.2.1.	Surface donnée par une fonction de x_1 et x_2	672
14.2.2.	Surface donnée par une représentation paramétrique	675
14.3.	Dérivées selon une direction donnée 	676
14.4.	Propriétés du gradient 	680
14.4.1.	Plan tangent à une surface (forme implicite)	680
14.4.2.	Direction de croissance maximale	683
14.4.3.	Théorème de la moyenne	686
14.5.	Approximation locale des fonctions de plusieurs variables 	687
14.6.	Points critiques et valeurs extrêmes 	689
14.7.	Multiplicateurs de Lagrange 	694
14.8.	Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m  	697
14.9.	Exercices	700
14.9.1.	Dérivées partielles	700
14.9.2.	Plan tangent à une surface	702
14.9.3.	Dérivées selon un direction donnée	702
14.9.4.	Propriétés du gradient	703
14.9.5.	Approximation locale des fonctions	703
14.9.6.	Points critiques et valeurs extrêmes	704
14.9.7.	Multiplicateurs de Lagrange	704
14.9.8.	Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m	705

Chapitre 15	Intégrales multiples 	707
15.1.	Définition de l'Intégrale	707
15.2.	Théorème de Fubini	710
15.3.	Substitution	714
15.4.	Exercices	719
15.4.1.	Théorème de Fubini	719
15.4.2.	Substitution	721
<hr/>		
Chapitre 16	Calcul vectoriel 	723
16.1.	Intégrale le long d'une courbe	723
16.2.	Rotationnel et divergence	731
16.2.1.	Une interprétation physique de la divergence et du rotationnel	733
16.3.	Intégrale sur une surface	738
16.3.1.	Définition de l'intégrale sur une surface	738
16.3.2.	Les variétés 	747
16.4.	Théorèmes de Stokes et de Green	751
16.4.1.	Une deuxième interprétation physique du rotationnel	759
16.5.	Théorème de la divergence	760
16.6.	Exercices	762
16.6.1.	Intégrale le long d'une courbe	762
16.6.2.	Rotationnel et divergence	763
16.6.3.	Intégrale sur une surface	765
16.6.4.	Théorèmes de Stokes et de Green	766
16.6.5.	Théorème de la divergence	767
<hr/>		
Chapitre 17	Systèmes d'équations différentielles 	769
17.1.	Introduction	769
17.2.	Énoncé du problème général	778
17.3.	Systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre un	781
17.4.	Introduction à l'analyse globale	788
17.4.1.	Points d'équilibre	790
17.4.2.	Nullclines	791

17.5.	Équation de Van der Pol	797
17.6.	Système prédateurs-proies	799
17.6.1.	Lotka-Voltera	799
17.6.2.	Un meilleur modèle prédateurs-proies	802
17.7.	Exercices	809
17.7.1.	Systèmes d'équations différentielles linéaires	809
17.7.2.	Analyse global	810

Chapitre 18	Solutions	813
18.1.	Fonctions	813
18.1.1.	Algèbre	813
18.1.2.	Fonctions	819
18.1.3.	Trigonométrie	821
18.1.4.	Fonctions exponentielles	826
18.2.	Suites et séries	829
18.2.1.	Suites	829
18.2.2.	Séries	829
18.2.3.	Tests de convergence	831
18.2.4.	Convergence absolue et séries alternées	833
18.3.	Limites et fonctions continues	835
18.3.1.	Limites	835
18.3.2.	Fonctions continues	837
18.3.3.	Limites à l'infini et limites infinies	842
18.4.	Dérivée	845
18.4.1.	Taux de variation	845
18.4.2.	Dérivée d'une fonction	850
18.4.3.	Calcul des dérivées	856
18.5.	Applications de la dérivée	866
18.5.1.	Dérivées d'ordres supérieures	866
18.5.2.	Graphes de fonctions	869
18.5.3.	Optimisation	898
18.5.4.	Taux liées	904
18.5.5.	Dérivées implicites	906

18.5.6.	Approximation locale des fonctions	907
18.5.7.	Comportement asymptotique	912
18.5.8.	Méthode de Newton	916
18.5.9.	Systèmes dynamiques discrets	918
18.6.	Intégrale	947
18.6.1.	Intégrales indéfinies	947
18.6.2.	Définition de l'intégrale définie	964
18.6.3.	Intégrales définies	973
18.6.4.	Intégrales impropres	980
18.7.	Applications de l'intégrale	985
18.7.1.	Aire entre deux courbes	985
18.7.2.	Valeur moyenne d'une fonction	989
18.7.3.	Volume d'un objet	992
18.7.4.	Masse d'un objet	995
18.7.5.	Travail	995
18.7.6.	Force	996
18.7.7.	Centre de masse	998
18.7.8.	Applications à l'économie	999
18.7.9.	Test de l'intégrale	999
18.8.	Séries entières	1000
18.8.1.	Convergence des séries entières	1000
18.8.2.	Fonctions définies par des séries	1004
18.8.3.	Série du binôme	1011
18.9.	Équations différentielles	1015
18.9.1.	Introduction	1015
18.9.2.	Équations différentielles séparables	1028
18.9.3.	Équations différentielles autonomes	1037
18.9.4.	Applications	1042
18.9.5.	Méthode d'Euler	1049
18.10.	Vecteurs	1051
18.10.1.	Équation d'une droite	1051
18.10.2.	Équation d'un plan	1051
18.11.	Algèbre linéaire	1053

18.11.1. Matrices	1053
18.11.2. Représentations matricielles des systèmes d'équations linéaires . . .	1056
18.11.3. Déterminant	1062
18.11.4. Valeurs propres et vecteurs propres	1065
18.11.5. Chaînes de Markov	1082
18.12. Représentations paramétriques des courbes	1088
18.12.1. Droite tangente à une courbe	1088
18.12.2. Longueur d'une courbe	1088
18.13. Fonctions de plusieurs variables	1089
18.13.1. Fonctions de plusieurs variables	1089
18.13.2. Fonctions continues	1092
18.14. Dérivée de fonctions de plusieurs variables	1093
18.14.1. Dérivées partielles	1093
18.14.2. Plan tangent à une surface	1095
18.14.3. Dérivées selon un direction donnée	1097
18.14.4. Propriétés du gradient	1098
18.14.5. Approximation locale des fonctions	1099
18.14.6. Points critiques et valeurs extrêmes	1100
18.14.7. Multiplicateurs de Lagrange	1103
18.14.8. Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m	1109
18.15. Intégrales multiples	1110
18.15.1. Théorème de Fubini	1110
18.15.2. Substitution	1119
18.16. Calcul vectoriel	1129
18.16.1. Intégrale le long d'une courbe	1129
18.16.2. Rotationnel et divergence	1131
18.16.3. Intégrale sur une surface	1133
18.16.4. Théorèmes de Stokes et de Green	1143
18.16.5. Théorème de la divergence	1150
18.17. Systèmes d'équations différentielles	1152
18.17.1. Systèmes d'équations différentielles linéaires	1152
18.17.2. Analyse global	1155

Bibliographie	1161
----------------------	-------------

Index	1163
--------------	-------------

Avant-propos

Le contenu de ce manuel couvre la grande majorité des sujets présentés dans les cours de calcul différentiel et intégral pour les étudiants¹ en sciences et génies. Les seuls préalables sont les mathématiques normalement enseignées au secondaire en Ontario. En fait, le premier chapitre revoit rapidement tous les concepts mathématiques que le lecteur devrait connaître à la sortie du secondaire. Certains concepts qui ne sont pas présentés au secondaire ont aussi été ajoutés au chapitre 1. Il est donc fortement suggérer au lecteur de revoir le chapitre 1 même s'il est confiants de bien connaître les mathématiques de base.

Afin que le lecteur puisse bien comprendre le matériel présenté dans ce manuel, nous avons porté un très grand soin à fournir tous les détails et calculs algébriques qui supportent les énoncés mathématiques. De cette façon, nous espérons que le lecteur ne sera pas nuit dans son apprentissage de la matière par des détails techniques. De plus, cela permet au lecteur de développer ses capacités à exécuter correctement des calculs algébriques.

Nous avons aussi choisi d'inclure les solutions détaillés d'un grande nombre de problèmes à la fin du manuel. Le lecteur devrait sérieusement essayer de résoudre les problèmes à la fin de chaque chapitre avant de regarder les solutions. Nous n'apprenons pas à jouer de la guitare en regardant un guitariste jouer. Il faut sérieusement pratiquer au point d'avoir le bout des doigts sensibles. C'est la même chose pour les mathématiques. Ce n'est pas en lissant simplement les solutions des problèmes produites par une autre personne que nous apprenons à résoudre des problèmes. Il faut en résoudre soit même.

Une autre raison pour justifier l'inclusion d'un grande nombre de solutions est qu'il est maintenant facile d'accéder à un logiciel qui peut presque complètement résoudre les problèmes ou d'utiliser certains sites Internet pour demander à d'autres personnes de résoudre les problèmes. C'est la meilleure façon pour ne rien apprendre. C'est sans compter que bien souvent les solutions fournies sur ces sites sont erronées. Donc, si vraiment vous ne pouvez pas résoudre un problème après avoir essayé pour une bonne période de temps, il est préférable de regarder la solution à la fin du manuel pour obtenir une solution correcte; en assumant que l'auteur n'ait pas fait lui-même d'erreurs.

Ce manuel peut être utilisées pour trois des variantes des cours de calcul différentiel et intégral que nous retrouvons dans la majorité des universités en Ontario.

- Les items marqués par le symbole  sont spécifiquement pour les cours de **Calcul différentiel et intégral pour les étudiants en génie**.

1. Dans ce manuel, le genre non marqué, c'est-à-dire le masculin, quand il est employé pour désigner des personnes, renvoie aussi bien à des femmes qu'à des hommes.

- Les items marqués par le symbole  sont spécifiquement pour les cours de **Calcul différentiel et intégral pour les étudiants en sciences de la vie**.
- Les items marqués par le symbole  sont spécifiquement pour les cours de **Calcul différentiel et intégral pour les étudiants en administration**.

Les items qui n'ont aucun de ces symboles sont requis pour les trois variantes des cours de calcul différentiel et intégral. Le contenu pour les étudiants en administration est probablement à un niveau plus avancé que celui du contenu normalement présenté à ce groupe d'étudiants.

L'ordre dans lequel le matériel est présenté est standard. Il y a cependant certaines additions au matériel que nous ne retrouvons traditionnellement pas dans un manuel de calcul différentiel et intégral à ce niveau. Une introduction à l'algèbre linéaire est fournie au chapitre 11. Le matériel présenté dans ce chapitre est tout ce que le lecteur a besoin de connaître en algèbre linéaire pour l'étude des fonctions de plusieurs variables aux chapitres 13, 14, 15 et 16 ; et l'étude des systèmes d'équations différentielles au chapitre 17. Donc, aucun cours d'algèbre linéaire n'est préalable aux derniers chapitres de ce manuel. Une application concrète de l'algèbre linéaire est fournie par les chaînes de Markov à la section 11.8. Un chapitre comme le chapitre 17 sur les systèmes d'équations différentielles n'est généralement pas inclus dans un manuel de calcul différentiel et intégral. En particulier, lorsque l'emphase de l'étude des systèmes d'équations différentielles est sur l'aspect qualitatif de ces systèmes.

Les chapitres 2 et 3 couvrent certains sujets présentés au secondaire. Cependant, plusieurs sujets qui ne sont pas abordés au secondaire font parties de ces chapitres. La matière des cours de calcul différentiel et intégral au niveau universitaire débute donc avec certaines sections de ces chapitres selon le cours de calcul différentiel et intégral auxquels l'étudiant est inscrit.

Comme les principaux utilisateurs de ces notes depuis plus de dix ans ont été les étudiants inscrits aux cours de Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie à l'Université d'Ottawa, il n'est pas surprenant qu'une emphase toute particulière a été apporté à ce sujet. Cela se traduit par plusieurs exemples en biologie et médecine, en particulier dans les premiers chapitres.

Le cours de calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie comporte deux principales parties. La première partie est dédiée au calcul différentiel pour les fonctions d'une variable et culmine avec l'étude des « systèmes dynamiques discrets » à la section 5.8. Les systèmes dynamiques discrets sont utilisés entre autre pour décrire certaines caractéristiques des populations animales mesurées à intervalles réguliers. La deuxième partie du cours de calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie est dédié au calcul intégral. Le but ultime de cette partie est l'étude des « systèmes dynamiques (continus) » au chapitre 17. Les systèmes dynamiques continus sont des systèmes d'équations différentielles. Ils sont utilisés entre autre pour modéliser les réactions chimiques, la croissance des populations et leurs mouvements, etc.

Avertissement : Les modèles biologiques utilisés dans les exemples et les questions ne représentent pas toujours des situations réelles. Pour obtenir des modèles mathématiques qui soient intéressants et utilisent la théorie présentée dans les notes, tout en étant acces-

sibles pour le niveau du cours, nous avons dû créer des modèles qui ne sont pas basés sur des données scientifiques. Nous avons quand même essayé d'obtenir des modèles qui soient qualitativement valables.

Alors que l'emphase est mise sur les applications à la biologie au début du manuel, notre attention se tourne vers les applications à la physique lorsque nous avançons dans la matière pour porter exclusivement sur les applications à la physique lorsque nous abordons l'étude des fonctions de plusieurs variables. En fait, à partir du chapitre 13 qui introduit les fonctions de plusieurs variables, nous nous attendons à ce que le lecteur est une plus grande maturité mathématique.

Le manuel contient deux courts chapitres, le chapitre 10 sur les vecteurs et le chapitre 12 sur les représentations paramétriques de courbes dans le plan et dans l'espace. Le chapitre 10 sur les vecteurs contient beaucoup plus d'information que nécessaire. Cependant, ce chapitre est une bonne préparation pour l'étude des fonctions de plusieurs variables. En particulier, il permet au lecteur de développer ses aptitudes à visualiser les objets en trois dimensions ; ce qui sera très utile lors l'étude de l'intégral double et triple au chapitre 15. Le chapitre 12 est fondamental pour l'étude du calcul vectoriel au chapitre 16 et des systèmes d'équations différentielles au chapitre 17.

Le chapitre 8 sur les séries entières est probablement le plus théorique des chapitres. Cela n'est pas surprenant dû à la nature du sujet. Le but principal de ce chapitre est de déterminer la convergence des séries entières. Il n'en reste pas moins que ce chapitre est fondamental pour ceux qui poursuivront l'étude des équations différentielles comme c'est le cas pour plusieurs des domaines du génie.

Nous avons limité au minimum le contenu du chapitre 16 sur le calcul vectoriel. Nous avons adopté une approche intuitive à ce sujet. Il aurait été bénéfique d'aborder plus en détails les opérations sur les courbes (additions et différences) pour créer de nouvelles courbes, et l'interprétation de ces opérations en termes d'opérations sur les intégrales le long de courbes. Ce chapitre ouvre la porte au vaste sujet de la géométrie différentielle. Nous nous sommes retenu pour ne pas déborder do contenu d'un cours de calcul différentiel et intégral standard.

Théorie

Les items marqués par le symbole  sont spécifiquement pour les lecteurs intéressés à la théorie et la rigueur en mathématique. Plusieurs de ces items demandent une connaissance du concept de « démonstration » que la majorité des étudiants du secondaire n'auront probablement pas vu. Ces items sont généralement optionnels. Ils sont pour les lecteurs curieux qui voudrait en savoir plus sur les méthodes enseignées en classe.

Il est fort probable que la majorité des étudiants en science de la vie et même en génie ne liront pas les sections plus théoriques. Malheureusement, pour eux, les mathématiques se limitent à une suite de méthodes et trucs pour résoudre certains problèmes. Ce manuel contient ces méthodes et trucs. Cependant, les sections plus théoriques donnent un avant goût de se que sont les mathématiques. Nous espérons que certains lecteurs seront intéressés

par la rigueur mathématiques et voudront poursuivre cette direction dans leur études.

Il y a plusieurs mentions du nombre d'Euler e . Nous donnons plusieurs façons équivalentes de le définir. Nous mentionnons indirectement le lien entre le nombre e et les fonctions trigonométriques, donc le nombre π , lors d'une des démonstrations de la règle d'addition pour les fonctions trigonométriques \sin et \cos . Nous espérons que les étudiants seront fascinés par le fait que les nombres e et π sont reliés.

Notation

Définition

Les ensembles suivants seront fréquemment utilisés dans le présent document.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres naturels positifs.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ est l'ensemble des nombres entiers.
- \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels ; c'est-à-dire, les nombres de la forme n/m où $n, m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.
- \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels.

En français, la virgule est utilisée pour séparer la partie entière de la partie décimale d'un nombre et nous utilisons un espace pour séparer les multiples de 10^3 . Ainsi,

$$105\ 456\ 263,456 = 105 \times 10^6 + 456 \times 10^3 + 263 + \frac{456}{1000}.$$

Cependant, dans le présent document, nous utiliserons la notation anglaise. Le point sépare la partie entière de la partie décimale d'un nombre et la virgule sépare les multiples de 10^3 . Nous écrivons donc

$$105,456,263.456 = 105 \times 10^6 + 456 \times 10^3 + 263 + \frac{456}{1000}.$$

La raison principale de ce choix est que la grande majorité des données utilisées dans ce document proviennent de documents en anglais qui utilisent cette notation. De plus, les logiciels sont tous en anglais et utilisent aussi cette notation. Pour être consistant, nous avons donc choisi d'utiliser la notation anglaise.

Avertissement

Les notes de cours que vous avez devant vous représente un ouvrage inachevé, qui est en constante évolution. Il ne faut donc pas être surpris d'y retrouver des fautes d'orthographe, des coquilles, etc. Les corrections seront apportées au cours du temps suite aux commentaires des lecteurs. L'auteur prend entière responsabilité des erreurs ; comment pourrait-il faire autrement ?

Remerciements

J'aimerais remercier Yves Bourgault, Wadii Hajji et Monica Nevins, des collègues de travail, dont les suggestions ont améliorées la présentation de la matière.

De plus, j'aimerais remercier Pamela Touchette-Giroux pour son excellent travail de révision des textes pour la première édition de ces notes. Il n'en reste pas moins que je prends toute la responsabilité pour les fautes présentes dans le texte.



Fonctions | 1

Ce chapitre présente les objets fondamentaux sur lesquels nous allons travailler dans les prochains chapitres. Ces objets sont les **fonctions**. Les principales propriétés des fonctions sont aussi définies dans ce chapitre. Nous terminons le chapitre avec une introduction à quelques unes des fonctions de base : les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques. Les fonctions exponentielles sont définies de façon intuitive dans ce chapitre. Elles sont revues de façon plus rigoureuse au chapitre suivant.

1.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Définition 1.1.1

Une **fonction** f est une opération d'un ensemble X à un ensemble Y qui, à chaque élément de X , associe un seul élément de Y . Nous écrivons $f : X \rightarrow Y$ pour désigner une fonction f de X dans Y .

Exemple 1.1.2

À la figure 1.1, nous définissons à l'aide d'un diagramme une fonction f d'un ensemble X de pays à un ensemble Y de villes. La fonction f donne la capitale du pays. À chacun des pays de X est associé une seule ville dans Y qui est sa capitale.

Il n'est pas nécessaire que toutes les villes de Y soient des capitales de pays. Par exemple, Toronto n'est pas la capitale d'un pays mais d'une province.

Nous écrivons

$$f(\text{Canada}) = \text{Ottawa} \quad , \quad f(\text{Angleterre}) = \text{Londres} \quad , \quad \text{etc.}$$



Exemple 1.1.3

Le tableau suivant définit une fonction g qui, à chaque nombre entier plus grand que 1 (ligne du haut), associe les diviseurs premiers de ce nombre entier (ligne du bas).

x	2	3	...	6	...	27	...	1372455084	...
$g(x)$	{2}	{3}	...	{2, 3}	...	{3}	...	{2, 3, 7, 11, 13, 17, 47}	...

La fonction g est donc une fonction qui va de l'ensemble X des nombres entiers plus grand que 1 à l'ensemble Y des ensembles de nombres premiers.

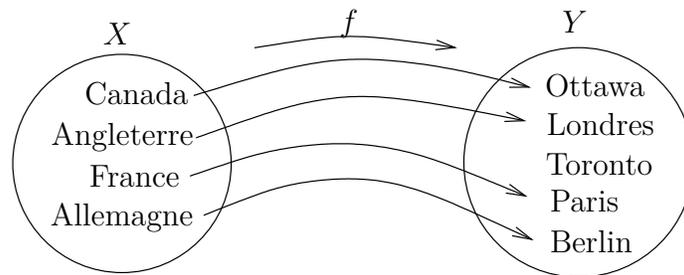


FIGURE 1.1 – Définition d’une fonction f à l’aide d’un diagramme

Nous écrivons

$$g(2) = \{2\} \quad , \quad g(1372455084) = \{2, 3, 7, 11, 13, 17, 47\} \quad , \dots$$



Exemple 1.1.4

La fonction h qui suit est définie à l’aide d’une expression algébrique.

$$h(x) = x^3 - 2x + 1 .$$

La fonction h est définie pour tout $x \in X = \mathbb{R}$ (l’ensemble des nombres réels) et donne une seule valeur $h(x) \in Y = \mathbb{R}$. Nous disons alors que h est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} que nous dénotons $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nous écrivons

$$h(1) = 0 \quad , \quad h(2) = 5 \quad , \quad h(\pi) = 12.26706787812110\dots \quad , \dots$$

Pour la valeur $h(\pi)$, les points de suspension après le dernier 0 indiquent qu’il y a une infinité de chiffres qui suivent.

Dans l’expression

$$y = h(x) = x^3 - 2x + 1 ,$$

la variable x est appelée la **variable indépendante** et la variable y est appelée la **variable dépendante** car elle dépend de x .



Définition 1.1.5

Si f est une fonction qui va d’un ensemble X à un ensemble Y , nous définissons le **graphe de la fonction f** comme étant l’ensemble

$$\text{graphe de } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} .$$

Pour une fonction qui va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il est plus fréquent de représenter le graphe de cette fonction par la courbe du plan cartésien qui est tracée par l’ensemble des points du graphe. Le graphe est donc un sous-ensemble du plan cartésien.

Exemple 1.1.6

Nous retrouvons à la figure 1.2 la représentation dans le plan cartésien du graphe de la fonction h définie à l'exemple 1.1.4. ♣

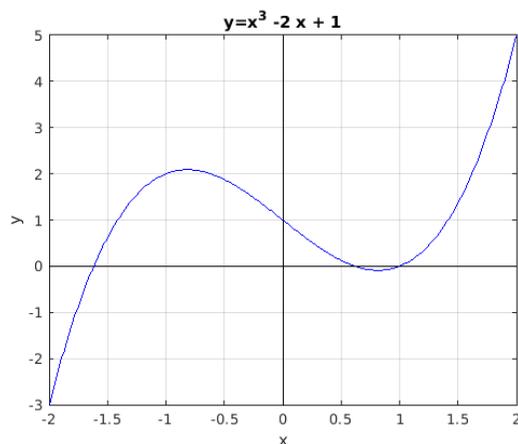


FIGURE 1.2 – Graphe de $y = h(x) = x^3 - 2x + 1$ pour $-2 \leq x \leq 2$.

1.2 Image et domaine d'une fonction

Définition 1.2.1

L'**image** d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est l'ensemble des éléments $y \in Y$ pour lesquels il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Nous écrivons

$$\text{Im } f \equiv \{y \in Y : f(x) = y \text{ pour au moins un élément } x \in X\} .$$

Exemple 1.2.2

Pour l'exemple 1.1.2, l'image de f est l'ensemble

$$\text{Im } f = \{\text{Berlin, Londres, Paris, Ottawa}\} .$$

♣

Remarque 1.2.3

Pour l'exemple 1.1.3, nous ne connaissons pas tous les éléments de l'image de g et il n'existe pas de formule pour les générer. ♠

Exemple 1.2.4

Pour l'exemple 1.1.4, l'image de h est l'ensemble des nombres réels comme nous pouvons le constater à partir du graphe de h à la figure 1.2. Nous écrivons

$$\text{Im } h = \mathbb{R} .$$



Définition 1.2.5

Le **domaine** d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est l'ensemble X sur lequel la fonction f est définie. Nous écrivons

$$\text{Dom } f = X .$$

Exemple 1.2.6

Pour l'exemple 1.1.2, la fonction f est définie pour tous les pays de l'ensemble X . Le domaine de f est donc l'ensemble X au complet.

$$\text{Dom } f = X = \{\text{Allemagne, Angleterre, Canada, France}\} .$$



Exemple 1.2.7

La fonction h de l'exemple 1.1.4 est définie pour tous les nombres réels. Le domaine de h est donc \mathbb{R} .



Exemple 1.2.8

Le graphe de la fonction $h(x) = \sqrt{x}$ est donné à la figure 1.3. Nous avons que

$$\text{Dom } h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} .$$

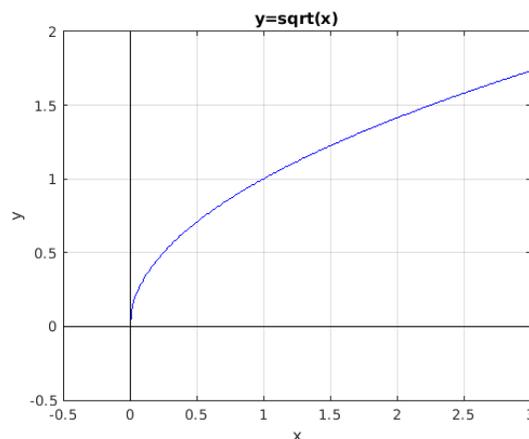


FIGURE 1.3 – Graphe de $y = \sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq 3$

1.3 Composition de fonctions

Définition 1.3.1

Si f est une fonction qui va de l'ensemble X à l'ensemble Y et g est une fonction qui va de l'ensemble Y à l'ensemble Z , nous pouvons définir une nouvelle fonction $g \circ f$ qui va aller de l'ensemble X à l'ensemble Z en posant

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$$

pour tous les éléments x dans l'ensemble X . La nouvelle fonction $g \circ f$ est appelée la **composition** des fonctions f et g .

Exemple 1.3.2

Deux fonctions sont définies par le diagramme à la figure 1.4. La fonction f donne la ville où demeure chacune des personnes de l'ensemble X et la fonction g donne la province où se situe chacune des villes de l'ensemble Y . La composition $g \circ f$ est donc la fonction qui donne la province où demeure chacune des personnes de l'ensemble X . Ainsi, nous obtenons

$$(g \circ f)(\text{Françoise}) = g(f(\text{Françoise})) = g(\text{Montréal}) = \text{Québec}$$

et

$$(g \circ f)(\text{Patrice}) = g(f(\text{Patrice})) = g(\text{Winnipeg}) = \text{Manitoba} .$$

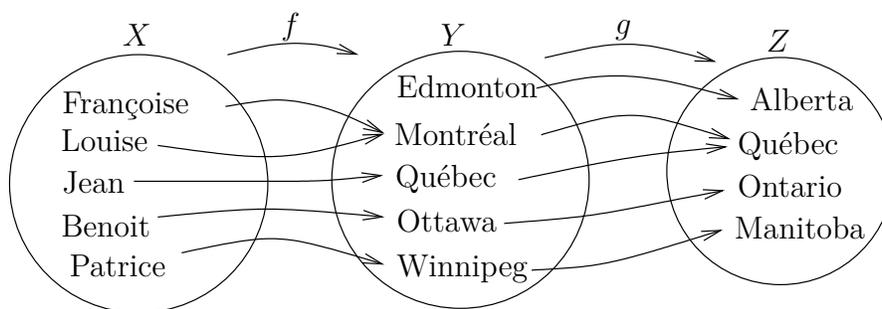


FIGURE 1.4 – Définition des fonctions f et g pour l'exemple 1.3.2

Exemple 1.3.3

Soit F la fonction qui donne pour chaque personne sa mère biologique et soit M la fonction qui donne pour chaque personne son père biologique.

La composition des fonctions F et M , dénotée $F \circ M$, est la fonction qui donne pour chaque personne la mère biologique du père biologique de cette personne (une des grand-mères de la

personne). Rappelons que dans la composition $F \circ M$, la fonction M est exécutée en premier et la fonction F en second. La fonction M donne le père biologique de la personne donnée initialement. Puis, la fonction F avec comme argument le père biologique de la personne donnée initialement donne la mère biologique de ce père.

Quel est le résultat de la composition $F \circ M \circ F$?



Exemple 1.3.4

Regardons un exemple de fonctions dont le domaine et l'image font parties des nombres réels. Plus précisément, considérons les fonctions $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 3x - 2$. Ainsi,

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 3 = 9x^2 - 12x + 7$$

et

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(x^2 + 3) = 3(x^2 + 3) - 2 = 3x^2 + 7.$$

Ces compositions donnent bien des fonctions qui sont différentes du produit fg qui est

$$(fg)(x) \equiv f(x)g(x) = (x^2 + 3)(3x - 2) = 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6.$$

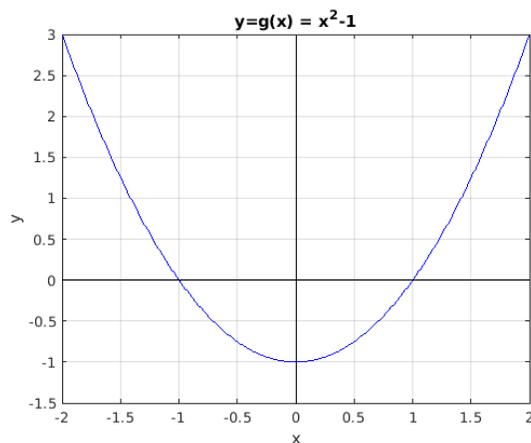


FIGURE 1.5 – Graphe de $y = g(x) = x^2 - 1$ pour $-2 \leq x \leq 2$

Exemple 1.3.5

Nous pouvons composer les fonctions $g(x) = x^2 - 1$ (figure 1.5) et $h(x) = \sqrt{x}$ pour obtenir de nouvelles fonctions. Le domaine de g est \mathbb{R} et l'image de g est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}$. De plus, le domaine de h est $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ et l'image de h est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Pour définir la composition $h \circ g$, il faut avoir

$$\text{Im } g \subset \text{Dom } h. \tag{1.3.1}$$

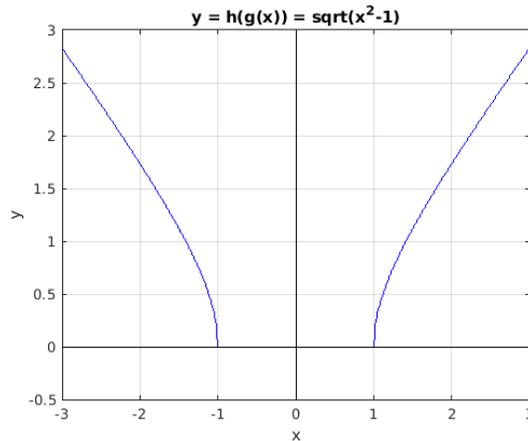


FIGURE 1.6 – Graphe de $y = h(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour $1 \leq |x| \leq 3$

Ce qui n'est pas le cas présentement. Il faut restreindre g à l'ensemble des x tels que $x^2 - 1 \geq 0$ pour satisfaire (1.3.1). Avec la restriction $|x| \geq 1$, nous avons maintenant que

$$\text{Im } g = \{x : x \geq 0\} = \text{Dom } h \quad (1.3.2)$$

et la composition $h \circ g$ est définie par

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{pour } |x| \geq 1.$$

Il découle de (1.3.2) que l'image de $h \circ g$ est l'image de h car l'image de g est tout le domaine de h . Le domaine de $h \circ g$ est $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ et l'image de $h \circ g$ est $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$. Le graphe de $h \circ g$ est donné à la figure 1.6.

Puisque

$$\text{Im } h = \{y | y \geq 0\} \subset \mathbb{R} = \text{Dom } g,$$

La fonction $g \circ h$ est définie par

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1 \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Le domaine de $g \circ h$ est déterminé par le domaine de la racine carrée. Puisque h peut atteindre toutes les valeurs réelles plus grandes ou égales à zéro, nous avons que l'image de $g \circ h$ est l'image de g . Ainsi,

$$\text{Dom } g \circ h = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } g \circ h = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\}.$$

Le graphe de $g \circ h$ est donné à la figure 1.7. ♣

Remarque 1.3.6

Il serait tentant de dire que $(g \circ h)(x) = x - 1$ pour tout x mais cela est vrai seulement si $x \geq 0$ car la fonction h n'est pas définie pour les nombres négatifs et nous ne pouvons donc pas définir $g(h(x))$ pour $x < 0$; l'expression $(\sqrt{x})^2 - 1$ n'est pas définie pour $x < 0$.

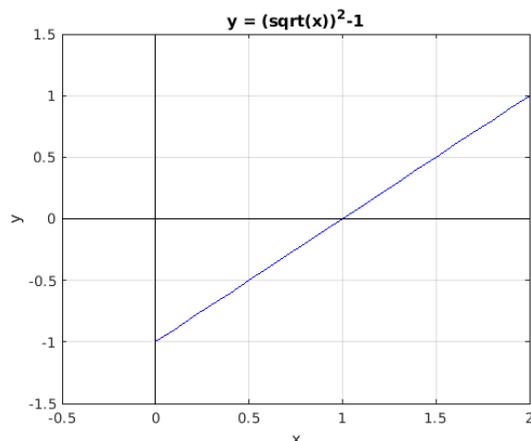


FIGURE 1.7 – Graphe de $y = g(h(x)) = x - 1$ pour $0 \leq x \leq 2$

La fonction $f(x) = x - 1$ n'est pas la fonction $g \circ h$. Il est vrai que $(g \circ h)(x) = f(x)$ pour $x \geq 0$ mais f est définie pour toutes les valeurs réelles de x alors que $g \circ h$ ne l'est pas. Nous disons que f est une **extension** de la fonction $g \circ h$. Il ne faut donc pas utiliser l'extension d'une fonction pour déterminer le domaine et l'image de celle-ci car cela peut conduire à des erreurs. Dans le cas présent,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{Im } f = \mathbb{R},$$

ce qui est différent du domaine et de l'image de $g \circ h$. ♠

1.4 Fonctions inverses (réciproques)

Commençons par revoir la définition de l'inverse pour l'addition et de l'inverse pour la multiplication, cela nous sera utile pour bien comprendre ce qu'est l'inverse d'une fonction.

1.4.1 Inverse additif d'un nombre réel

Le nombre 0 est l'**élément neutre** pour l'addition ; c'est le nombre y tel que $y + x = x + y = x$ pour tout nombre réel x .

Exemple 1.4.1

Nous avons $5 + 0 = 0 + 5 = 5$, $27/4 + 0 = 0 + 27/4 = 27/4$ et $\pi + 0 = 0 + \pi = \pi$. ♣

L'**inverse additif** d'un nombre réel x est le nombre réel z tel que $x + z = z + x = 0$.

Exemple 1.4.2

L'inverse additif de 5 est -5 car $5 + (-5) = 0$. De même, l'inverse additif de π est $-\pi$ car $\pi + (-\pi) = 0$. ♣

1.4.2 Inverse multiplicatif d'un nombre réel

Le nombre 1 est l'**élément neutre** pour la multiplication ; c'est le nombre y tel que $y \times x = x \times y = x$ pour tout nombre réel x .

Exemple 1.4.3

Nous avons $5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$, $(27/4) \times 1 = 1 \times (27/4) = 27/4$ et $\pi \times 1 = 1 \times \pi = \pi$. ♣

L'**inverse multiplicatif** d'un nombre réel $x \neq 0$ est le nombre réel z tel que $x \times z = z \times x = 1$.

Exemple 1.4.4

L'inverse multiplicatif de 5 est 0.2 car $5 \times 0.2 = 0.2 \times 5 = 1$. De même, l'inverse multiplicatif de $27/4$ est $4/27$ car $(27/4) \times (4/27) = (4/27) \times (27/4) = 1$. ♣

Remarque 1.4.5

Le nombre 0 n'a pas d'inverse multiplicatif car il n'existe pas de nombre réel y tel que $0 \times y = 1$. ♠

1.4.3 Inverse (réciproque) d'une fonction

Avant de définir l'inverse d'une fonction, il faut bien comprendre que l'opération pour laquelle nous voulons définir un inverse n'est pas l'addition ou la multiplication de fonctions mais la composition de fonctions.

L'addition et la multiplication de fonctions sont en fait des opérations sur les éléments de l'image des fonctions (à valeurs réelles). La composition de fonctions est indépendante des opérations d'addition et de multiplication des fonctions.

Comme nous l'avons fait pour l'inverse additif et l'inverse multiplicatif, il faut définir l'élément neutre de la composition de fonctions.

Définition 1.4.6

La fonction qui joue le rôle d'**élément neutre** pour la composition de fonctions est la **fonction identité**, dénotée I , qui est définie par $I(z) = z$ pour tout élément z du domaine. Pour chaque élément z du domaine, la fonction identité redonne cet élément z .

Si f est une fonction d'un ensemble X dans un ensemble Y , nous pouvons facilement voir que

$$f \circ I = f \quad \text{et} \quad I \circ f = f.$$

C'est à dire, $(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$ et $(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x)$ pour tout x .

Remarquons la similarité avec la propriété de l'élément neutre pour l'addition (i.e. $0 + x = x + 0 = x$ pour tout x) et de l'élément neutre pour la multiplication (i.e. $1 \times x = x \times 1 = x$ pour tout x).

Exemple 1.4.7

La fonction I , qui à une personne redonne cette même personne, est l'élément neutre pour

la composition de fonctions qui agissent sur les personnes comme les fonctions F et M de l'exemple 1.3.3.

Par exemple, nous avons $I \circ F = F$ car F donne pour chaque personne sa mère biologique et par la suite I redonne cette mère. ♣

Exemple 1.4.8

Pour la composition de fonctions dont le domaine et l'image sont des sous-ensembles des nombres réels, l'élément neutre I est la fonction qui à chaque nombre réel x redonne le nombre réel x .

Par exemple, si $p(x) = x^2 + 5x$, alors $I \circ p = p \circ I = p$ car $(I \circ p)(x) = I(p(x)) = p(x)$ et $(p \circ I)(x) = p(I(x)) = p(x)$ pour tout nombre réel x . ♣

En s'inspirant de la définition de l'inverse pour l'addition et de l'inverse pour la multiplication, nous définissons l'inverse pour la composition de fonctions.

Définition 1.4.9

L'inverse d'une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est la fonction g qui va de l'ensemble Y à l'ensemble X et qui satisfait

$$f \circ g = I \quad \text{et} \quad g \circ f = I,$$

C'est-à-dire, $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$ et $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in Y$. Nous dénotons par f^{-1} la fonction g qui est l'inverse de f .

Cette définition est équivalente à l'énoncé suivant qui est souvent utilisé comme définition de l'inverse d'une fonction.

Définition 1.4.10

L'inverse de la fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est la fonction f^{-1} qui va de l'ensemble Y à l'ensemble X et qui satisfait

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = f(x).$$

En effet, si $y = f(x)$ alors $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ et si $x = f^{-1}(y)$ alors $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ par définition de l'inverse d'une fonction.

Exemple 1.4.11

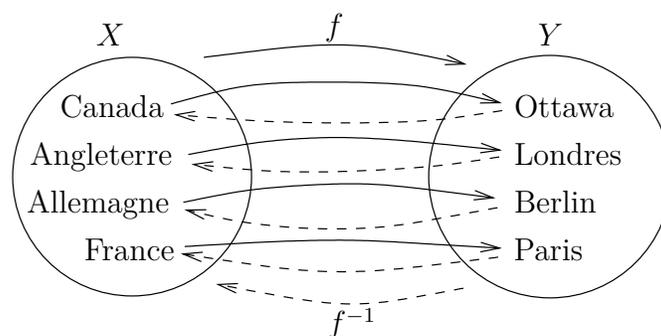
Nous retrouvons à la figure 1.8 un diagramme qui définit d'une fonction f qui à chaque pays dans X assigne sa capitale dans Y . La fonction inverse f^{-1} est donc la fonction qui, à chaque capitale dans Y , assigne le pays dont elle est la capitale dans X .

La fonction f^{-1} est définie à la figure 1.8 par les flèches formées de tirets. ♣

Exemple 1.4.12

L'inverse de la fonction $f(x) = x/3 + 1$ est la fonction $g(x) = 3x - 3$ car

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 3 = x = I(x)$$

FIGURE 1.8 – Définition des fonctions f et f^{-1} de l'exemple 1.4.11

pour tout x . De même, nous pouvons vérifier que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = I(x)$ pour tout x .

Ainsi, pour $f(x) = x/3 + 1$, nous obtenons $f^{-1}(x) = 3x + 3$. ♣

Nous avons vu que 0 n'avait pas d'inverse multiplicatif mais que tous les autres nombres réels avaient un inverse multiplicatif. La situation est encore plus complexe pour les fonctions car elles n'ont pas toutes un inverse.

Exemple 1.4.13

Par exemple, la fonction F de l'exemple 1.3.3 qui donne pour chaque personne sa mère biologique n'a pas d'inverse. Si nous donnons une mère, alors nous ne pouvons pas déterminer uniquement la personne pour qui elle est la mère sauf si cette mère a eu un seul enfant. ♣

Remarque 1.4.14

En Ontario, nous utilisons très fréquemment l'expression **la réciproque d'une fonction** pour désigner l'inverse d'une fonction. Ce n'est pas le cas dans tous les pays de la francophonie. Les anglophones utilisent l'inverse d'une fonction. ♠

1.4.4 Comment déterminer si une fonction a un inverse

Pour déterminer si une fonction f (en tant que fonction de son domaine à son image) a un inverse il faut vérifier que pour chaque élément y de son image il existe un seul et unique élément x du domaine de f tel que la fonction f évaluée à x donne y (i.e. $f(x) = y$). Nous donnons un nom spéciale aux fonctions qui possèdent cette propriété.

Définition 1.4.15

Une fonction f qui va d'un ensemble X à un ensemble Y est **injective** si $f(x_1) = f(x_2)$ implique que $x_1 = x_2$.

Exemple 1.4.16

Une fonction f est définie par le diagramme à la figure 1.9. Cette fonction n'a pas d'inverse car les nombres 3 et 4 donnent tous les deux la couleur noir. Nous ne pouvons donc pas

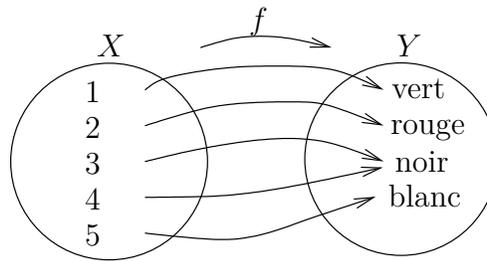


FIGURE 1.9 – Définition d’une fonction f qui n’a pas d’inverse. Cette fonction est discutée à l’exemple 1.4.16

définir une fonction inverse de Y dans X pour f ; quelle serait alors la valeur assignée à la couleur noir ? ♣

Une autre notion important dans le contexte générale de l’étude des fonctions est la notion suivante.

Définition 1.4.17

Une fonction f qui va d’un ensemble X à un ensemble Y est **surjective** si, pour tout $y \in Y$, il existe au moins un $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

En d’autres mot, une fonction $f : X \rightarrow Y$ est surjective si $\text{Im } f = Y$; tous les éléments de Y sont dans l’image de la fonction. Ce concept jouera un rôle secondaire dans notre recherche de fonctions inverses car nous considérerons seulement les fonctions $f : X \rightarrow Y$ avec $Y = \text{Im } f$.

Il y a plusieurs façons de vérifier si une fonction est injective ; c’est-à-dire que pour chaque valeur y dans l’image d’une fonction f il existe une seule valeur x dans le domaine de cette fonction f qui satisfasse $f(x) = y$.

Méthode algébrique

Illustrons cette méthode à l’aide d’un exemple.

Exemple 1.4.18

Considérons la fonction $f(x) = x/3 + 1$ que nous avons vu précédemment. Supposons que x_1 et x_2 soient deux nombres tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Le but est de montrer que $x_1 = x_2$ et que nous avons en fait évalué la fonction f au même point pour obtenir y .

Nous obtenons de $f(x_1) = f(x_2)$ que $x_1/3 + 1 = x_2/3 + 1$. Après avoir soustrait 1 de chaque côté de l’égalité, nous trouvons $x_1/3 = x_2/3$. Une multiplication par 3 des deux cotés de cette nouvelle égalité nous donne $x_1 = x_2$. Ce que nous voulions démontrer. ♣

Exemple 1.4.19

Est-ce que la fonction $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$ a un inverse sur $\mathbb{R} \setminus \{5/2\}$, son domaine ?

Cela revient à montrer que f est injective. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{1 + 3x_1}{5 - 2x_1} = \frac{1 + 3x_2}{5 - 2x_2} \\ &\Leftrightarrow (1 + 3x_1)(5 - 2x_2) = (1 + 3x_2)(5 - 2x_1) \\ &\Leftrightarrow 5 + 15x_1 - 2x_2 - 6x_1x_2 = 5 + 15x_2 - 2x_1 - 6x_1x_2 \\ &\Leftrightarrow 15x_1 - 2x_2 = 15x_2 - 2x_1 \\ &\Leftrightarrow 17x_1 = 17x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 . \end{aligned}$$



Test de la droite horizontale

Pour ce test, nous utiliserons le graphe de la fonction f et nous vérifierons que chaque droite horizontale (i.e. y est constant) coupe le graphe de la fonction f en un seul point. L'abscisse x de ce point est la seule valeur du domaine de f telle que $f(x) = y$.

Exemple 1.4.20

À la figure 1.10, nous avons tracé le graphe de $f(x) = x/3 + 1$ et quelques droites horizontales pour nous convaincre que chaque droite horizontale coupe le graphe de la fonction en un seul point. Ce qui support le fait que la fonction f est injective. 

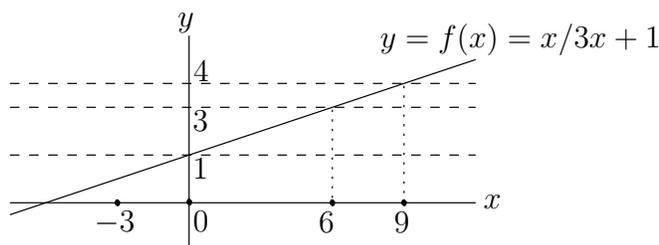


FIGURE 1.10 – Le graphe de $f(x) = x/3 + 1$ et de quelques droites horizontales

1.4.5 Comment trouver l'inverse d'une fonction

Après avoir vérifié qu'une fonction est injective et donc qu'un inverse existe, nous pouvons chercher son inverse.

Méthode algébrique

Si $y = f(x)$, il faut résoudre pour x en fonction de y . L'exemple suivant va illustrer cette méthode.

Exemple 1.4.21

Dans le cas simple de la fonction $f(x) = x/3 + 1$, nous posons $y = f(x) = x/3 + 1$ et nous résolvons pour x . Nous soustrayons 1 de chaque côté de l'égalité précédente pour obtenir $y - 1 = x/3$. Puis nous multiplions les deux côtés de cette nouvelle égalité par 3 pour obtenir $x = 3y - 3$. Donc $x = f^{-1}(y) = 3y - 3$.

Par tradition, nous utilisons y pour la variable dépendante et x pour la variable indépendante. Nous échangeons donc x et y pour obtenir $y = f^{-1}(x) = 3x - 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**Exemple 1.4.22**

Même si f est donnée par un simple polynôme, il n'est pas toujours possible de trouver une expression algébrique pour l'inverse de f .

Par exemple, soit $f(x) = x^6 + x^2 + 3$. Il est facile de tracer le graphe de f et de remarquer que f satisfait le test de la droite horizontale. Nous sommes donc certain que l'inverse de f existe.

Cependant, nous ne pouvons résoudre l'équation $y = x^6 + x^2 + 3$ pour x en fonction de y afin d'obtenir $x = f^{-1}(y)$. En fait, il a été démontré par Evariste Galois, un mathématicien français du 18^e siècle, qu'il n'existe pas de formule générale pour trouver les racines d'un polynôme de degré plus grand que quatre comme c'est le cas pour les polynômes de degré deux.

**Exemple 1.4.23**

À l'exemple 1.4.19, nous avons montré que la fonction $f(x) = \frac{1 + 3x}{5 - 2x}$ était injective. Il existe donc un inverse de f en tant que fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5/2\}$. Trouvons cet inverse.

Puisque

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{1 + 3x}{5 - 2x} &\Leftrightarrow y(5 - 2x) = 1 + 3x \Leftrightarrow 5y - 2xy = 1 + 3x \\ &\Leftrightarrow 5y - 1 = 2xy + 3x = (2y + 3)x \Leftrightarrow x = \frac{5y - 1}{2y + 3}, \end{aligned}$$

nous avons $x = f^{-1}(y) = \frac{5y - 1}{2y + 3}$. Comme par tradition nous utilisons y pour la variable dépendante et x pour la variable indépendante, nous échangeons x et y pour obtenir $y = f^{-1}(x) = \frac{5x - 1}{2x + 3}$. La fonction f^{-1} a comme domaine l'image de la fonction f qui est $\mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$.



Méthode graphique

Méthode 1.4.24

Si f est une fonction qui possède une fonction inverse f^{-1} , alors nous obtenons le graphe de f^{-1} en faisant la réflexion du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

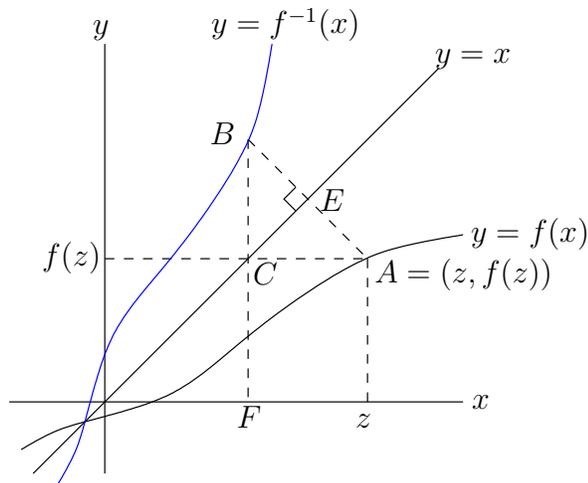


FIGURE 1.11 – Graphe de f^{-1} obtenu par réflexion du graphe de f par rapport à la droite $y = x$

Remarque 1.4.25 

Pour justifier cet énoncé, nous utiliserons le dessin à la figure 1.11. Nous fixons z et cherchons les coordonnées du point B qui est le point symétrique au point $A = (z, f(z))$ par rapport à la droite $y = x$. Nous voulons montrer que les coordonnées du point B sont $(f(z), z)$, un point du graphe de f^{-1} car $z = f^{-1}(f(z))$.

Si B est le point qui est symétrique au point A par rapport à la droite $y = x$, alors les angles $\angle AEC$ et $\angle BEC$ sont des angles droits et les segments \overline{AE} et \overline{BE} sont de même longueur.

Nous traçons la droite horizontale $y = f(z)$ qui coupe la droite $y = x$ en C . Puisque les angles $\angle AEC$ et $\angle BEC$ sont égaux et les côtés \overline{AE} et \overline{CE} adjacents à l'angle $\angle AEC$ sont respectivement de même longueur que les côtés \overline{BE} et \overline{CE} adjacents à l'angle $\angle BEC$, il en découle que les triangles $\triangle ACE$ et $\triangle BCE$ sont congruents. Ainsi les segments \overline{AC} et \overline{BC} sont de même longueur et les angles $\angle ACE$ et $\angle BCE$ sont égaux.

Puisque la droite $y = x$ fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe des x , nous avons que $\angle ACE = \pi/4$. Il s'en suit que $\angle ACB = \pi/2$. La droite qui passe par B et C est donc verticale. Comme les coordonnées du point C sont $(f(z), f(z))$, nous avons donc que l'abscisse du point B est $f(z)$.

Le point d'intersection de la droite qui passe par B et C avec l'axe des x est $F = (f(z), 0)$. Pour trouver l'ordonnée du point B , nous utilisons le fait que la longueur du segment \overline{BC} , qui est aussi la longueur du segment \overline{AC} , est $z - f(z)$. L'ordonnée du point B est donc la somme des longueurs des segments \overline{FC} et \overline{CB} . C'est-à-dire que l'ordonnée du point B est $f(z) + (z - f(z)) = z$. Ce qui confirme que les coordonnées de B sont $(f(z), z)$. ♠

1.4.6 Influence du domaine et de l'image d'une fonction sur la définition de son inverse

Une question que nous n'avons pas abordée précédemment est l'influence du domaine et de l'image d'une fonction sur la définition de son inverse.

Exemple 1.4.26

Considérons la fonction $f(x) = x^2 - 1$ pour toutes les valeurs réelles de x . Cette fonction n'a pas d'inverse car elle n'est pas injective. Par exemple, $f(-1) = f(1) = 0$. Il est aussi facile de voir à partir du graphe de f que cette fonction ne satisfait pas le test de la droite horizontale.

Par contre, si nous considérons $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$ seulement, alors f a un inverse qui est $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geq -1$. Nous retrouvons à la figure 1.12 les graphes de f et f^{-1} .

Utilisons la méthode algébrique pour trouver l'inverse de $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$. Nous additionnons 1 de chaque côté de $y = f(x) = x^2 - 1$ pour obtenir $y + 1 = x^2$. Puis nous prenons la racine carrée des deux côtés de cette dernière égalité pour obtenir $x = \sqrt{y+1}$. Donc $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y+1}$ pour $y \geq -1$.

Par tradition, nous échangeons x et y pour obtenir

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{pour } x \geq -1.$$

Sans l'hypothèse que $x \geq 0$, nous aurions obtenu $x = \pm\sqrt{y+1}$. Or, cette formule ne peut pas définir une fonction car nous avons deux valeurs pour chaque valeur de y . ♣

1.5 Fonctions trigonométriques 🌲 🔧

Vous avez probablement vu la définition du cosinus et sinus d'un angle à partir d'un triangle droit. Si $\triangle ABC$ est un triangle avec un angle droit au sommet C et θ est l'angle au sommet A (figure 1.14), alors le cosinus et le sinus de θ sont définis par

$$\cos(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}$$

où $|\overline{AC}|$, $|\overline{BC}|$ et $|\overline{AB}|$ sont les longueurs des segments \overline{AC} , \overline{BC} et \overline{AB} respectivement. Cette définition est excellente pour les angles aigus (moins de 90°) mais comment définir le cosinus ou sinus d'un angle obtus (plus de 90°).

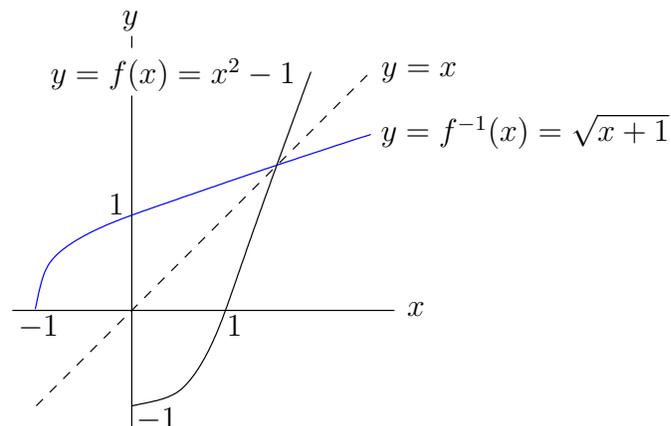


FIGURE 1.12 – Graphes de $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \geq 0$ et de $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geq -1$.

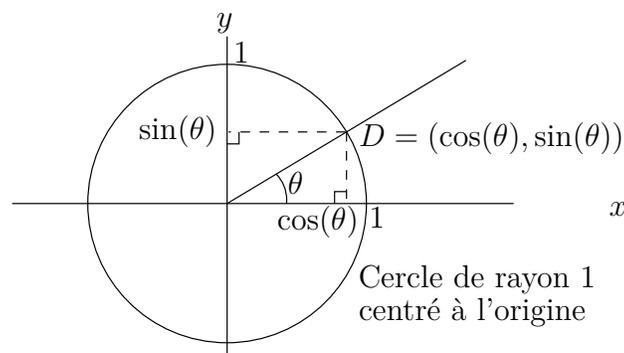


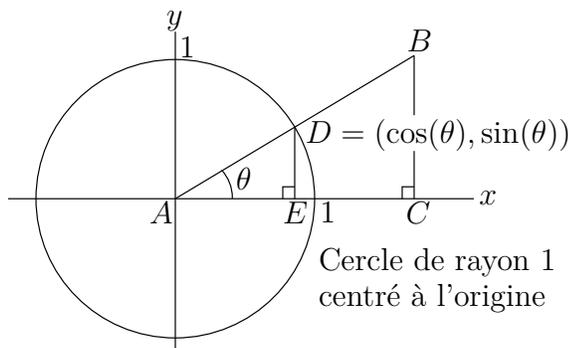
FIGURE 1.13 – Définition du sinus et cosinus de l'angle θ à partir du cercle unité.

Une autre façon de définir le **cosinus et sinus d'un angle en radians** est avec le cercle unité.

Définition 1.5.1

Soit D , l'intersection du cercle de rayon 1 centré à l'origine avec la droite émanant de l'origine et qui forme un angle θ avec l'axe des x lorsque nous nous déplaçons dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (figure 1.13). L'abscisse du point D est $\cos(\theta)$ et l'ordonnée du point D est $\sin(\theta)$.

À partir de maintenant, au lieu de calculer les angles en degrés, nous calculons les angles en radians. N'oubliez pas que le nombre π est le rapport de la circonférence d'un cercle sur son diamètre. Ainsi, 360° correspond à 2π radians, la circonférence d'un cercle de rayon 1.

FIGURE 1.14 – Définition du sinus et cosinus de l'angle θ à partir d'un triangle.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

TABLE 1.1 – Valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour quelques valeurs de θ .

Les deux définitions du cosinus et sinus que nous venons de donner sont équivalentes. Considérons le dessin à la figure 1.14. Si le sommet A du triangle $\triangle ABC$ est à l'origine, \overline{AC} repose sur l'axe des x , D est le point d'intersection de la droite contenant le segment \overline{AB} avec le cercle de rayon 1 centré à l'origine, et E est le point d'intersection de la droite perpendiculaire à \overline{AC} passant par D avec l'axe des x , alors les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle ADE$ sont semblables. Ainsi,

$$\cos(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AD}|} = |\overline{AE}| \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{AD}|} = |\overline{DE}|$$

car $|\overline{AD}| = 1$.

Il faut bien comprendre que l'angle positif θ représenté dans les dessins des figures 1.13 et 1.14 est l'angle mesuré lorsque nous nous déplaçons dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre à partir de l'axe des x .

Le Tableau 1.1 donne quelques valeurs du sinus et cosinus qu'il faut mémoriser. Nous verrons plus tard que nous pouvons utiliser les identités trigonométriques pour trouver d'autres valeurs du sinus et cosinus.

Soit $\triangle ABC$ le triangle avec un angle droit au point C et un angle de θ radians au sommet A (figure 1.14). Pour $\theta \neq n\pi + \pi/2$ où $n \in \mathbb{Z}$, la tangente de l'angle θ est définie par

$$\tan(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}.$$

Nous pouvons aussi définir la tangente de l'angle θ à l'aide du cercle unité. Si nous utilisons

le triangle $\triangle ABC$ représenté à la figure 1.14, alors la **tangente de l'angle** θ est

$$\tan(\theta) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{AE}|} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Il ne faut pas oublier que l'angle positif θ est l'angle mesuré lorsque nous nous déplaçons dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre à partir de l'axe des x .

Il y a trois autres fonctions trigonométriques qui peuvent être utiles de temps à autre. Nous donnons leurs définitions à partir du triangle $\triangle ABC$ représenté à la figure 1.14.

La **cotangente d'un angle** θ est définie par la relation

$$\cot(\theta) = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{DE}|} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \quad \theta \neq n\pi \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

La **sécante d'un angle** θ est définie par la relation

$$\sec(\theta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AE}|} = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Finalement, la **cosécante d'un angle** θ est définie par la relation

$$\csc(\theta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DE}|} = \frac{1}{\sin(\theta)}, \quad \theta \neq n\pi \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 1.5.2

Notons que $\cos(\theta) \neq \cos(\theta)$.

La fonction $\cos(x)$ définie dans le cours de **Fonctions** de 11^e année en Ontario assume que x est mesuré en degrés. Alors que la fonction $\cos(x)$ définie dans le cours de **Fonctions Avancées** de 12^e assume que x est mesuré en radians.

La même notation a été utilisée pour dénoter deux différentes fonctions. Par exemple, $\cos(10) \neq \cos(10)$ si l'angle du premier cosinus est 10 degrés et celui du deuxième cosinus est 10 radians. Il est aussi mélangeant d'écrire $\cos(10) = \cos(10(\pi/180))$; il faut comprendre que l'angle du premier cosinus est 10 degrés alors que celui du deuxième cosinus est $10(\pi/180)$ radians.

Si nous dénotons par \cos_d le cosinus où l'angle est mesuré en degrés et par \cos le cosinus où l'angle est mesuré en radians, alors il est maintenant clair que $\cos_d(10) \neq \cos(10)$ et $\cos_d(10) = \cos(10(\pi/180))$.

Il aurait été préférable de donner des noms différents au cosinus pour les angles en degrés et au cosinus pour les angles en radians. Malheureusement, la tradition veut que nous utilisions le même nom (i.e. \cos) dans les deux cas.

À moins d'avis contraire, l'argument des fonctions trigonométriques sera toujours mesuré en radians. Il sera très clairement spécifié si jamais nous devons utiliser les fonctions trigonométriques où les angles sont mesurés en degrés.

Cette nuance entre le cosinus où les angles sont mesurés en degrés et celui où les angles sont mesurés en radians aura des conséquences très importantes lors de l'étude du calcul différentiel et intégral pour les fonctions trigonométriques.

La remarque précédente au sujet du cosinus est aussi valable pour les autres fonctions trigonométriques. ♠

Remarque 1.5.3

Remarquons que $\sin \theta \neq \theta \sin$. En fait, cette dernière expression n'a aucun sens. Il faut noter qu'un grand nombre d'auteurs utilisent la notation $\sin \theta$ pour désigner $\sin(\theta)$. C'est donc le sinus qui est évalué à θ et non pas le produit du sinus par le monôme θ .

L'utilisation de $\sin \theta$, $\cos \theta$ et $\tan \theta$ pour désigner $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$ respectivement est une tradition que nous éviterons dans le présent document. De cette façon, nous ne risquerons pas de retrouver une expression du genre $\sin \theta + 1$. Est-ce $\sin(\theta + 1)$ ou $\sin(\theta) + 1$? ♠

1.5.1 Identités trigonométriques

Puisque $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les coordonnées d'un point du cercle de rayon 1 centré à l'origine, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 1.5.4

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R} .$$

Puisque θ et $\theta + 2\pi$ représentent le même point du cercle de rayon 1 centré à l'origine, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 1.5.5

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R} .$$

Nous disons que le cosinus et le sinus sont des fonctions **périodiques** de **période** 2π . Il s'en suit que nous avons les mêmes égalités si 2π est remplacé par -2π , 4π , -4π , etc.

Il est facile de déduire plusieurs identités trigonométriques à partir du cercle unité.

Puisque les triangles $\triangle OBE$, $\triangle OCG$, $\triangle ODG$ et $\triangle OAE$ représentés à la figure 1.15 sont congruents, nous obtenons les identités suivantes.

Proposition 1.5.6

$$\begin{array}{ll} \cos(\theta) = \cos(-\theta), & \sin(\theta) = -\sin(-\theta), \\ \cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta), & \sin(\theta) = \sin(\pi - \theta), \\ \cos(\theta) = -\cos(\pi + \theta) & \text{et} \quad \sin(\theta) = -\sin(\pi + \theta) \end{array}$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Puisque les triangles $\triangle OAB$ et $\triangle ODC$ représentés à la figure 1.16 sont congruents, nous obtenons les identités suivantes.

Proposition 1.5.7

$$\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{pour} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Ce sont seulement quelques unes des identités trigonométriques que nous pouvons déduire à partir du cercle unité.

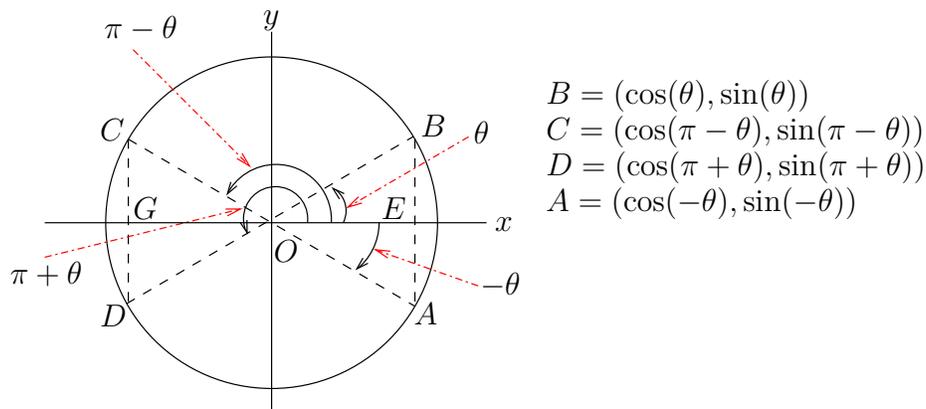


FIGURE 1.15 – Identités trigonométriques provenant de réflexions par rapport aux axes

Finalement, les **formules d'addition** suivantes seront d'une très grande utilité lors de la résolution d'équations impliquant les cosinus et sinus. Elles sont aussi utilisées pour simplifier les intégrales (chapitre 6) que nous retrouvons souvent dans les applications.

Proposition 1.5.8

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

et

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)$$

pour $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.5.9 👁

Nous entendons souvent dire qu'il n'y a qu'une et une seule façon de résoudre un problème de mathématique. Pour contredire cette affirmation, nous donnons plusieurs démonstrations différentes des formules d'addition pour le sinus et le cosinus. Toutes ces démonstrations sont bonnes. Il est donc possible d'avoir plus d'une bonne façon de résoudre un problème mathématique.

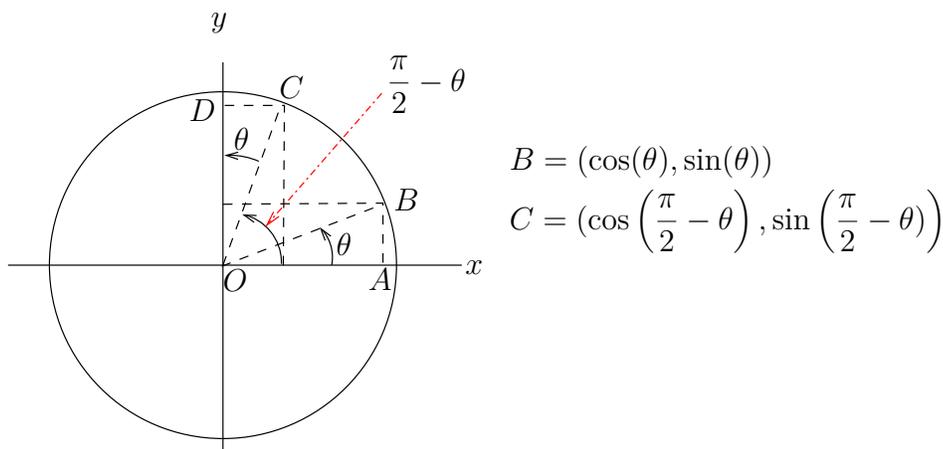


FIGURE 1.16 – Identités trigonométriques provenant d’une réflexion par rapport à la droite $y = x$

Première démonstration: Nous utilisons le dessin à la figure 1.17. Nous assumons donc que θ_1 et θ_2 sont entre 0 et $\pi/2$. Pour les autres valeurs de θ_1 et θ_2 , la démonstration peut être réduite au présent cas à l’aide des identités trigonométriques données aux propositions 1.5.6 et 1.5.7.

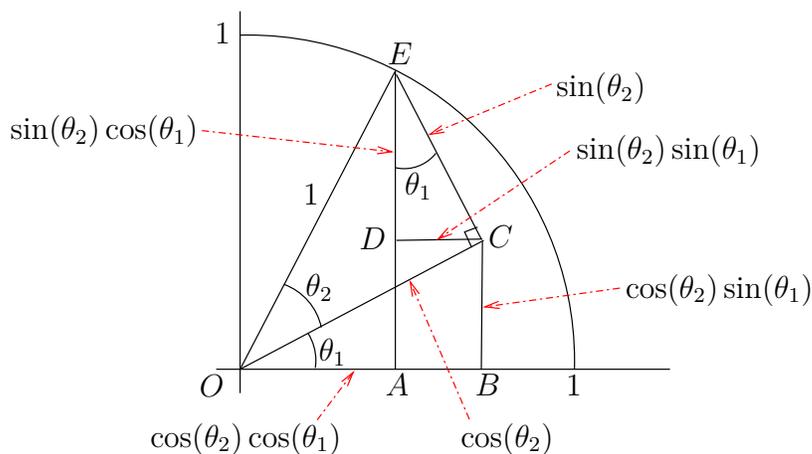


FIGURE 1.17 – Cette figure sert à la première démonstration de la règle d’addition pour les sinus et cosinus qui est donnée à la remarque 1.5.9.

Le triangle $\triangle OBC$ est semblable au triangle $\triangle EDC$. En particulier, $\angle COB = \angle CED$. Si nous considérons le triangle $\triangle OCE$, nous trouvons que la longueur de l’hypoténuse \overline{EC} du triangle $\triangle EDC$ est $\sin(\theta_2)$. Ainsi, $|\overline{ED}| = \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)$ et $|\overline{DC}| = \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)$ par définition du cosinus et du sinus à partir d’un triangle droit. De même, si nous considérons

le triangle $\triangle OCE$, nous trouvons que la longueur de l'hypoténuse \overline{OC} du triangle $\triangle OBC$ est $\cos(\theta_2)$. Ainsi, $|\overline{OB}| = \cos(\theta_2) \cos(\theta_1)$ et $|\overline{BC}| = \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)$ par définition du cosinus et du sinus à partir d'un triangle droit.

Nous avons donc

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = |\overline{AE}| = |\overline{BC}| + |\overline{DE}| = \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)$$

et

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = |\overline{OA}| = |\overline{OB}| - |\overline{DC}| = \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) - \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) .$$

Deuxième démonstration: Cette démonstration fait appel aux nombres complexes que le lecteur n'a probablement pas vu. Nous donnons quand même cette démonstration puisqu'elle est très courte et élégante, en espérant que cela pourra inciter certains lecteurs à approfondir leurs connaissances en mathématiques au delà du cours de calcul différentiel et intégral.

Puisque $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$e^{(\theta_1 + \theta_2)i} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (1.5.1)$$

et

$$\begin{aligned} e^{(\theta_1 + \theta_2)i} &= e^{\theta_1 i} e^{\theta_2 i} = (\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) (\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &= (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + (\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)) i . \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Si nous comparons la partie réelle et imaginaire de (1.5.1) et (1.5.2), nous obtenons

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

et

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) .$$

Évidemment, cette démonstration est très courte mais fait appel à l'identité $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ qui n'est pas triviale à démontrer. ♠

Exemple 1.5.10

Quelle est la valeur de $\sin(2\pi/3)$?

Puisque $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$, nous avons que

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

où la dernière égalité provient du Tableau 1.1. ♣

Exemple 1.5.11

Quelle est la valeur de $\sin(7\pi/12)$?

Puisque $7\pi/12 = \pi/3 + \pi/4$, nous obtenons de la formule d'addition pour le sinus que

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}) .\end{aligned}$$



Exemple 1.5.12

Montrons que

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) \quad (1.5.3)$$

quel que soit θ .

Si nous substituons θ_1 et θ_2 par θ dans la formule d'addition pour le cosinus, nous obtenons

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) .$$

Puisque $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, il découle de l'équation ci-dessus que

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 . \quad (1.5.4)$$

D'où

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) .$$



Il existe une formule pour $\sin^2(\theta)$ qui est semblable à celle donnée en (1.5.3). La proposition suivante inclut ces deux formules.

Proposition 1.5.13

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) \quad \text{et} \quad \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta)) .$$

La première formule est la **formule de l'angle double pour le cosinus** alors que la deuxième formule est la **formule de l'angle double pour le sinus**.

Nous laissons au lecteur la tâche de vérifier la formule de l'angle double pour le sinus comme nous l'avons fait pour la formule de l'angle double pour le cosinus.

Remarque 1.5.14

Les deux formules données à la proposition (1.5.13) vont s'avérer très utiles pour évaluer certaines intégrales au chapitre 6. 

Pour terminer, mentionnons deux identités trigonométriques qui font appel à la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante. Si nous divisons l'identité $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ tour à tour par $\cos^2(\theta)$ et par $\sin^2(\theta)$, nous obtenons les deux identités suivantes.

Proposition 1.5.15

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) \quad \text{pour } \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ pour } n \in \mathbb{Z} .$$

$$\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta) \quad \text{pour } \theta \neq n\pi \text{ pour } n \in \mathbb{Z} .$$

1.5.2 Graphes des fonctions trigonométriques

Le cosinus et le sinus sont deux fonctions définies pour tous les nombres réels. Les graphes de ces fonctions sont donnés à la figure 1.18.

Nous déduisons à partir de leurs définitions que

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$$

quel que soit l'angle θ . Ainsi,

$$\text{Dom } \cos = \text{Dom } \sin = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{Im } \cos = \text{Im } \sin = \{x : -1 \leq x \leq 1\} .$$

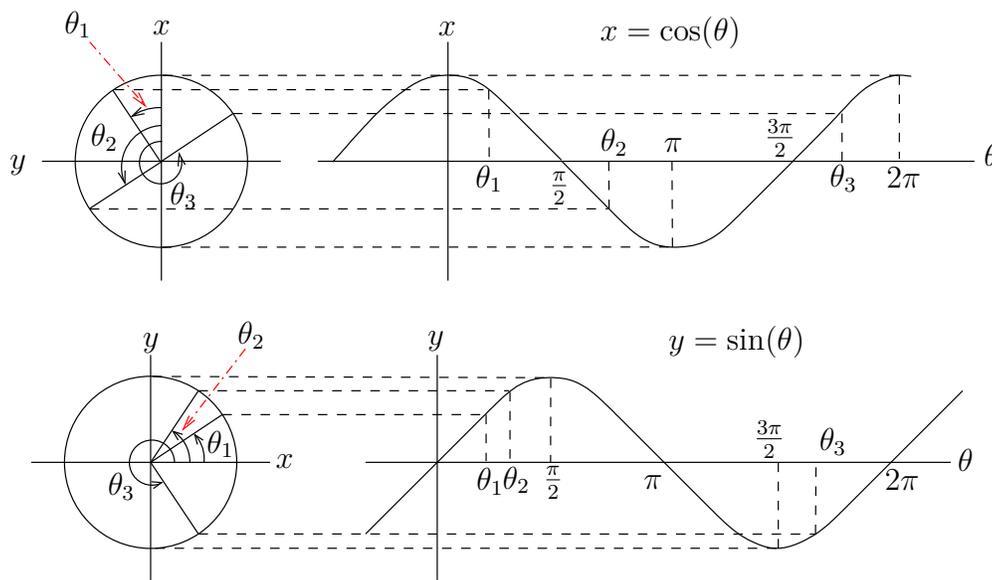


FIGURE 1.18 – Graphes de $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$

Puisque $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$ pour tout θ , le graphe du cosinus est une translation par $\pi/2$ vers le gauche du graphe du sinus.

La tangente est une fonction qui n'est pas définie pour tous les angles. Le graphe de la tangente est donné à la figure 1.19. Nous avons que

$$\text{Dom } \tan = \left\{ \theta : \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Im } \tan = \mathbb{R} .$$

De plus, $\tan(\theta) = \tan(\theta + \pi)$ quel que soit $\theta \neq n\pi + \pi/2$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La tangente est donc une fonction **périodique** de **période** π .

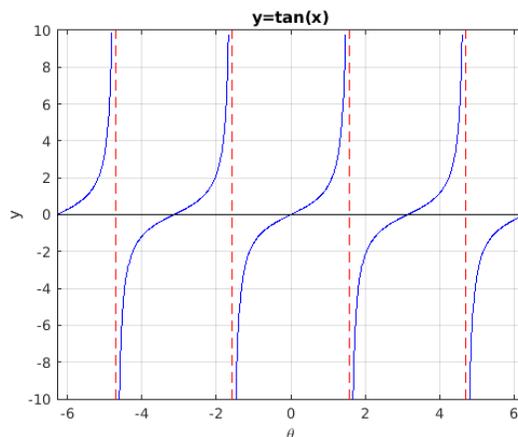


FIGURE 1.19 – Graphe de $y = \tan(\theta)$

Le graphe de la cotangente, le graphe de la sécante et le graphe de la cosécante sont donnés à la figure 1.20. Nous avons que

$$\text{Dom cot} = \{\theta : \theta \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \text{Im cot} = \mathbb{R},$$

$$\text{Dom sec} = \left\{ \theta : \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Im sec} = \{y : |y| \geq 1\},$$

et

$$\text{Dom csc} = \{\theta : \theta \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \text{Im csc} = \{y : |y| \geq 1\}.$$

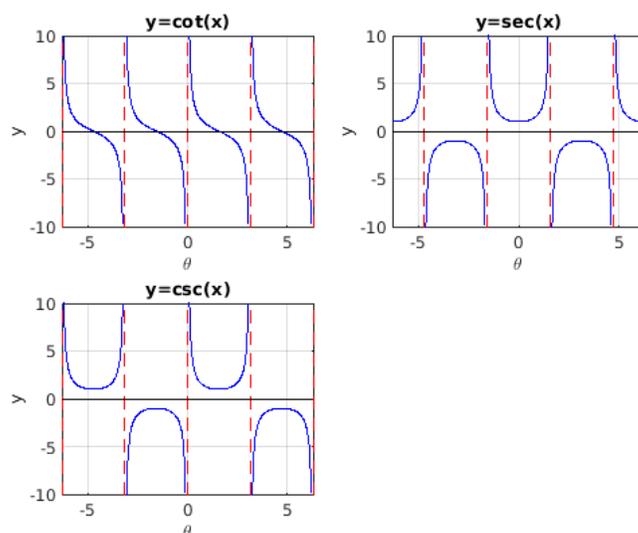
Comme la tangente, la cotangente est une fonction **périodique** de **période** π . La sécante et la cosécante sont des fonctions **périodiques** de **période** 2π .

Définition 1.5.16

Une **fonctions sinusoïdales** est une fonctions de la forme

$$y = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(x - X)\right) \quad (1.5.5)$$

où M , A , P et X sont des constantes. La signification graphique de ces constantes est donnée à la figure 1.21. La constante M est la **moyenne** de la fonction sinusoïdale, la constante A est l'**amplitude** de l'onde décrite par la fonction sinusoïdale, la constante P est la **période** et la constante X est la **phase** de l'onde décrite par la fonction sinusoïdale.

FIGURE 1.20 – Graphe de $y = \cot(\theta)$, $y = \sec(\theta)$, et $y = \csc(\theta)$

Dans certains livres, le sinus est utilisé pour définir les fonctions sinusoidales. C'est-à-dire que

$$y = M + A \sin\left(\frac{2\pi}{P}(x - X)\right).$$

En changeant seulement la phase, nous pouvons produire avec cette formule n'importe laquelle des ondes données par la formule (1.5.5).

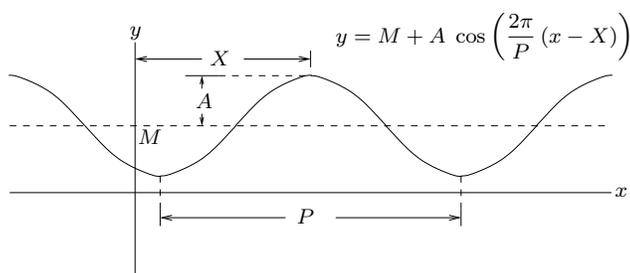


FIGURE 1.21 – Graphe d'une fonction sinusoidale

Exemple 1.5.17

Traçons le graphe de la fonction $y = f(x) = 3 + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{7}(x + 4)\right)$.

La moyenne de cette fonction sinusoidale est $M = 3$, son amplitude est $A = 5$, sa période est $P = 7$ et sa phase est $X = -4$. Le graphe d'une période de cette fonction est donné à la figure 1.22. ♣

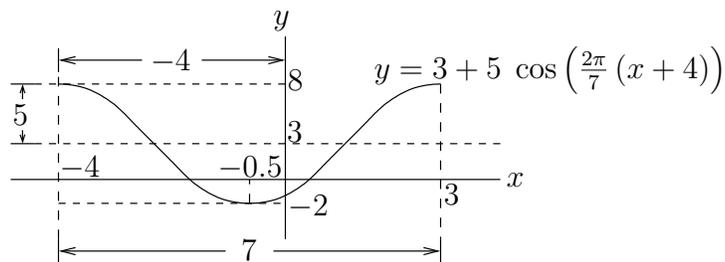


FIGURE 1.22 – Graphe de $y = f(x) = 3 + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{7}(x + 4)\right)$

Exemple 1.5.18

La température moyenne du corps pour une période de 24 heures est de 36.8°C avec un minimum de 36.5°C à 2h00 et un maximum de 37.1°C à 14h00. Supposons que la température T du corps en fonction du temps t soit décrite par une fonction sinusoïdale. Quelle est cette fonction ?

Dans la formule (1.5.5), la moyenne est $M = 36.8$, l'amplitude est $A = (37.1 - 36.5)/2 = 0.3$, la phase est $X = 14$ heures et la période est naturellement $P = 24$ heures. Nous trouvons donc

$$T = 36.8 + 0.3 \cos\left(\frac{2\pi}{24}(t - 14)\right)$$

où T est la température en degrés centigrades et t est le temps en heures. ♣

1.5.3 Fonctions trigonométriques inverses

Le graphe de la fonction sinus est donné à la figure 1.23. Il est clair par le test des droites horizontales que cette fonction n'est pas injective et donc n'a pas d'inverse.

Mais! Il y a bien une fonction \sin^{-1} sur les calculatrices. Quelle est cette fonction ?

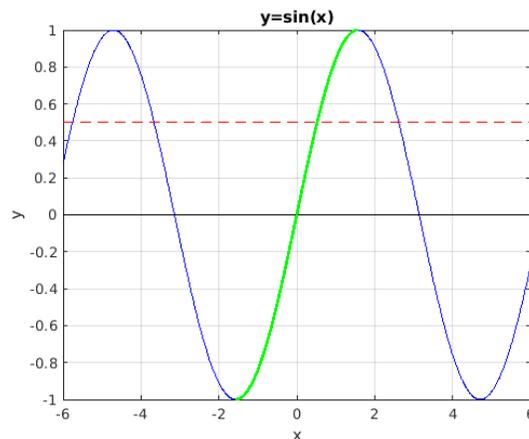
Nous définissons la fonction inverse pour le sinus en restreignant le domaine du sinus à l'intervalle $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. C'est la courbe tracée en vert que nous retrouvons sur le graphe à la figure 1.23.

Définition 1.5.19

Sur l'intervalle $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, la fonction sin est bien injective et nous pouvons définir son inverse \sin^{-1} par la formule standard

$$x = \sin^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = \sin(x)$$

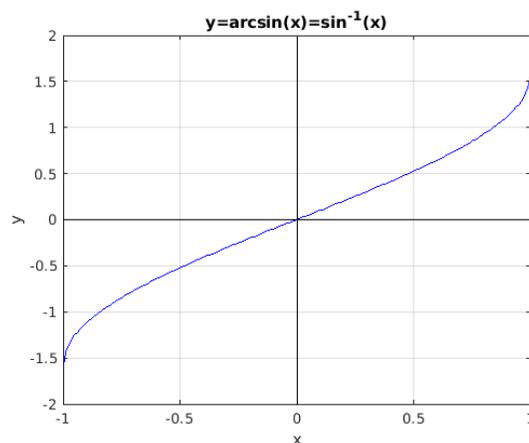
pour $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ et $-1 \leq y \leq 1$. La fonction \sin^{-1} est appelée l'**arcsinus** et est aussi dénotée \arcsin ; c'est-à-dire, $\sin^{-1}(x) \equiv \arcsin(x)$.

FIGURE 1.23 – Graphe de $y = \sin(x)$ pour $-6 \leq x \leq 6$

En d'autres mots, $x = \sin^{-1}(y)$ est l'angle en radians entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ qu'il faut pour que $\sin(x) = y$.

La définition de \sin^{-1} explique pourquoi cette fonction sur votre calculatrice n'acceptera jamais d'arguments plus petits que -1 et plus grands que 1 .

Nous retrouvons à la figure 1.24 le graphe de la fonction \sin^{-1} . Le lecteur peut vérifier que le graphe de \sin^{-1} est bien obtenu d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$ du graphe de \sin .

FIGURE 1.24 – Graphe de $y = \sin^{-1}(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$

De même, nous pouvons définir l'inverse pour le cosinus.

Définition 1.5.20

Sur l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$, la fonction \cos est bien injective et nous pouvons définir son inverse \cos^{-1} par la formule standard

$$x = \cos^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = \cos(x)$$

pour $0 \leq x \leq \pi$ et $-1 \leq y \leq 1$. La fonction \cos^{-1} est appelée **arccosinus** et est aussi dénotée \arccos ; c'est-à-dire, $\cos^{-1}(x) \equiv \arccos(x)$.

Finalement, nous pouvons définir l'inverse pour la tangente.

Définition 1.5.21

Sur l'intervalle $-\pi/2 < x < \pi/2$, la fonction \tan est bien injective et nous pouvons définir son inverse \tan^{-1} par la formule standard

$$x = \tan^{-1}(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = \tan(x)$$

pour $-\pi/2 < x < \pi/2$ et y réels. La fonction \tan^{-1} est appelée l'**arctangente** et est aussi dénotée \arctan ; c'est-à-dire, $\tan^{-1}(x) \equiv \arctan(x)$.

Le graphe de \cos^{-1} est donné à la figure 1.25 et celui de \tan^{-1} est donné à la figure 1.26.

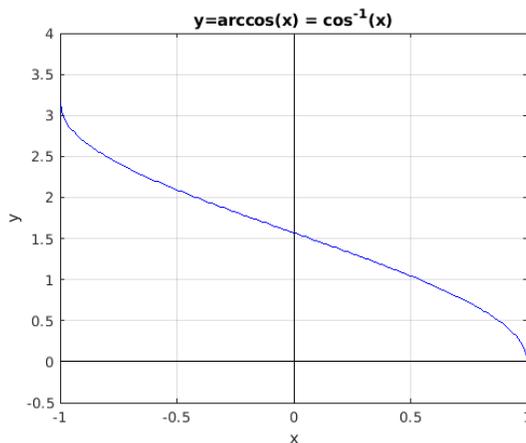


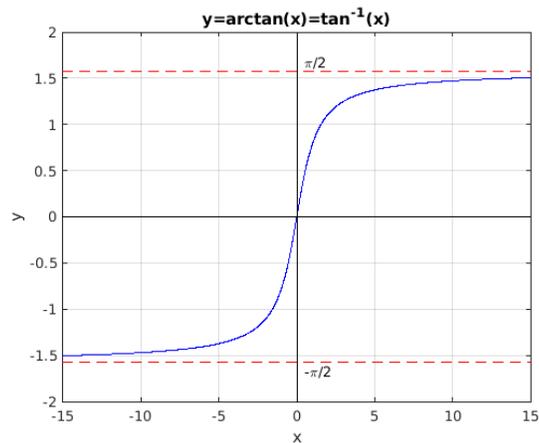
FIGURE 1.25 – Graphe de $y = \cos^{-1}(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$

Remarque 1.5.22

Remarquons que $\sin^{-1} \neq \sin^{-1}$

Il faut bien comprendre que \sin^{-1} sur la calculatrice n'est pas égale à $(\sin(x))^{-1} = 1/\sin(x)$. Par exemple,

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 0.52359877559830\dots$$

FIGURE 1.26 – Graphe de $y = \tan^{-1}(x)$ pour x réels

alors que

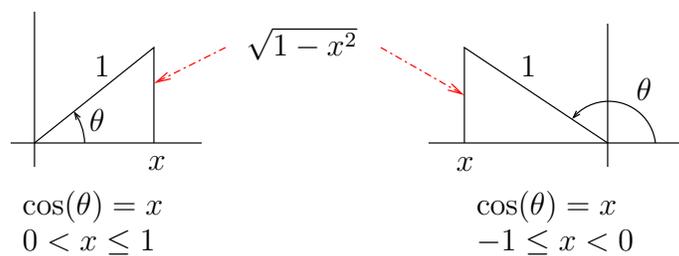
$$\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\sin(1/2)} = 2.08582964293349\dots$$



Exemple 1.5.23

Montrons que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour $-1 \leq x \leq 1$.

Soit $\theta = \arccos(x)$ où $0 \leq \theta \leq \pi$. Nous déduisons des deux dessins à la figure 1.27 que $\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$. ♣

FIGURE 1.27 – Représentation graphique de $\cos(\theta) = x$ pour $-1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi$.

1.6 Fonctions exponentielles et logarithmiques

1.6.1 Fonctions exponentielles

Le but de cette section est de donner un sens à l'expression b^p pour le plus grand ensemble possible de **base** b et d'**exposant** p . Nous résumons ci-dessous ce qui est connu au sujet de l'exponentiel d'un nombre.

- L'expression b^p n'est pas définie pour $b = p = 0$.
- $b^p = 1$ pour $b > 0$ et $p = 0$. Par exemple, $\pi^0 = 1$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ et p est un entier positif,

$$b^p = \underbrace{b \times b \times \dots \times b}_{p \text{ fois}} .$$

Par exemple, $\pi^3 = \pi \times \pi \times \pi$.

- Si $b \in \mathbb{R}$ et $p = 1/n$ où n est un nombre impair, $y = b^p$ est le nombre réel tel que $y^n = b$. Par exemple, $(-8)^{1/3} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.
- Si $b \geq 0$ et $p = 1/n$ où n est un nombre pair, $y = b^p$ est le **nombre réel positif** tel que $y^n = b$. Par exemple, $16^{1/4} = 2$ car $2^4 = 16$.
- Si $p = m/n$, nous calculons $(b^{1/n})^m$ s'il est possible de calculer $b^{1/n}$ en premier. Il est toujours avantageux de simplifier la fraction m/n avant de faire les calculs. Par exemple, $(-8)^{2/3} = 4$ car $(-8)^{1/3} = -2$ et $((-8)^{1/3})^2 = (-2)^2 = 4$. De même, $16^{3/4} = 8$ car $16^{1/4} = 2$ et $(16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$.
- Si $p < 0$, nous définissons b^p comme étant le nombre $1/b^{-p}$ si b^{-p} est définie. Par exemple, $\pi^{-3} = 1/\pi^3 = 1/(\pi \times \pi \times \pi)$.

Aucune définition n'est donnée pour b^p lorsque b est un nombre réel positif et p est un exposant réel quelconque. Pour calculer 4^2 , il suffit de multiplier 4 par lui-même. Pour calculer $4^{1/2}$, il suffit de trouver le nombre positif y tel que $y^2 = 4$; c'est-à-dire, $y = 2$ dans le cas présent. Mais que devons-nous faire pour obtenir la valeur de 4^π ? Nous pouvons utiliser la définition suivante.

Définition 1.6.1

Pour $b > 1$ et $p \in \mathbb{R}$, nous définissons le **nombre exponentiel** b^p comme étant le plus petit nombre réel¹ M tel que $M \geq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \leq p$.

Pour $0 < b < 1$ et $p \in \mathbb{R}$, nous définissons le **nombre exponentiel** b^p comme étant le plus grand nombre réel M tel que $M \leq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \leq p$.

Naturellement, si $b = 1$, nous obtenons $b^p = 1$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

Ainsi, 4^π est le plus petit nombre réel M tel que $4^r \leq M$ pour tout nombre rationnel $r \leq \pi$. De même, $4^2 = 16$ car $M = 16$ est le plus petit nombre tel que $4^r \leq M$ pour tout nombre rationnel $r \leq 2$; le nombre 2 est une valeur possible pour r .

1. **L'Axiome de complétude** des nombres réels dit que tout ensemble non vide et borné supérieurement possède une plus petite borne supérieure.

La définition que nous venons de donner pour le nombre exponentiel b^p avec $b \in]0, \infty[$ et $p \in \mathbb{R}$ n'est pas facile à utiliser. Il faut généralement beaucoup de travail pour évaluer un nombre exponentiel avec cette définition. Pour l'instant, cette définition sera suffisante pour nos besoins.

En fait, cette définition d'un nombre exponentiel manque de rigueur. Il faudrait démontrer que cette définition est consistante. Par exemple, est-ce que cette définition de b^p pour $b > 1$ est équivalente à « b^p est le plus grand nombre réel M tel que $M \leq b^r$ pour tout nombre rationnel $r \geq p$ » ? Comme nous verrons prochainement, cela revient à exiger que les limites à droite et à gauche de b^r soient égales à $r = p$. Il y a bien d'autres questions de ce genre que nous pourrions poser au sujet de cette définition. De plus, il est difficile de démontrer les propriétés des exposants avec cette définition.

Nous donnerons à la section 8.5 une définition équivalente du nombre exponentiel b^p , $b \in]0, \infty[$ et $p \in \mathbb{R}$, qui sera plus facile à manipuler que celle ci-dessus. Avec la définition présentée à la section 8.5, il est facile de déduire les propriétés des exposants. De plus, les calculatrices et ordinateurs utilisent cette définition (avec quelques subtilités additionnelles) pour évaluer les nombres exponentiels.

Pour l'instant, la valeur d'un nombre exponentiel comme 4^π sera estimée par 4^r pour des valeurs rationnelles de r très près de π et inférieures à π . Quelle valeur de r , proche de π , doit-on utiliser pour obtenir une bonne approximation de 4^π ? Cette question ne sera pas abordée.

Définition 1.6.2

Si b est un nombre réel positif, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ définie par $f(x) = b^x$ pour tout x réel est appelée une **fonction exponentielle**.

Les fonctions exponentielles satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 1.6.3

Si a et b sont des nombres réels positifs et x et y sont des nombres réels, alors

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad a^x b^x = (ab)^x \quad \text{et} \quad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}.$$

Nous retrouvons les graphes de quelques fonctions exponentielles à la figure 1.28.

Si f est la fonction définie par $f(x) = b^x$ pour tout x , nous déduisons des graphes à la figure 1.28 que le domaine de f est \mathbb{R} et que son image est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. De plus, f est une fonction croissante pour $b > 1$ et décroissante pour $0 < b < 1$.

1.6.2 Fonctions logarithmiques

La fonction logarithmique n'est rien d'autre que la fonction inverse de $f(x) = b^x$ où b , la **base**, est un nombre réel positif. Si nous appliquons la définition de l'inverse d'une fonction

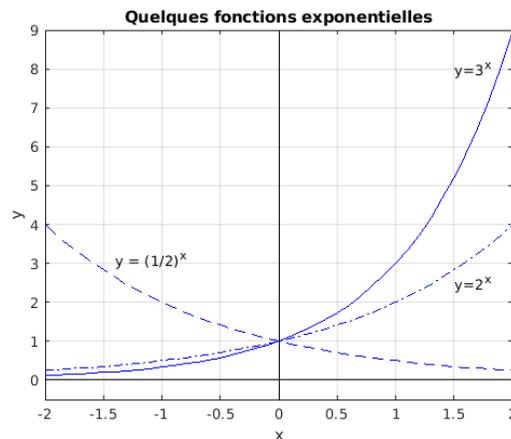


FIGURE 1.28 – Graphes de $y = 3^x$, $y = 2^x$ et $y = (1/2)^x$

à la fonction b^y , nous obtenons :

Définition 1.6.4

La **fonction logarithmique** \log_b est définie par

$$y = \log_b(x) \quad \text{si et seulement si} \quad b^y = x$$

pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

Nous donnons à la figure 1.29 le graphe des fonctions $f(x) = b^x$ et $f^{-1}(x) = \log_b(x)$ pour $b = 3$. Puisque le domaine de $f(x) = b^x$ est \mathbb{R} et son image est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, nous obtenons bien que le domaine de \log_b est $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ et son image est \mathbb{R} .

Puisque $y = \log_b(x)$ est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir x (i.e. pour que $b^y = x$), il est alors simple de vérifier à partir de cet énoncé que les fonctions logarithmiques satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 1.6.5

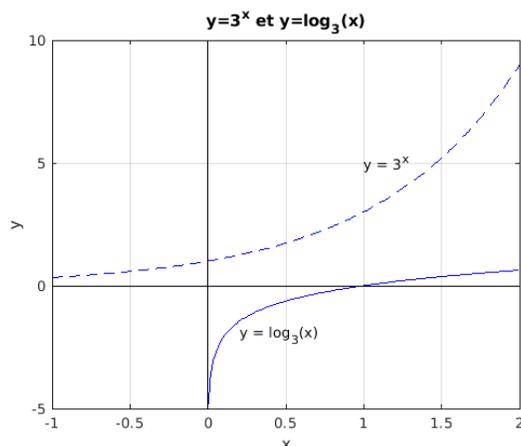
Si a , b , x et y sont des nombres positifs réels et p est un nombre réel, alors

$$\log_b(x^p) = p \log_b(x) , \tag{1.6.1}$$

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \tag{1.6.2}$$

et

$$\frac{\log_a(x)}{\log_a(y)} = \log_y(x) . \tag{1.6.3}$$

FIGURE 1.29 – Graphes de $y = 3^x$ (tirets) et de $y = \log_3(x)$ (ligne pleine)**Exemple 1.6.6**

Si b , x et y sont des nombres positifs réels, alors

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

car

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(xy^{-1}) = \log_b(x) + \log_b(y^{-1}) = \log_b(x) - \log_b(y),$$

où la deuxième égalité provient de (1.6.2) et la troisième égalité provient de (1.6.1). ♣

Exemple 1.6.7

Démontrons à partir de la définition du logarithme que $\log_b(x^p) = p \log_b(x)$.

Si $y = \log_b(x^p)$ alors $b^y = x^p$ par définition du logarithme. Donc $b^{y/p} = x$. Une deuxième utilisation de la définition du logarithme donne $\log_b(x) = y/p$. Ainsi, si nous résolvons cette dernière équation pour y , nous trouvons $p \log_b(x) = y = \log_b(x^p)$. ♣

Exemple 1.6.8

Démontrons que $\frac{\log_a(x)}{\log_a(y)} = \log_y(x)$ à partir de la définition du logarithme.

Si $v = \log_a(x)$ et $w = \log_a(y)$, alors $a^v = x$ et $a^w = y$ par définition du logarithme. Nous obtenons de $a^w = y$ que $a = y^{1/w}$. Si nous substituons cette expression pour a dans $a^v = x$, nous trouvons $x = \left(y^{1/w}\right)^v = y^{v/w}$. Une deuxième utilisation de la définition du logarithme donne $\log_y(x) = \frac{v}{w} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$ par définition de v et w . ♣

La base la plus importante pour les fonctions exponentielles et logarithmiques est donnée par le **nombre d'Euler** $e = 2.718281828459\dots$ que nous définirons correctement à la section 2.3. Comme pour π , ce nombre se retrouve sur toutes les calculatrices scientifiques car il joue un rôle fondamental en mathématique. En raison de son importance, nous donnons un nom spécial à la fonction logarithmique en base e .

Définition 1.6.9

Le **logarithme naturel** ou **logarithme népérien** est défini par $\ln(x) = \log_e(x)$ pour $x > 0$.

La définition précédente est équivalente à

$$y = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x .$$

La fonction $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est l'inverse de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.

Exemple 1.6.10

Démontrons à partir de la définition du logarithme que $\log_b(x^p) = p \log_b(x)$.

Si $y = \log_b(x^p)$ alors $b^y = x^p$ par définition du logarithme. Donc $b^{y/p} = x$. Une deuxième utilisation de la définition du logarithme donne $\log_b(x) = y/p$. Ainsi, si nous résolvons cette dernière équation pour y , nous trouvons $p \log_b(x) = y = \log_b(x^p)$. ♣

Exemple 1.6.11

Un modèle fréquemment utilisé pour décrire une population est de la forme $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$ où $P(t)$ est le nombre d'individus au temps t , P_0 est le nombre initial d'individus, et α est le « taux de croissance relatif ». Le taux de croissance relatif est défini comme étant le taux de croissance (instantané) au temps t divisé par le nombre total d'individus au temps t . Dans ce modèle, nous supposons que ce rapport est constant et égale à α . Nous justifierons ce modèle au chapitre 9 sur les équations différentielles.

Déterminons le temps nécessaire pour que la population soit 2.5 plus grande si $\alpha = 1.5$. Supposons que le temps soit mesuré en heures.

Il faut donc trouver t tel que $P(t) = 2.5P_0$. C'est-à-dire, il faut trouver t tel que $P_0 e^{1.5t} = 2.5P_0$. Ainsi,

$$P_0 e^{1.5t} = 2.5P_0 \Rightarrow e^{1.5t} = 2.5 \Rightarrow 1.5t = \ln(e^{1.5t}) = \ln(2.5) \Rightarrow t = \frac{\ln(2.5)}{1.5} \approx 0.61086 .$$

Il faut donc approximativement 0.61086 heure pour que la population soit 2.5 fois plus grande.

Si la population prend 3 jours pour être 2.5 plus grande, quel est le taux de croissance relatif?

Puisque $P(3) = 2.5P_0$, nous avons

$$P_0 e^{3\alpha} = 2.5P_0 \Rightarrow e^{3\alpha} = 2.5 \Rightarrow 3\alpha = \ln(e^{3\alpha}) = \ln(2.5) \Rightarrow \alpha = \frac{\ln(2.5)}{3} \approx 0.3054 .$$

Quelle est le nombre initial d'individus si nous avons $\alpha = 0.5$ et 10^6 individus après 10 jours ?

Puisque $10^6 = P(10) = P_0 e^{0.5 \times 10}$, nous obtenons $P_0 = \frac{10^6}{e^5} \approx 6738$ individus. ♣

1.7 Exercices

1.7.1 Algèbre

Question 1.1

Simplifiez si possible les expressions suivantes.

- a) $(3^4)^{0.5}$ b) $2^{2^3} \times 2^{2^2}$ c) $\log_3(1)$
 d) $\log_{10}(5) + \log_{10}(20)$ e) $\log_{10}(500) - \log_{10}(50)$ f) $\log_{42.3}(42.3^7)$

Question 1.2

Simplifiez si possible les expressions suivantes.

- a) $\frac{(x^4 y^{1/4})^{1/2}}{y^{1/2}}$ b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x+1}{x-3} + \frac{-9x+21}{x^2-5x+6}$

Question 1.3

Utilisez la division de polynômes pour écrire $\frac{x^3 + 2x^2 + x + 3}{x + 2}$ sous la forme $p(x) + r(x)/q(x)$ où le degré de $r(x)$ est plus petite que le degré de $q(x)$.

Question 1.4

Factorisez les polynômes suivants.

- a) $x^2 + x - 6$ b) $3x^2 - 5x - 2$ c) $x^{3/2} + x^{1/2} - 12x^{-1/2}$

Question 1.5

Cette question fait appel à ce que vous avez appris au secondaire sur les polynôme de degré deux.

- a) Quelles sont les racines du polynôme $x^2 + 2x - 2$?
 b) Tracez la parabole $y = x^2 + 2x - 2$. N'oubliez pas d'indiquer sur votre graphe l'intersection avec les axes. S'il y a une valeur maximale ou minimale, indiquez la sur le graphe.

Question 1.6

Quelle valeur devez-vous donner à c dans le polynôme $4x^2 - 12x + c$ pour que les racines soient égales ?

Question 1.7

Résolvez les équations suivantes.

- a) $7 \times 5^{3x} = 21$ b) $4 \times 3^{-2x+1} = 7^{3x}$ c) $\log_{10}(100^x) = 3$

Question 1.8

Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $e^x + 2e^{-x} = 3$?

Question 1.9

Résolvez les équations suivantes.

a) $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x}$

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-1} = 4$

c) $\ln(x-3) + \ln(x-5) = \ln(2x-6)$

d) $|x-2| = 5$

e) $|x-2| = |2x-5|$

f) $|x^2-4| = 4$

g) $\ln(2) - \ln(x) = \ln(3-x)$

Question 1.10

Résolvez les inégalités suivantes.

a) $5 - \frac{6}{x} < 4$

b) $x^2 - 4x + 3 > 0$

c) $\frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-3}$

d) $\frac{x^2}{x+2} < 1$

e) $\frac{x}{x-3} < \frac{-6}{x+1}$

f) $|x-2| < 5$

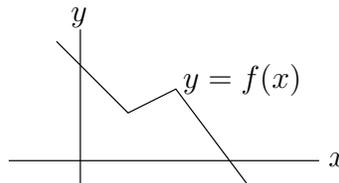
g) $|x^2 - 2x - 5| < |x-1|$

1.7.2 Fonctions**Question 1.11**

Quel est l'image de la fonction $f(x) = 3 + 2x - x^2$?

Question 1.12

Une fonction f est définie par le graphe ci-dessous. Déterminez si f est injective.

**Question 1.13**

Déterminez si les fonctions suivantes ont un inverse. Si une fonction a un inverse, trouvez cet inverse. Bien indiquer le domaine et l'image de la fonction et de son inverse.

a) $g(x) = 5^{x^3}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

c) $h(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{10}$

d) $y = f(x) = \left(\frac{2x+7}{3}\right)^{-1/2}$

Question 1.14

Quelle est la forme la plus simple pour $(f \circ g)(x)$ où $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2+1}$?

Question 1.15

Écrivez les fonctions suivantes comme la composition de fonctions simples. Pour nous, les fonctions simples sont $f(x) = x^a$, a^x , $\log_b(x)$, ..., et le produit et la somme de telles fonctions.

$$\text{a) } f(x) = \frac{5}{1 + 5^x}$$

$$\text{b) } h(t) = (1 - t^2)^{-4}$$

Question 1.16

Écrivez la fonction $g(x) = \cos(\sqrt{1+x^2})$ comme la composition de fonctions simples. Pour nous, les fonctions simples sont $f(x) = x^a$, a^x , $\log_b(x)$, $\cos(x)$, ..., et le produit et la somme de telles fonctions.

1.7.3 Trigonométrie

Question 1.17

Vérifiez les identités trigonométriques suivantes pour $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ et π .

$$\text{a) } \cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta).$$

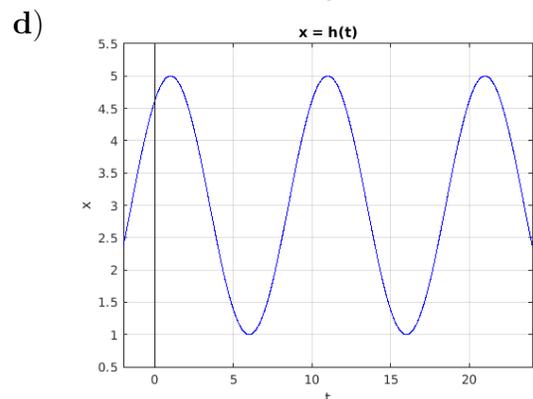
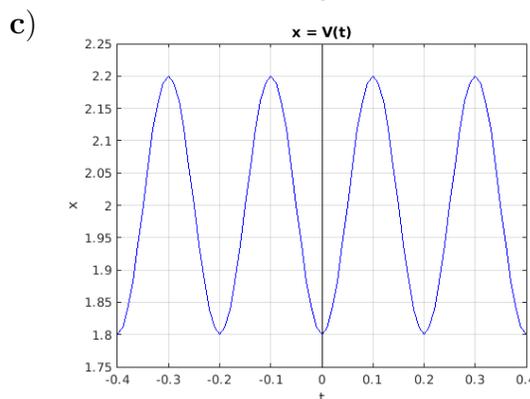
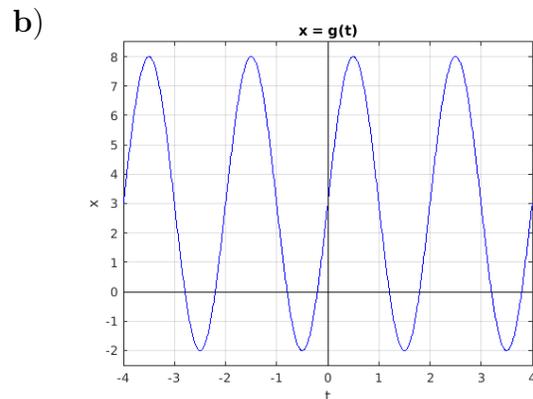
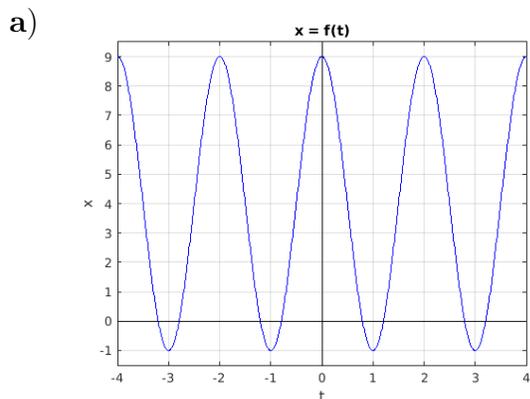
$$\text{b) } \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta).$$

Question 1.18

Si $\cos(\theta) = 1/2$, quelles sont les valeurs possibles pour $\sin(\theta)$?

Question 1.19

Pour chacun des graphes ci-dessous, donnez la moyenne, l'amplitude, la période et la phase de la fonction sinusoidale qui possède ce graphe. Puis, écrivez la fonction sinusoidale dans chacun des cas.



est linéaire (de la forme $mx + b$) et l'autre est exponentielle (de la forme pb^x). Trouvez une formule pour chacune des fonctions.

x	2	4	6	8
f(x)	0.75	0.1875	0.046875	0.011719
g(x)	5.7	10.3	14.9	19.5

Question 1.27

Le poids S en kilogrammes d'un individu au temps t en jours est donné par la formule $S(t) = S_0 10^{\alpha t}$ où le poids initial est $S_0 = S(0) = 2.34$ kg et le taux de croissance par rapport au poids de l'individu est $\alpha = 0.693$. Combien de temps faut-il pour que le poids de l'individu double? Pour que le poids soit 10 fois plus grand?

Question 1.28

La population d'un territoire double à tous les 24 ans. Si la population initiale est de 500 individus (par km^2), quel sera le nombre d'individus (par km^2) après 12 années? Il faut se rappeler que le nombre d'individus dans la population au temps t en années est donné par une formule de la forme $p(t) = p_0 e^{\alpha t}$ où p_0 est le nombre initial d'individus et α est une constante représentant le taux de croissance par rapport à la taille de la population.

Suggestion : vous pouvez déterminer α à l'aide du temps nécessaire pour que la population double.

Question 1.29

Le volume (en cm^3) d'un organisme au temps t (en seconde) est donné par l'expression $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$. Quelles sont les unités de α ? Si $V_0 = 2$ et $\alpha = 0.1$, combien faut-il de temps pour que le volume double? Pour qu'il quadruple?

Question 1.30

La quantité de Carbone-14 (en atomes) que nous retrouvons dans les os d'un animal, t années après son décès, est donnée par $Q(t) = Q_0 e^{-0.000122 t}$ où Q_0 est la quantité de carbone-14 au moment du décès. Quelle est la demie-vie du carbone-14?

Question 1.31

Si une population a une demie-vie de 43 ans et le nombre d'individus au départ est de 1600 (par m^2), combien de temps faut-il pour que la population soit de 200 individus (par m^2)? Trouvez une formule pour le nombre $P(t)$ d'individus (par m^2) au temps t dans cette population. Combien faut-il de temps pour que la population soit de 437 individus (par m^2)?

Question 1.32

Tracez le graphe de la fonction $g(t) = e^t \cos(2\pi t)$ pour $0 < t < 3$. Il n'est pas nécessaire que le graphe soit très précis mais il doit bien décrire le comportement qualitatif de la fonction.

Question 1.33

Tracez le graphe de la fonction $W(t) = e^{-t} \cos(2\pi t)$ pour $t \geq 0$. Il n'est pas nécessaire que le graphe soit très précis mais il doit bien décrire le comportement qualitatif de la fonction.



Suites et séries | 2

Au chapitre précédent, nous avons introduit les fonctions ; les objets sur lesquels nous travaillerons tout au long de cet ouvrage. Ce ne sont pas toutes les fonctions qui nous intéressent. Par exemple, nous sommes intéressé aux fonctions qui peuvent représenter des phénomènes naturels qui évoluent de façon continue dans le temps et qui ont des comportements prévisibles. Les fonctions qui représentent ce genre de phénomènes sont généralement continues ou même différentiables. Pour définir ces propriétés, nous aurons besoin des concepts de limite d'une suite et de limite d'une fonction en un point. Nous étudions la limite d'une suite dans ce chapitre alors que la limite d'une fonction en un point sera présentée au prochain chapitre.

Certaines fonctions ne peuvent être définies de façon simple comme, par exemple, à l'aide d'une expression algébrique. Nous aurons besoin du concept de séries pour définir ces fonctions. C'est le cas en particulier de la fonction e^x . Ce sont ces concepts que nous présentons dans la deuxième partie du chapitre.

2.1 Suites

Définition 2.1.1

Une **suite** est un ensemble infini et ordonné de nombres. Les nombres qui forment une suite sont appelés les **termes** de la suite. Par exemple, $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ représente une suite de nombres où a_1 est le **premier terme** de la suite, a_2 est le **deuxième terme** de la suite, ainsi de suite.

Les termes de la suite sont généralement donnés par une fonction $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; c'est-à-dire, $a_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^+$. La suite est alors dénoté $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Exemple 2.1.2

La suite $\left\{ \frac{n}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ est la suite formée des termes

$$\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$$

alors que la suite $\left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ est la suite formée des termes

$$\left\{ -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \right\} .$$



Exemple 2.1.3

La procédure pour générer certaines suites demande plus qu'une simple fonction $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. C'est le cas de la **suite de Fibonacci**. Après avoir choisis a_1 et a_2 , les autres termes de la suites sont générés par $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pour $n = 2, 3, 4, \dots$. En d'autres mots, chaque terme de la suite est le résultat de la somme des deux termes qui le précède.

La suite de Fibonacci la plus classique est lorsque $a_1 = a_2 = 1$. Nous obtenons la suite

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\} .$$



Nous sommes souvent intéressés par le comportement asymptotique des termes de la suite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 2.1.4

Nous disons que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** (ou **tend**) vers un nombre L lorsque n tend vers l'infini si, pour chaque valeur $\epsilon > 0$, il existe un entier N (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{si} \quad n \geq N .$$

En d'autre mots, Quel que soit le nombre ϵ qui est donné, nous avons que la distance entre L et a_n est plus petite que ϵ à partir d'un indice N . Nous écrivons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L .$$

Le nombre L est appelé la **limite** de la suite.

S'il n'existe pas de valeur L qui satisfait la définition ci-dessus, nous disons que la suite **diverge**.

Exemple 2.1.5

Il est intuitivement claire que la suite

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

tend vers 0. Nous pouvons vérifier que la définition de limite est satisfaite par $L = 0$. En effet, pour $\epsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $N > 1/\epsilon$ ¹ pour obtenir $|a_n - 0| = 1/n \leq 1/N < \epsilon$ pour $n \geq N$. 

1. L'existence de N est une conséquence du principe d'Archimède

Exemple 2.1.6 

La suite

$$\left\{ \frac{n}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots \right\}$$

tend vers 1.

En effet, pour ϵ donné, il suffit de prendre $N > 2(1-\epsilon)/\epsilon$ pour obtenir $|a_n - 1| < \epsilon$ lorsque $n \geq N$. En effet,

$$n > \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon} \Rightarrow n\epsilon > 2 - 2\epsilon \Rightarrow \epsilon(n+2) > 2 \Rightarrow \epsilon > \frac{2}{n+2} = 1 - \frac{n}{n+2} = |a_n - 1|$$

Par exemple, si $\epsilon = 10^{-5}$, il faut prendre $N > 2(1 - 10^{-5})/10^{-5} = 199998$. 

Remarque 2.1.7

- Nous utilisons aussi l'expression « $a_n \rightarrow L$ lorsque $n \rightarrow \infty$ » pour dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.
- Il est souvent très utile d'explorer numériquement le comportement des suites $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; c'est-à-dire, d'évaluer a_n pour de très grandes valeurs de n dans l'espoir d'obtenir des termes qui approchent une constante L quelconque. Cela ne démontre pas que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers L mais cela nous permet de conjecturer la limite de la suite. Il faut vérifier que la définition de limite ci-dessus est satisfaite pour pouvoir dire que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers la constante L obtenue numériquement.
- La définition de limite ci-dessus revient à dire que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers L si et seulement si la suite $\{|a_n - L|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Nous écrivons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0.$$

En d'autres mots, la distance $|a_n - L|$ entre a_n et L approche 0 lorsque n augmente. 

La limite de suites possède les propriétés suivantes qui permettront d'évaluer facilement les limites de certaines suites.

Théorème 2.1.8

Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite qui tend vers L_a et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite qui tend vers L_b , alors :

1. La suite $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $L_a + L_b$. Nous écrivons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

2. La suite $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $L_a L_b$. Nous écrivons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

3. Si $b_n \neq 0$ pour tout n et $L_b \neq 0$, alors la suite $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $\frac{L_a}{L_b}$. Nous

écrivons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Exemple 2.1.9

Soit c une constante quelconque. Il est facile de voir que la limite de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = c$ pour tout n est c . Nous pouvons utiliser cette information pour trouver la limite de la suite $\left\{\frac{5n+2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. En effet, grâce au théorème précédent, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + 2 \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 5 + 2 \times 0 = 5.$$



Théorème 2.1.10 (des gendarmes ou sandwich)

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ deux suites qui tendent vers L . Si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite telle que $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout n , alors la suite $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend aussi vers L .

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendent vers L , il existe $N \geq 0$ tel que $|a_n - L| < \epsilon$ et $|c_n - L| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi,

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon$$

pour $n \geq N$. C'est-à-dire, $|b_n - L| < \epsilon$ pour $n \geq N$. 

Exemple 2.1.11

Montrons que la limite de la suite $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $b_n = n^{1/n}$ est 1.

Il est clair que la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = 1$ pour tout n satisfait $a_n \leq b_n$ pour tout n . De plus, la suite $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $c_n = 1 + \sqrt{2/n}$ pour tout n satisfait $b_n \leq c_n$ pour tout n .

Pour démontrer ce dernier énoncé, posons $x_n = b_n - 1$ et notons que

$$n = b_n^n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \dots + x_n^n.$$

Comme c'est une somme de termes positifs, nous obtenons

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Si nous isolons x_n , nous trouvons

$$x_n \leq \sqrt{2/n}, \quad n \geq 1.$$

Ainsi,

$$b_n = 1 + x_n \leq 1 + \sqrt{2/n} = c_n$$

pour tout n .

Nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{2/n}\right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2/n} = 1$$

car nous pouvons facilement montrer à partir de la définition de limite que la suite $\left\{\sqrt{2/n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers 0. Puisque $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \geq 1$, nous obtenons du Théorème des gendarmes que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1. ♣

Le résultat suivant est quelques fois utile.

Théorème 2.1.12

La suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 si et seulement si la suite $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0.

Démonstration

\Rightarrow) Soit $\epsilon > 0$. Puisque que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0, il existe $N > 0$ tel que $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi, il existe $N > 0$ tel que $||a_n| - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, cela implique que $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0.

\Leftarrow) Soit $\epsilon > 0$. Puisque que $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0, il existe $N > 0$ tel que $||a_n| - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi, il existe $N > 0$ tel que $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, cela implique que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. ■

Il est très utile de pouvoir caractériser le comportement des suites lorsque n tend vers l'infini.

Définition 2.1.13

1. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **croissante** si $a_n < a_{n+1}$ pour tout n .
2. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **décroissante** si $a_n > a_{n+1}$ pour tout n .
3. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée supérieurement** s'il existe un nombre réel M tel que $a_n \leq M$ pour tout n . Le nombre M est appelé une **borne supérieure** pour la suite.
4. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée inférieurement** s'il existe un nombre réel m tel que $a_n \geq m$ pour tout n . Le nombre m est appelé une **borne inférieure** pour la suite.
5. Une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est **bornée** si elle est bornée inférieurement et supérieurement.

Le concept de convergence peut aussi être adapté aux suites non bornées.

Définition 2.1.14 

Nous disons qu'une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** (ou **tend**) vers $+\infty$ (plus l'infini) si, pour chaque $M > 0$, il existe N (qui dépend du M donné) tel que $a_n > M$ pour tout $n \geq N$. Nous écrivons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty .$$

Nous disons qu'une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** (ou **tend**) vers $-\infty$ (moins l'infini) si, pour chaque $M < 0$, il existe N (qui dépend du M donné) tel que $a_n < M$ pour tout $n \geq N$. Nous écrivons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty .$$

Exemple 2.1.15 

La suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $a_n = n^2 + 1$ tend vers plus l'infini. En effet, si $M \geq 1$ est un nombre quelconque, il suffit de prendre $N > \sqrt{M-1}$ pour obtenir

$$a_n = n^2 + 1 \geq N^2 + 1 > (\sqrt{M-1})^2 + 1 = M$$

pour tout $n \geq N$. 

Exemple 2.1.16

Le fait qu'une suite ne soit pas bornée n'implique pas qu'elle tende vers plus ou moins l'infini. Par exemple, la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ où

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1/n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

n'est pas bornée car il y a des termes qui sont aussi grands que nous voulons. Par contre, cette suite ne tend pas vers plus l'infini car il est impossible de trouver $N > 0$ tel que $a_n > 1$ pour tout $n \geq N$. Les termes a_n avec n impair et plus grand que 1 sont tous plus petits que 1. 

Les deux propositions suivantes nous donnent la limite de certaines suites que nous retrouvons fréquemment dans les applications.

Proposition 2.1.17

Soit r un nombre réel. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{pour } r > 1 \\ 1 & \text{pour } r = 1 \\ 0 & \text{pour } -1 < r < 1 \end{cases} .$$

La suite $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas pour $r \leq -1$.

Proposition 2.1.18

Soit r un nombre réel. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > 0 \\ 1 & \text{pour } r = 0 \\ \infty & \text{pour } r < 0 \end{cases} .$$

Exemple 2.1.19

Évaluons les limites suivantes.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 4} \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$$

Pour calculer la limite en (a), nous utilisons les théorèmes 2.1.8 et 2.1.18 pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 + 2/n + 4/n^2} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 2/n + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0 . \end{aligned}$$

Pour évaluer la limite en (b), nous utilisons le Théorème des gendarmes. Puisque

$$0 \leq \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

pour tout n , la suite $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $b_n = |\cos(n)/n^2|$ tend vers 0 car les suites $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $a_n = 0$ et $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $c_n = 1/n^2$ tendent vers 0. Puisque la suite $\left\{ \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers

0, il en est de même de la suite $\left\{ \frac{\cos(n)}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ grâce au théorème 2.1.12. Nous déduisons donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0 .$$

**Théorème 2.1.20** 

Toute suite croissante et bornée supérieurement converge. De même, toute suite décroissante et bornée inférieurement converge. Dans le premier cas, la limite est la plus petite borne supérieure² de la suite alors que dans le deuxième cas c'est la plus grande borne inférieure de la suite.

Démonstration 

Nous considérons le cas où $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ est une suite décroissante et bornée inférieurement. La démonstration pour une suite croissante et bornée supérieurement est semblable. Soit m la plus grande borne inférieure de $\{a_n\}_{n=0}^\infty$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $m + \epsilon > m$ n'est pas une borne inférieure de la suite $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, il existe $N > 0$ tel que $m \leq a_n < m + \epsilon$. Puisque la suite $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ est décroissante, nous avons $m \leq a_n < m + \epsilon$ pour $n \geq N$. C'est-à-dire, $|a_n - m| < \epsilon$ pour $n \geq N$. Comme ϵ est arbitraire, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = m$. ■

Exemple 2.1.21 

Quel est la limite de la suite

$$\left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots \right\} ?$$

Cette suite est produite de façon itérative. C'est la suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ où $a_1 = \sqrt{2}$ et $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ pour $n = 1, 2, \dots$

Montrons que la suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ est bornée supérieurement par 2. Cela se démontre par induction. Nous avons $a_1 < 2$. Supposons que $a_n < 2$. Alors $2a_n < 4$ et

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{4} = 2.$$

Donc $a_n < 2$ pour tout n par induction.

De plus, montrons que la suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ est croissante. Cela se démontre aussi par induction. En fait, nous montrons par induction que

$$a_{n+1} = 2^{1/2^{(n+1)}} a_n \tag{2.1.1}$$

pour tout n . Puisque $2^{1/2^{(n+1)}} > 1$, nous obtenons alors que $a_{n+1} > a_n$ pour tout n . L'équation (2.1.1) est vrai pour $n = 1$ car

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/2^2}\sqrt{2} = 2^{1/2^2}a_1.$$

Supposons que l'équation (2.1.1) soit vrai pour n et montrons qu'elle est alors vrai pour $n + 1$. Nous avons

$$a_{n+2} = \sqrt{2a_{n+1}} = \sqrt{2\left(2^{1/2^{(n+1)}} a_n\right)} = \sqrt{2a_n}\sqrt{2^{1/2^{(n+1)}}} = a_{n+1}2^{1/2^{(n+2)}}.$$

2. **L'Axiome de complétude** des nombres réels dit que tout ensemble non vide et borné supérieurement possède une plus petite borne supérieure. Cette borne ne fait pas nécessairement partie de l'ensemble. Par exemple, $\sqrt{2}$ est la plus petite borne supérieure de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$ mais ne fait pas partie de cet ensemble. Il en découle aussi que tout ensemble non vide et borné inférieurement possède une plus grande borne inférieure.

La deuxième égalité est une conséquence de l'hypothèse d'induction. Ce qui démontre que (2.1.1) est vrai pour $n + 1$ et complète la preuve par induction.

Donc $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante et bornée supérieurement. Il découle du théorème précédent que la suite converge. Appelons L la limite de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

La suite $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ tend aussi vers L car c'est la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auquel nous avons enlevé le premier terme. De plus, nous pouvons montrer à partir de la définition de limite d'une suite que $\{\sqrt{2a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $\sqrt{2L}$. Puisque $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ pour tout n , nous avons donc que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2L}.$$

La limite L doit donc satisfaire l'équation $L^2 - 2L = L(L - 2) = 0$. Puisque $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante de termes positifs, nous devons avoir $L = 2$. ♣

2.2 Séries

Si a_1, a_2, \dots, a_n sont n nombres réels, le symbole $\sum_{k=1}^n a_k$ dénote la somme de ces nombres.

En d'autres mots,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

De façon générale, si $k_1 \leq k_2$ sont deux nombres entiers et a_k pour $k_1 \leq k \leq k_2$ sont des nombres réels, alors

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} a_k = a_{k_1} + a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}.$$

En générale, nous avons que $a_k = f(k)$ pour une fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} a_k = \sum_{k=k_1}^{k_2} f(k) = f(k_1) + f(k_1 + 1) + f(k_1 + 2) + \dots + f(k_2).$$

Exemple 2.2.1

Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^8 \underbrace{k^2}_{=f(k)} &= \underbrace{3^2}_{=f(3)} + \underbrace{4^2}_{=f(4)} + \underbrace{5^2}_{=f(5)} + \dots + \underbrace{8^2}_{=f(8)} \\ &= 9 + 16 + 25 + \dots + 64 \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=1}^6 \frac{1}{\underbrace{k^2 + 1}_{=f(k)}} = \frac{1}{\underbrace{1^2 + 1}_{=f(1)}} + \frac{1}{\underbrace{2^2 + 1}_{=f(2)}} + \frac{1}{\underbrace{3^2 + 1}_{=f(3)}} + \dots + \frac{1}{\underbrace{6^2 + 1}_{=f(6)}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{37} .$$



Il découle de la commutativité de l'addition et de la distributivité du produit sur l'addition que

$$\sum_{n=k_1}^{k_2} c a_n = c \sum_{n=k_1}^{k_2} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=k_1}^{k_2} (a_n + b_n) = \sum_{n=k_1}^{k_2} a_n + \sum_{n=k_1}^{k_2} b_n ,$$

où c , a_n et b_n pour $k_1 \leq n \leq k_2$ sont des nombres réels.

Proposition 2.2.2

Certaines sommes sont fréquemment utilisées.

$$\sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = n ,$$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} ,$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ,$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

et

$$\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} .$$

Remarque 2.2.3

i: Démontrons premièrement la deuxième identité. Posons $S = \sum_{k=1}^n k$. Nous avons

$$\begin{aligned} \text{et} \quad S &= \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \dots + \boxed{(n-1)} + \boxed{n} \\ S &= \boxed{n} + \boxed{(n-1)} + \boxed{(n-2)} + \dots + \boxed{2} + \boxed{1} . \end{aligned}$$

La somme de ces deux équations donne $2S = n(n+1)$. Donc

$$\sum_{k=0}^n k = S = \frac{n(n+1)}{2} .$$

ii: Nous donnons deux démonstrations de la troisième identité.

ii-1: La première démonstration ne fait pas appel au principe d'induction. Considérons la série télescopique $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$. Puisque

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (2^3 - 1) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + (n^3 - (n-1)^3) + ((n+1)^3 - n^3) \\
& = -1 + (2^3 - 2^3) + (3^3 - 3^3) + \dots + (n^3 - n^3) + (n+1)^3 \\
& = (n+1)^3 - 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) &= \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\
&= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n,
\end{aligned}$$

nous obtenons que

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1.$$

Si nous résolvons pour $\sum_{k=1}^n k^2$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \right) = \frac{n}{6} (2n^2 + 3n + 1) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}
\end{aligned}$$

ii-2: La deuxième démonstration utilise le principe d'induction. L'hypothèse d'induction est

$$P(n) : \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$P(1)$ est vrai car, pour $n = 1$, nous avons

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1.$$

Supposons que $P(n)$ soit vrai. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) (n+1) = \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} (n+1) \\
&= \frac{(2n+3)(n+2)}{6} (n+1),
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de l'hypothèse d'induction. Cette dernière expression n'est nul autre que $P(n+1)$. Par induction, nous concluons que $P(n)$ est vrai pour tout n .

La démonstration des autres identités est laissée au lecteur. 

Exemple 2.2.4

Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 4k + 1) &= 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 2 \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6} + 4 \frac{10(10+1)}{2} + 7 = 1000 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (4k^2 + nk) &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 + n \sum_{k=1}^n k \\ &= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(11n+4)(n(n+1))}{6}. \end{aligned}$$



Définition 2.2.5

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ... une suite de nombres réels. Posons

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

pour $k = 1, 2, 3, \dots$

L'expression $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est définie comme étant la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$.

L'expression $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est appelée une **série**, les a_n sont les **termes** de la série, et les termes S_k de la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ sont appelés les **sommes partielles** de la série.

Nous disons que la série **converge** si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles converge.

Si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles diverge, nous disons que la série **diverge**.

Si la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles tend vers $S \in \mathbb{R}$, nous écrivons

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

et nous disons que la **somme** de la série est S . Par abus de langage, nous désignons souvent la somme de la série par $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. C'est le contexte qui détermine le sens donné

à $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exemple 2.2.6

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ représente la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**. Nous démontrerons plus loin que cette série ne converge pas.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2 + n}$ représente la suite $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ des sommes partielles

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{\sin(n)}{n^2 + n} = \frac{\sin(1)}{2} + \frac{\sin(2)}{6} + \frac{\sin(3)}{12} + \dots + \frac{\sin(k)}{k^2 + k}.$$

Nous démontrerons plus loin que cette série converge. ♣

Exemple 2.2.7 (Série géométrique)

Soit r un nombre réel. Montrons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si $|r| < 1$ et diverge si $|r| \geq 1$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ est très importante en mathématiques et, pour cette raison, nous lui donnons un nom. Nous appelons cette série la **série géométrique**. La valeur r est appelée le **raison** de la série géométrique.

Les sommes partielles de la série géométrique sont de la forme

$$S_k = 1 + r + r^2 + \dots + r^k$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$. Ainsi,

$$rS_k = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{k+1}$$

et

$$(1 - r)S_k = S_k - rS_k = 1 - r^{k+1}.$$

Donc

$$S_k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

si $r \neq 1$. Pour $|r| < 1$, il découle du théorème 2.1.18 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Si $r \leq -1$, la suite $\{r^{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ ne converge pas. La suite des sommes partielles ne converge donc pas si $r \leq -1$. Si $r > 1$, la suite $\{r^{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini. Ce qui implique que la suite des sommes partielles tend aussi vers plus l'infini. De même, si $r = 1$, nous obtenons que $S_k = k + 1$ pour tout k et la suite des sommes partielles tend donc vers plus l'infini. ♣

En résumé, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.2.8

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{pour } |r| < 1,$$

et la série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge si $|r| \geq 1$.

Pour déterminer si une série $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ est une série géométrique, il faut vérifier que $a_{j+1}/a_j = r$, la raison de la série, pour tout j . Si c'est le cas, alors $a_j = a_0 r^j$ pour tout j et $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} r^j$.

Exemple 2.2.9

Déterminons si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}$$

converge. Si elle converge, nous voulons sa valeur.

Puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n$$

est une série géométrique de raison $r = 1/25$, elle converge car $|r| < 1$. En fait,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} = \frac{1}{1 - (1/25)} = \frac{25}{24}.$$

**Exemple 2.2.10**

Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+2}}{5^{2n-1}}$ converge ou diverge.

Les termes de la série sont $\frac{7^{n+2}}{5^{2n-1}} = 5 \times 7^2 \times \left(\frac{7}{25}\right)^n$. Ainsi, la série est une série géométrique de raison $7/25$. Comme la raison est plus petite que 1 en valeur absolue, la série converge.

**Théorème 2.2.11**

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sont deux séries convergentes et c est un nombre réel, alors $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

et $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ sont des séries convergentes. De plus, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA.$$

Démonstration

Le théorème précédent est une conséquence du théorème 2.1.8. En effet, considérons les sommes partielles suivantes.

$$A_k = \sum_{n=1}^k a_n, \quad B_k = \sum_{n=1}^k b_n, \quad C_k = \sum_{n=1}^k c a_n \quad \text{et} \quad D_k = \sum_{n=1}^k (a_n + b_n).$$

Nous avons $C_k = c A_k$ et $D_k = A_k + B_k$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c A_k = c \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = cA = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_k + B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k + \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

■

Exemple 2.2.12

Déterminons si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - 4^{n-1}}{5^n}$$

converge. Si elle converge, nous voulons aussi sa valeur ?

Nous avons

$$\frac{3 - 4^{n-1}}{5^n} = 3 \left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

sont des séries géométriques de raisons $r = 1/5$ et $r = 4/5$ respectivement. Puisque $|r| < 1$ pour les deux séries, elles convergent. Plus précisément,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - (1/5)} = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - (4/5)} = 5.$$

Ainsi, grâce au théorème précédent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - 4^{n-1}}{5^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{15}{4} - \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$



Exemple 2.2.13

Déterminons si la série

$$-3 + \frac{6}{5} - \frac{12}{25} + \frac{24}{125} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n$$

converge. Si elle converge, nous voulons sa valeur. Que pouvons-nous dire au sujet de la série

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n ? \quad (2.2.1)$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n$ est une série géométrique de raison $r = -2/5$. Cette série converge car $|r| < 1$. Puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - (-2/5)} = \frac{5}{7},$$

nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n = -3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = -3 \frac{5}{7} = \frac{-15}{7}.$$

Pour étudier la série (2.2.1), posons

$$S_k = \sum_{n=0}^k (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad T_k = \sum_{n=3}^k (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n.$$

Pour $k \geq 3$, nous avons

$$T_k = S_k - \sum_{n=0}^2 (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n = S_k + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n &= \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(S_k + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25}\right) \\ &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_k\right) + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-3) \left(\frac{-2}{5}\right)^n\right) + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} \\ &= \frac{-15}{7} + 3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} = \frac{24}{175}. \end{aligned}$$



Exemple 2.2.14 (Série télescopique) 

Déterminons si la série suivante converge et, si elle converge, trouvons sa valeur.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)}. \quad (2.2.2)$$

À l'aide de la méthode des fractions partielles, nous obtenons

$$\frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}$$

pour tout $n \geq 3$. Ainsi, les sommes partielles de la série (2.2.2) sont

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=3}^k \frac{2}{n(n-1)} = \sum_{n=3}^k \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4} \right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5} \right) + \dots + \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k} \right) \\ &= 1 - \frac{2}{k} \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 3$. Le premier terme à l'intérieure d'une parenthèse est annulé par le deuxième terme à l'intérieure de la parenthèse précédente sauf pour le premier terme de la première parenthèse. Nous avons donc

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} = 1.$$

Les séries pour lesquelles les sommes partielles peuvent être réduites grâce à une procédure permettant d'annuler une partie d'un terme à l'aide d'une partie du terme suivant comme nous avons fait ci-dessus (une procédure qui rappelle le mécanisme utilisé pour ranger les télescopes rétractiles) sont appelées des **séries télescopiques**. 

Exemple 2.2.15  

Montrons que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Les sommes partielles sont $S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$. Montrons par induction que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k} = +\infty.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne peut pas tendre vers un nombre réel S car c'est une suite de termes croissants dont les termes S_{2^k} tendent vers l'infini.

Montrons par induction que

$$S_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \quad (2.2.3)$$

pour $k = 1, 2, 3, \dots$

Puisque $S_2 = 1 + 1/2$, (2.2.3) est vrai pour $k = 1$. Supposons que l'inégalité (2.2.3) soit vraie et montrons qu'elle est aussi vraie si nous remplaçons k par $k + 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} S_{2^{k+1}} &= S_{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= S_{2^k} + \underbrace{\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^k + 2^k}}_{2^k \text{ termes } \geq 1/2^{k+1}} \\ &\geq S_{2^k} + \frac{2^k}{2^{k+1}} \geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui donne (2.2.3) si nous remplaçons k par $k + 1$.

Nous avons donc démontré par induction que $S_{2^k} \geq 1 + k/2 \geq 0$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$. Puisque la suite $\{1 + k/2\}_{k=1}^\infty$ tend vers plus l'infini, il en est de même pour la suite $\{S_{2^k}\}_{k=1}^\infty$. ♣

Proposition 2.2.16

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$.

Remarque 2.2.17 🔧

Une démonstration élémentaire de ce théorème existe. Cette démonstration ne sera pas donnée mais, à sa place, le théorème précédent sera démontré à l'aide du test de l'intégrale qui sera énoncé à la section 7.10 du chapitre sur les applications de l'intégrale. ♠

Théorème 2.2.18

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Démonstration 👁

Pour démontrer le théorème précédent, posons $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Puisque les suites $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ et $\{S_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ de sommes partielles tendent vers S , il découle du théorème 2.1.8 que la suite $\{S_{n+1} - S_n\}_{n=1}^\infty = \{a_{n+1}\}_{n=1}^\infty = \{a_n\}_{n=2}^\infty$ tend vers $S - S = 0$. ■

Remarque 2.2.19

Il est **faux** de dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ implique que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. La série harmonique est la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = 1/n$. Il est vrai que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ mais la série harmonique diverge. ♠

2.2.1 Tests de convergence

Nous présentons des méthodes pour déterminer si une série converge ou diverge. Il faut démontrer qu'une série converge avant d'essayer d'estimer la limite de ses sommes partielles (soit analytiquement ou numériquement à l'aide d'un ordinateur). Il y a peu de séries pour lesquelles nous possédons une formule pour déterminer exactement la somme, il faut donc bien souvent utiliser un ordinateur pour estimer la valeur des séries convergentes.

Le critère de convergence suivant découle du théorème 2.2.18.

Théorème 2.2.20

Si la suite des termes $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemple 2.2.21

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ diverge car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+1/n^2}}{1+1/n} = \frac{\sqrt{1+\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2}}{1+\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} = 1 \neq 0.$$



Exemple 2.2.22

Démontrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n+2}}{5^{2n-1}}$ diverge.

Les termes de la série sont $a_n = \frac{7^{2n+2}}{5^{2n-1}} = 5 \times 7^2 \times \left(\frac{49}{25}\right)^n$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ et la série diverge.

Nous aurions aussi pu dire que la série est une série géométrique de raison $49/25 > 1$. Comme la raison est plus grande que 1 en valeur absolue, la série diverge. 

Exemple 2.2.23

Démontrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n)$ diverge.

Les termes de la série sont $a_n = \arctan(n)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi/2 \neq 0$, la série diverge. 

La théorème suivant est une conséquence du théorème 2.1.20.

Théorème 2.2.24 (Test de comparaison)

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, deux suites de termes positifs ou nuls.

1. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge et $a_n \leq b_n$ pour tout n , alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge et $a_n \geq b_n$ pour tout n , alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemple 2.2.25

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$ converge car

$$\frac{n}{\sqrt{n^5+1}} < \frac{1}{n^{3/2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge grâce à la proposition 2.2.16 avec $p = 3/2 > 1$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+n^{1/3}}$ diverge car

$$\frac{2}{1+n^{1/3}} \geq \frac{2}{n^{1/3}+n^{1/3}} = \frac{1}{n^{1/3}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge grâce à la proposition 2.2.16 avec $p = 1/3 < 1$. ♣

Exemple 2.2.26

Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ converge ou diverge.

Puisque $0 < \frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ pour tout $n > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (série géométrique de raison 1/3), nous en déduisons à partir du test de comparaison que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ converge. ♣

Exemple 2.2.27

Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^4+4}$ converge ou diverge.

Puisque $0 < \frac{1}{5n^4+4} \leq \frac{1}{5n^4}$ pour tout $n > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^4}$ est une série convergente (proposition 2.2.16 avec $p = 4 > 1$), nous obtenons du test de comparaison que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^4+4}$ converge. ♣

Exemple 2.2.28

Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{(5n^5+n^4)^{1/3}}$ converge ou diverge.

Nous avons que

$$\frac{\sqrt{n^3+2}}{(5n^5+n^4)^{1/3}} = \frac{n^{3/2}(1+2/n^3)^{1/2}}{n^{5/3}(5+1/n)^{1/3}} = \frac{(1+2/n^3)^{1/2}}{n^{1/6}(5+1/n)^{1/3}} \geq \frac{1}{6^{1/3}n^{1/6}}.$$

pour tout $n > 0$ car $1 + 2/n^3 > 1$ et $5 + 1/n < 6$ pour tout $n > 0$. De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{1/3} n^{1/6}} = \frac{1}{6^{1/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/6}}$ est une série qui diverge grâce à la proposition 2.2.16 avec $p = 1/6 < 1$, nous en déduisons à partir du test de comparaison que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{(5n^5 + n^4)^{1/3}}$ diverge. ♣

Théorème 2.2.29 (Test de comparaison à la limite)

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, deux suites de termes positifs.

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in]0, \infty[$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge implique que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Remarque 2.2.30

1. L'énoncé de l'item 2 du théorème 2.2.29 peut être reformulé de la façon suivante. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge implique que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, il suffit d'inverser les rôles de a_n et b_n pour pouvoir utiliser l'item 2 du théorème 2.2.29. ♠

Exemple 2.2.31

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 3^n}$ converge car la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $1/3$) et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/3^n}{1/(1 + 3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 1 \in]0, \infty[.$$

Par contre, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge car la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (le cas $p = 1/2$ de la proposition 2.2.16) et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{\ln(n)/\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

où nous supposons que $n > 1$ pour ne pas avoir de division par zéro. ♣

Théorème 2.2.32 (Test de d'Alembert ou du quotient)

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série de termes positifs. Si la suite $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge et $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (L peut être $+\infty$), alors

1. la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $L < 1$ et
2. la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $L > 1$.

Remarque 2.2.33

Si $L = 1$ au théorème précédent, nous ne pouvons rien dire au sujet de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Par exemple, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ satisfont $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. La première série diverge (c'est la série harmonique) alors que la deuxième série converge (c'est le cas $p = 2$ de la proposition 2.2.16). ♠

Exemple 2.2.34

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ avec $a_n = \frac{(n+2)5^n}{n4^{3n}}$ converge car

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+3)5^{n+1}}{(n+1)4^{3(n+1)}} \right) \left(\frac{(n+2)5^n}{n4^{3n}} \right)^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n^2+3n)}{4^3(n^2+3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(1+3/n)}{4^3(1+3/n+2/n^2)} = \frac{5}{4^3} < 1. \end{aligned}$$

**Exemple 2.2.35**

Montrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$ converge.

Le nombre $n!$, **prononcé n factoriel**, est le nombre défini par $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$ si n est un entier positif et $n! = 1$ si $n = 0$.

Utilisons le test de d'Alembert pour démontrer que cette série converge. Nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = \frac{n!}{(2n+1)!}$. Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(2(n+1)+1)!} \left(\frac{n!}{(2n+1)!} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n+2)(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^2}{4 + 10/n + 6/n^2} = 0 < 1, \end{aligned}$$

la série converge. ♣

Exemple 2.2.36

Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge ou diverge.

Utilisons le test du quotient. Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \right) \left(\frac{n^n}{(2n)!} \right)^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1/n + 1/n^2}{(4 + 6/n + 2/n^2)} \\ &= e \times 0 = 0 < 1, \end{aligned}$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ converge.

Le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ provient du théorème 2.3.1 que nous verrons prochainement. 

Théorème 2.2.37 (Test de la racine)

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série de termes positifs. Si la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge et $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ (L peut être $+\infty$), alors

1. la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $L < 1$ et
2. la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $L > 1$.

Remarque 2.2.38

Comme pour le Test de d'Alembert, nous ne pouvons rien dire au sujet de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si $L = 1$ dans le théorème précédent.

Par exemple, si nous utilisons le fait que la suite $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1, nous pouvons facilement montrer que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ satisfont $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Comme à la remarque 2.2.33, la première série diverge alors que la deuxième série converge. 

Exemple 2.2.39

La série $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ avec $a_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$ converge car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n)} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1.$$



Un autre test pour déterminer si une série de termes positifs converge est le test de l'intégrale. Ce test sera présenté à la section 7.10 du chapitre sur les applications de l'intégrale d'une fonction.

2.2.2 Convergence absolue et séries alternées

Jusqu'à maintenant, la majorité des séries que nous avons considérées ne possédaient que des termes positifs. Nous allons maintenant étudier un type particulier de séries avec des termes positifs et négatifs.

Définition 2.2.40

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une **série alternée** si $a_n a_{n+1} < 0$ pour tout n .

Exemple 2.2.41

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée. C'est une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Ainsi, $a_n > 0$ pour n pair et $a_n < 0$ pour n impair. Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$



Théorème 2.2.42 (Test des séries alternées)

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ satisfait les conditions suivantes alors elle converge.

1. $a_n > 0$ pour tout n ,
2. $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout n et
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

De plus, les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$ satisfont la relation

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \tag{2.2.4}$$

où $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Démonstration

Nous démontrons ce théorème car la démonstration nous permet de mieux comprendre la relation (2.2.4).

Puisque $S_{2(k+1)} - S_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k-1} \leq 0$ pour tout $k \geq 1$, nous obtenons

$$S_{2(k+1)} \leq S_{2k} \quad , \quad k \geq 1 . \quad (2.2.5)$$

Donc

$$\dots \leq S_6 \leq S_4 \leq S_2 .$$

De même, puisque $S_{2k+1} - S_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k+1} \geq 0$ pour tout $k \geq 1$, nous obtenons

$$S_{2k+1} \geq S_{2k-1} \quad , \quad k \geq 1 . \quad (2.2.6)$$

Donc

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots$$

De plus

$$S_{2k-1} \leq S_{2k-1} + a_{2k} = S_{2k} \quad , \quad k \geq 1 . \quad (2.2.7)$$

Nous déduisons de (2.2.5), (2.2.6) et (2.2.7) que

$$S_q \leq S_p \quad (2.2.8)$$

pour p pair et q impair. En effet, si $q < p$, alors

$$S_p \geq S_{p-1} \geq S_q .$$

La première inégalité provient de (2.2.7) et la deuxième de (2.2.6). Si par contre $q > p$, alors

$$S_q \leq S_{q+1} \leq S_p .$$

La première inégalité provient de (2.2.7) et la deuxième de (2.2.5).

Puisque la suite $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ est décroissante et bornée inférieurement par S_q où q est impair, il découle du théorème 2.1.20 que cette suite converge. Soit

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} .$$

De même, puisque la suite $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ est croissante et bornée supérieurement par S_p où p est pair, il découle du théorème 2.1.20 que cette suite converge. Soit

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} .$$

Puisque $B \geq S_q$ pour tout q impair grâce à (2.2.8), nous déduisons que $B \geq A$.

Puisque la suite $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers A et la suite $\{S_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ tend vers B , nous avons que

$$B - A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} - \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} - S_{2k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 0 .$$

grâce à la troisième hypothèse du théorème.

Pour résumé, si nous posons $S = A = B$, nous avons montré que

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots \leq S \leq \dots \leq S_6 \leq S_4$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour démontrer la relation (2.2.4). Il découle de $S_{2k-1} \leq S \leq S_{2k}$ que

$$0 \leq S - S_{2k-1} \leq S_{2k} - S_{2k-1} = a_{2k}.$$

Ainsi, $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ lorsque n est impair. De même, il découle de $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$ que

$$0 \geq S - S_{2k} \geq S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1}.$$

Ainsi, $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ lorsque n est pair. Nous avons donc démontré (2.2.4). Nous retrouvons à la figure 2.1 une représentation graphique du raisonnement que nous venons de faire. ■

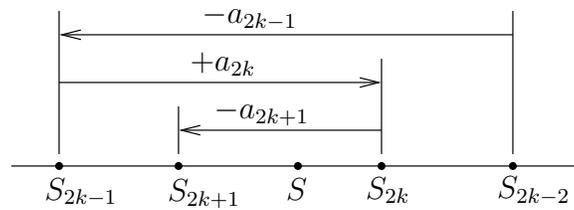


FIGURE 2.1 – Pour la série alternée du théorème 2.2.42, si nous utilisons S_n pour estimer la valeur S , l'erreur $|S_n - S|$ commise est plus petite ou égale à a_{n+1}

Exemple 2.2.43

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car c'est une série alternée avec $a_n = 1/n$ qui satisfait les trois hypothèses du test des séries alternées. ♣

Exemple 2.2.44

Montrons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}$ converge, puis cherchons une petite valeur N telle que $|S_n - S| < 10^{-3}$ si $n \geq N$ où S_n est la n^e somme partielle de la série et S est la somme de la série.

Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

où la série de droite est une série alternée avec $a_n = n/(n^2 + 1)$. Puisque $a_n = n/(n^2 + 1) > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 + 1/n^2} = 0$$

et

$$a_{n+1} < a_n \quad (2.2.9)$$

pour tout n , la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ converge. Notons que (2.2.9) provient de la relation

$$(n+1)(n^2+1) = n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + n + n = n((n+1)^2 + 1)$$

pour tout $n \geq 1$.

Pour déterminer N tel que $|S_n - S| < 10^{-3}$ pour tout $n \geq N$, il suffit de trouver n tel que $|S_n - S| < a_{n+1} < 10^{-3}$. Pour simplifier les calculs, nous choisissons n tel que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n+1} < 10^{-3}$$

et résolvons pour n pour trouver $n > 10^3 - 1$. Il suffit de prendre $N = 10^3$. ♣

D'autres applications du test des séries alternées sont données à l'exemple 5.6.24 dans le chapitre sur les applications de la dérivée d'une fonction.

Définition 2.2.45

Une série de termes réels $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolument** si la série de termes positifs

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mais la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, nous disons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge conditionnellement**.

Remarque 2.2.46

Le Test de comparaison, théorème 2.2.24, le Test de comparaison à la limite, théorème 2.2.29, le Test de d'Alembert ou du quotient, théorème 2.2.32, et le Test de la racine, théorème 2.2.37, peuvent être utilisés pour déterminer la convergence absolue d'une série. ♠

Exemple 2.2.47

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car elle satisfait le test des séries alternées. Par contre, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est la série harmonique qui diverge. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge donc conditionnellement. ♣

Comme nous venons de le voir à l'exemple précédent, nous pouvons avoir une série qui converge mais qui ne converge pas absolument. L'inverse n'est pas possible.

Théorème 2.2.48

Si une série converge absolument alors elle converge.

Démonstration 

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série qui converge absolument. Posons $b_n = a_n + |a_n|$ pour $n \geq 1$. Remarquons que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } a_n < 0 \\ 2a_n & \text{pour } a_n \geq 0 \end{cases}$$

et $b_n - |a_n| = a_n$ pour tout $n \geq 1$.

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, il en est de même pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$. De plus, puisque $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$ pour tout $n \geq 1$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge, nous avons par le test de comparaison que la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Finalement, puisque les séries $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Exemple 2.2.49

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}$ converge car elle converge absolument. En effet,

$$0 \leq \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right| = \frac{|\sin(n)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge grâce à la proposition 2.2.16. Il découle du test de comparaison que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right|$ converge. ♣

2.3 Le nombre e et la fonction e^x

Voici la première définition rigoureuse du nombre e . Une autre définition équivalente à celle-ci sera donné au chapitre sur les séries entières.

Théorème 2.3.1

La suite $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Sa limite est définie comme étant le **nombre d'Euler**

$$e = 2.718281828459 \dots$$

Démonstration 

Pour démontrer que cette limite existe, nous utilisons la formule suivante, connue sous le nom de **formule du binôme**, qui permet de développer une expression de la forme $(a + b)^n$ où n est un entier positif.

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Par exemple, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Montrons que la suite $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

Premièrement, nous montrons que la suite est bornée supérieurement. Grâce à la formule du binôme, nous avons

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

pour $1 \leq k \leq n$ et

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k} \leq \frac{1}{\underbrace{2 \times 2 \times 2 \dots \times 2}_{k-1 \text{ fois}}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

pour $1 \leq k \leq n$, nous avons que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3.$$

Deuxièmement, montrons que la suite $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante. Nous avons que

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} / \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \binom{n}{n+1} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1} \right).
\end{aligned}$$

De plus, il découle de la formule du binôme que

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n &= 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!(n-1)^6}}_{>0} + \dots \\
&+ \underbrace{\frac{n}{(n-1)^{2(n-1)}} - \frac{1}{(n-1)^{2n}}}_{>0} > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

si n est impair et

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n &= 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!(n-1)^6}}_{>0} + \dots \\
&+ \underbrace{\frac{n(n-1)}{2(n-1)^{2(n-2)}} - \frac{n}{(n-1)^{2(n-1)}}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)^{2n}}}_{>0} > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

si n est pair. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} / \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &> \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1.
\end{aligned}$$

La convergence de la série $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ est donc une conséquence du théorème 2.1.20 ■

Remarque 2.3.2

Une autre façon équivalente de définir le nombre e est donnée lors de l'étude de la dérivée de fonctions exponentielles. ♠

Remarque 2.3.3 👁

Comme nous avons annoncé à la section 1.6.1, une définition simple de b^x pour $b \in]0, \infty[$ et $x \in \mathbb{R}$, et en particulier de e^x , sera donnée à la section 8.5. Cette définition fera appel aux séries. ♠

Exemple 2.3.4

Évaluons la limite de la suite $\left\{ \frac{n e^{-n}}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Pour ce faire, nous remarquons que la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 car c'est le cas $0 < r = e^{-1} < 1$ du théorème 2.1.17. Il est aussi facile de voir à partir du graphe de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ à la figure 2.2 que la limite de la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ est 0.

Nous pouvons alors conclure que la limite de la suite $\left\{\frac{ne^{-n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ est aussi 0 car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-n}}{1+1/n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

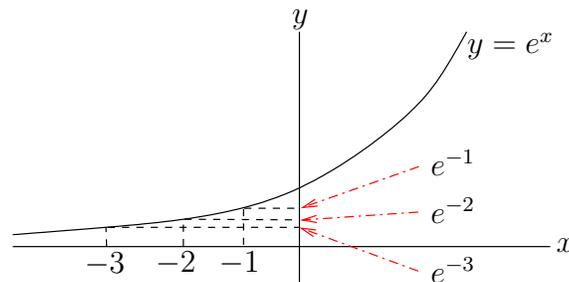


FIGURE 2.2 – La suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0

Exemple 2.3.5

Évaluons la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n}}{n^2}$.

Comme à l'exemple précédent, nous avons que la suite $\{e^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. De plus, la suite $\{1/n^2\}_{n=1}^{\infty}$ tend aussi vers 0 (le cas $r = 2 > 0$ du théorème 2.1.18). Ainsi, grâce au théorème 2.1.8,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-n}}{n^2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right) = 0 \times 0 = 0.$$



Remarque 2.3.6

En analyse réel, dont fait partie le calcul différentielle et intégral, la fonction e^z et les fonctions $\sin(z)$ et $\cos(z)$ font parties de deux familles de fonctions que l'on étudie séparément. Par contre, en analyse complexe, la fonction e^z et les fonctions $\sin(z)$ et $\cos(z)$ sont intimement reliées. Donc, les nombres e et π sont intimement reliés. C'est un sujet fascinant pour les étudiant.e.s qui poursuivront leurs études en mathématique.

2.3.1 Fonctions hyperboliques

Le but de cette section est de fournir une brève description des fonctions hyperboliques pour ceux qui poursuivront des études plus avancées des mathématiques pour l'ingénierie. Ces fonctions ne joueront aucun rôle dans le reste de ce manuel.

Les **fonctions hyperboliques** sont :

1. le sinus hyperbolique $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
2. le cosinus hyperbolique $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
3. la tangente hyperbolique $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
4. la cotangente hyperbolique $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
5. la sécante hyperbolique $\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$, et
6. la cosécante hyperbolique $\operatorname{csch}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh(x)}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ces fonctions sont fréquemment utilisées en ingénierie. Le graphe du sinus hyperbolique et celui du cosinus hyperbolique sont donnés à la figure 2.3

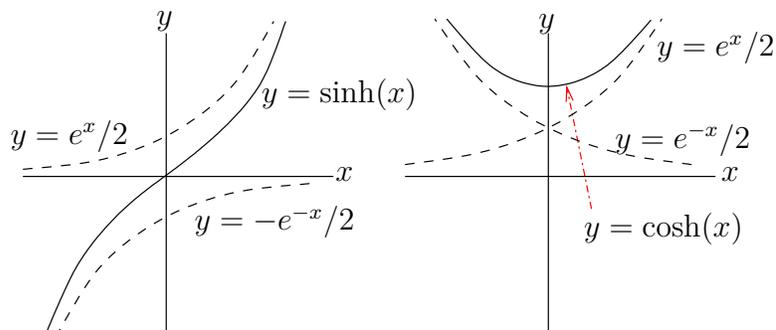


FIGURE 2.3 – Le graphe du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique

Les fonctions hyperboliques n'apportent rien de nouveau du point de vue des mathématiques puisqu'elles proviennent de formules algébriques en termes des fonctions exponentielles e^x et e^{-x} . Il n'en reste pas moins qu'elle permettent de présenter plusieurs résultats de façon élégante.

Les fonctions hyperboliques satisfont les identités suivantes : $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ (fonction impaire), $\cosh(-x) = \cosh(x)$ (fonction paire), $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$ et biens d'autres. Elles satisfont donc des identités semblables à celles satisfaites par les fonctions trigonométriques.

Finalement, pour chaque fonction hyperbolique, nous pouvons définir une fonction inverse. Par exemple, la fonction \sinh^{-1} est définie par $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ pour $x \in \mathbb{R}$. En effet,

$$y = \sinh^{-1}(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 .$$

C'est un polynôme de degré deux en e^x . Donc, si nous utilisons la formule pour trouver les racines d'un polynôme de degré deux, nous obtenons

$$e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Nous ne pouvons pas utiliser la formule $\frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}$ car elle donne une valeur négative alors que $e^x > 0$. Nous avons donc que $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ pour $y \in \mathbb{R}$. Pour respecter la tradition qui veut que y soit une fonction de x , nous échangeons les rôles de x et y pour obtenir $y = \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La fonction \cosh a un inverse si nous considérons seulement $\cosh(x)$ pour $x \geq 0$. Sur l'intervalle $[0, \infty[$, la fonction \cosh est injective et possède donc un inverse. L'image de \cosh est $[1, \infty[$. L'inverse de \cosh est donnée par $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ pour $x \geq 1$.

Finalement, La fonction \tanh a un inverse si nous considérons. La fonction \tanh^{-1} est définie par $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour $-1 < x < 1$. Le domaine de \tanh^{-1} est $] -1, 1[$, l'image de \tanh .

2.4 Exercices

2.4.1 Suites

Question 2.1

Déterminez si les suites suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculez leurs limites.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\left\{ \frac{2^n}{3^{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ | b) $\{\ln(n+3) - \ln(n)\}_{n=1}^{\infty}$ | c) $\left\{ \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ |
| d) $\left\{ 3 + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ | e) $\{2 + \cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ | f) $\left\{ \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 + 1} \right\}_{n=0}^{\infty}$ |

2.4.2 Séries

Question 2.2

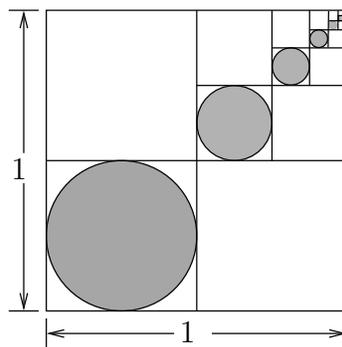
Nous laissons tomber une balle d'une hauteur de 10 mètres et elle rebondit. A chaque bond elle atteint $3/4$ de la hauteur du bond précédent. Ainsi, au premier bond, la balle atteint la hauteur de $10 \times (3/4)$ mètres, au deuxième bond, la balle atteint la hauteur de $10 \times (3/4)^2$ mètres, etc.

- Trouvez une expression pour la hauteur du n^e bond.
- Trouvez une expression pour la distance verticale totale parcourue par la balle lorsqu'elle frappe le sol pour la première, deuxième, troisième et quatrième fois.

- c) Trouvez une expression pour la distance verticale totale parcourue par la balle lorsqu'elle frappe le sol pour la n^e fois.
 d) Quelle sera éventuellement la distance parcourue par la balle ?

Question 2.3

Trouvez l'aire de la région en gris dans le dessin suivant. La région en gris est l'union d'un nombre infini de disques de rayon décroissant.



Question 2.4

Un fabricant de cerfs-volants vend 5000 unités par année. Chaque année, 10% des cerfs-volants vendus depuis le début de la production sont brisés par leur propriétaire.

- a) Combien y-aura-t-il de cerfs-volants après n années ?
 b) Quel est le niveau de stabilisation du marché pour ce type de cerfs-volants ? C'est-à-dire, si P_n est le nombre de cerfs-volants après n années, quelle est la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ si cette limite existe. ?

Question 2.5

Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculez leurs sommes.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{7^{n-2}} & \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{6^n} & \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n+2}}{5^{n+1}} \\
 \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} 5^n 2^{-2n} & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{n^2 + 3n + 2} \\
 \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)} & &
 \end{array}$$

2.4.3 Tests de convergence

Question 2.6

Déterminez si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!} & \text{b)} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n & \text{c)} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{\sqrt[3]{n^7 + 1}} \\
 \text{d)} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n+4} & \text{e)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}} & \text{f)} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} \\
 \text{g)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^3 + 5)^{1/3}} & \text{h)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n\sqrt{n}} & \text{i)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \\
 \text{j)} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{3^n} & \text{k)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 1} & \text{l)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)^{1/2}}{(n^3 + n)^{1/4}} \\
 \text{m)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3 \sin(n)}{3n^3 + n + 4} & \text{n)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{\sqrt{n^7 + 8}} & &
 \end{array}$$

2.4.4 Convergence absolue et séries alternées

Question 2.7

Déterminez si les séries suivantes convergent absolument, convergent conditionnellement ou divergent.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}} & \text{b)} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} & \text{c)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} \\
 \text{d)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}} & \text{e)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2} \right) & \text{f)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(2n+1)(2n+3)} \\
 \text{g)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2 + n - 1} & & & &
 \end{array}$$

Question 2.8

Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ converge et trouvez un entier N tel que la somme partielle S_n de cette série satisfasse $|S - S_n| < 10^{-3}$ pour $n \geq N$ où S est la somme de la série.

Question 2.9

Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}$ converge et trouvez un entier N tel que la somme partielle S_n de cette série satisfasse $|S - S_n| < 10^{-3}$ pour $n \geq N$ où S est la somme de la série. Donnez une approximation de la somme S de la série avec une erreur inférieure à 10^{-3} .

Question 2.10

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$.

- Montrez que cette série converge.
- Trouvez un petit entier N tel que $|S - S_N| < 10^{-4}$ où S est la somme de la série et S_N est la somme partielle des N premiers termes de la séries.
- Donnez une approximation de la somme S de la série avec une erreur inférieure à 10^{-4} .



3

Limites et fonctions continues

La première partie du chapitre est consacrée à l'étude de la limite d'une fonction en un point et à l'infini. La définition de limite d'une fonction en un point est introduite de façon intuitive. Par la suite, nous donnons une définition rigoureuse de limite. La limite de fonctions en un point sera aussi l'outil qui nous permettra de définir la dérivée d'une fonction au chapitre suivant.

La deuxième partie du chapitre présente la définition d'une fonction continue avec quelques unes des propriétés des fonctions continues. Nous verrons d'autres propriétés des fonctions continues aux prochains chapitres.

3.1 Limites

L'exemple suivant introduit le concept de limite d'une fonction en un point.

Exemple 3.1.1

Si $g(x) = x^2 + 1$, vérifions que $g(x)$ approche 2 lorsque x approche 1. Dans les tableaux suivants, nous évaluons g à chacun des termes de la suite de nombres

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

qui tend vers 1.

Si $x_n = 1 + 1/n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$

n	1	2	3	4	...	100	...	10000	...
$x_n = 1 + \frac{1}{n}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$...	$\frac{101}{100}$...	$\frac{10001}{10000}$...
$g(x_n)$	5	3.25	2.7	2.5625	...	2.0201	...	2.00020001	...

Si $x_n = 1 - 1/n^2$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

n	1	2	3	...	100	...	10000	...
$x_n = 1 - \frac{1}{n^2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}$...	$\frac{9999}{10000}$...	$\frac{99999999}{100000000}$...
$g(x_n)$	1	1.5625...	1.7901...	...	1.9998...	...	1.99999998...	...

Dans les deux cas, $g(x_n)$ approche la valeur 2 lorsque $n \rightarrow \infty$ et donc lorsque x_n approche 1 ; c'est-à-dire,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 2 \quad \text{pour} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

dans les deux cas.

Nous pouvons vérifier algébriquement (et donc rigoureusement) que $g(x_n)$ avec $x_n = 1 + 1/n$ approche 2 lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous avons

$$g(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 = 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

qui approche 2 lorsque $n \rightarrow \infty$ car $1/n$ et $1/n^2$ tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Comme nous l'avons fait pour $x_n = 1 + 1/n$, nous pouvons vérifier algébriquement que $g(x_n)$ avec $x_n = 1 - 1/n^2$ approche 2 lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous avons

$$g(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 + 1 = 2 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}$$

qui approche 2 lorsque $n \rightarrow \infty$ car $1/n^2$ et $1/n^4$ approchent 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Quelque soit la suite de nombres $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 1 que nous choisissons, le résultat sera toujours une suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers la valeur 2. En d'autres mots,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 2 \quad \text{pour toute suite} \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{qui satisfait} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

Pour résumer ce dernier énoncé, nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2.$$

À partir du graphe de g que nous retrouvons à la figure 3.1, nous constatons que $g(x_n)$ approche la valeur 2 pour la suite qui $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ approche 1. ♣

Définition 3.1.2

Soit f une fonction définie pour x près de c (il n'est pas nécessaire que f soit définie à c). Nous écrivons

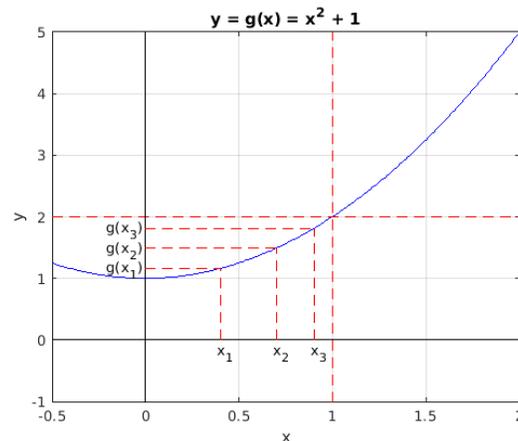
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$$

s'il existe un unique nombre C tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = C$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres différents de c qui tend vers c . Nous écrivons aussi $f(x) \rightarrow C$ lorsque $x \rightarrow c$. Nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la valeur C lorsque x converge (ou tend) vers c** . Nous disons aussi que C est la **limite de f au point c** .

Il est aussi nécessaire à l'occasion de considérer seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui approchent c par la droite ou la gauche.

FIGURE 3.1 – Graphe de $g(x) = x^2 + 1$ pour x près de 1.**Définition 3.1.3**

Si, dans la définition de la limite d'une fonction f en un point c , nous considérons seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n < c$, nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = C$$

ou $f(x) \rightarrow C$ lorsque $x \rightarrow c^-$, et nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la valeur C lorsque x converge (ou tend) par la gauche vers c** . Nous disons aussi que C est la **limite à gauche de f au point c** .

De même, si, dans la définition de la limite d'une fonction f en un point c , nous considérons seulement les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n > c$, nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = C$$

ou $f(x) \rightarrow C$ lorsque $x \rightarrow c^+$, et nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la valeur C lorsque x converge (ou tend) par la droite vers c** . nous disons aussi que C est la **limite à droite de f au point c** .

Exemple 3.1.4

Soit $g(x) = \sin(x)/x$. Quelle est la limite de $g(x)$ lorsque x approche 0? En d'autres mots, quelle est la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$?

Dans le tableau suivant, nous évaluons g à chacun des termes de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui converge vers 0 définie par $x_n = 1/n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Toute autre suite qui tend vers 0

aurait pu être utilisée.

n	$x_n = 1/n$	$g(x_n)$
1	1	0.8414709848...
2	1/2	0.9588510772...
3	1/3	0.9815840903...
4	1/4	0.9896158370...
⋮	⋮	⋮
100	1/100	0.9999833334...
⋮	⋮	⋮
10000	1/10000	0.9999999983...
⋮	⋮	⋮

La suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 1. Nous allons montrer plus loin que cela est vrai quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0. Nous pourrions donc dire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Comme nous pouvons constater à partir du graphe de g donné à la figure 3.2, $g(x)$ approche la valeur 1 lorsque x approche 0. Par contre, la fonction g n'est pas définie à l'origine. ♣

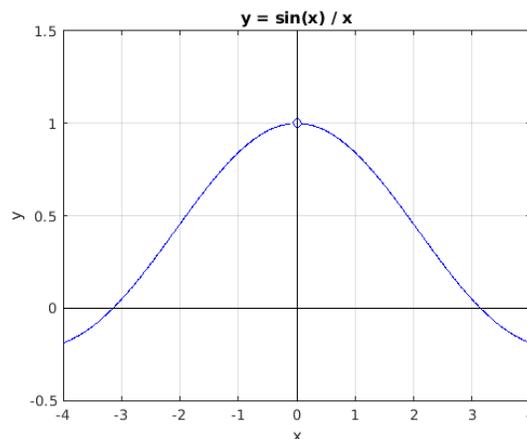


FIGURE 3.2 – Graphe de $g(x) = \sin(x)/x$ pour $x \neq 0$.

Exemple 3.1.5

Soit $g(x) = \sin(1/x)$. Est-ce que $g(x)$ approche une valeur quelconque lorsque x approche l'origine? Si oui, quelle est cette valeur?

Le tableau suivant donne les valeurs de g pour les termes de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = \frac{1}{2n\pi}$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$. La suite $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 car $g(x_n) = 0$ pour tout n .

n	1	2	3	4	...	100	...	10000	...
$x_n = \frac{1}{2n\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{6\pi}$	$\frac{1}{8\pi}$...	$\frac{1}{200\pi}$...	$\frac{1}{20000\pi}$...
$g(x_n)$	0	0	0	0	...	0	...	0	...

Il semble que $g(x)$ approche 0 lorsque x approche 0. Essayons maintenant avec la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = 2/((4n+1)\pi)$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. La suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0. Par contre, le tableau suivant semble indiquer que $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ approche 1 lorsque x_n approche 0.

n	1	2	3	4	...	100	...	10000	...
$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{13\pi}$	$\frac{2}{17\pi}$...	$\frac{2}{4001\pi}$...	$\frac{2}{40001\pi}$...
$g(x_n)$	1	1	1	1	...	1	...	1	...

En fait, pour tout nombre α entre -1 et 1 inclusivement, nous pourrions trouver une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0 et telle que $g(x_n)$ tend vers α lorsque $n \rightarrow \infty$. Il y a aussi des suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers 0 et telles que $g(x_n)$ n'approche aucune valeur fixe lorsque $n \rightarrow \infty$ mais se promène entre -1 et 1 .

Le graphe de g que nous retrouvons à la figure 3.3 montre bien que $g(x)$ n'approche pas une valeur unique lorsque x approche 0. Le graphe de g oscille entre -1 et 1 de plus en plus rapidement lorsque x approche 0.

Donc, dans la définition de $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$, il est très important que la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tende vers une valeur unique C quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers c . ♣

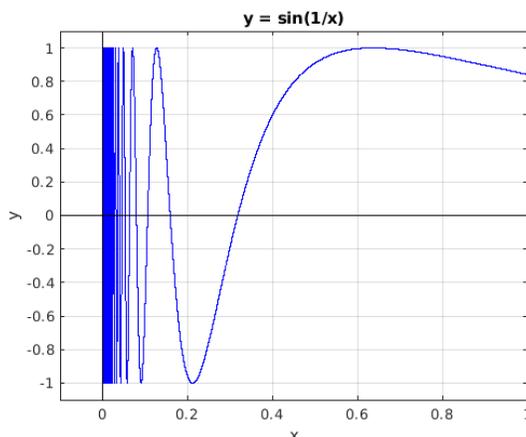


FIGURE 3.3 – Graphe de $g(x) = \sin(1/x)$ pour $x > 0$.

La définition précédente pour

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C,$$

où nous utilisons les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers c pour déterminer la valeur possible de C , est très utile pour prédire numériquement la valeur possible C de la limite. Cependant, il est généralement impossible d'utiliser cette définition pour prouver que la limite est bien la valeur C suggérée. Pour prouver cela, il faudrait vérifier que toutes les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers c donnent des suites $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers C . Ceci est évidemment impossible.

Exemple 3.1.6

Est-ce que la limite suivante existe ?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

Nous considérons deux cas : x converge vers 1 avec $x > 1$ et x converge vers 1 avec $x < 1$. Pour $x > 1$, nous avons que $|x-1| = x-1$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

Pour $x < 1$, nous avons que $|x-1| = 1-x$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 = -1$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1},$$

nous devons conclure que la limite n'existe pas. ♣

Exemple 3.1.7 (Suite de l'exemple 3.1.1)

Vérifions de façon algébrique (et donc rigoureusement) que $g(x) = x^2 + 1$ satisfait $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

Remarquons que toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui approche 1 peut s'écrire $x_n = 1 + r_n$ où la suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ approche 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. C'est certainement le cas pour les suites $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ et $\left\{1 + \frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ que nous avons utilisées précédemment. Ainsi,

$$g(x_n) = g(1 + r_n) = (1 + r_n)^2 + 1 = 2 + 2r_n + r_n^2 \rightarrow 2$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ car r_n et r_n^2 approchent 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 2$. ♣

Malheureusement, la méthode algébrique utilisée à l'exemple 3.1.7 est restreinte aux fonctions algébriques (simples).

3.1.1 Epsilon et delta

La définition de

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C,$$

que nous allons donner ci-dessous est équivalente à la définition de limite d'une fonction en un point que nous avons donnée précédemment mais ne fait pas appel aux suites. Cette nouvelle définition est souvent appelée la définition en termes de ϵ et δ de la limite d'une fonction en un point. C'est cette définition qui est généralement utilisée pour démontrer rigoureusement que la limite d'une fonction f en un point c est une valeur C .

Définition 3.1.8

Soit f une fonction définie pour $x \neq c$ (il n'est pas nécessaire que f soit définie à $x = c$). Nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$$

si, quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné, nous pouvons trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$|f(x) - C| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x - c| < \delta, \quad x \neq c.$$

Nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la valeur C lorsque x converge vers c .**

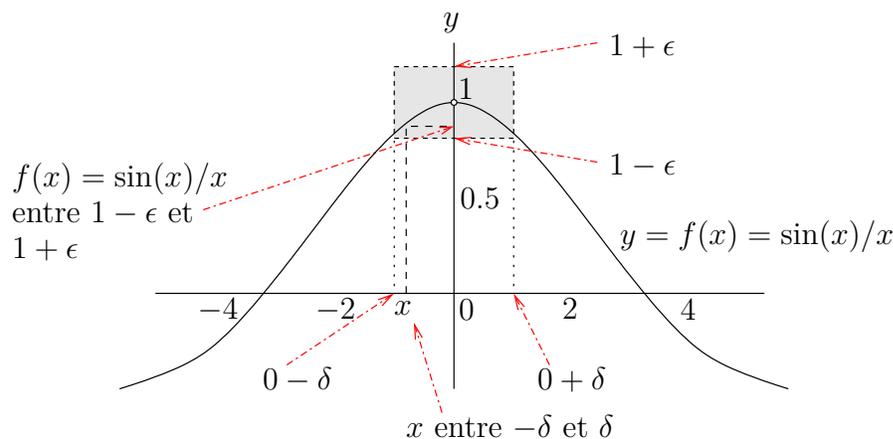


FIGURE 3.4 – Pour ϵ donné, le graphe nous donne une valeur possible de δ pour que $f(x) = \sin(x)/x$ soit entre $1 - \epsilon$ et $1 + \epsilon$ quel que soit $x \neq 0$ entre $-\delta$ et δ .

Nous illustrons cette nouvelle formulation de la limite d'une fonction en un point à l'aide de la fonction $f(x) = \sin(x)/x$ pour $x = 0$. Quelque soit la valeur de ϵ , nous remarquons à partir du graphe de f à la figure 3.4 qu'il est toujours possible de trouver $\delta > 0$ pour que $f(x)$ soit entre $1 - \epsilon$ et $1 + \epsilon$ ($C = 1$ dans l'énoncé de la définition) si x est entre $-\delta$ et δ ($c = 0$ dans l'énoncé de la définition) avec $x \neq 0$. Le graphe de f pour $-\delta < x < \delta$ et $x \neq 0$ est complètement à l'intérieure de la boîte définie par $-\delta < x < \delta$ et $1 - \epsilon < y < 1 + \epsilon$. Plus ϵ sera petit, plus nous devons prendre δ petit.

Nous présentons à la figure 3.5 le graphe d'une fonction qui n'a pas de limite au point c . Il

n'existe pas de δ tel que le graphe de f pour $c - \delta < x < c + \delta$ avec $x \neq c$ soit complètement à l'intérieur de la boîte définie par $c - \delta < x < c + \delta$ et $C - \epsilon < y < C + \epsilon$. Il n'existe donc pas de δ pour satisfaire la définition précédente.

Dans la définition de limite, ϵ prend n'importe laquelle des valeurs positives. Il ne suffit pas de trouver un ϵ pour lequel nous pouvons trouver un δ tel que $f(x)$ soit dans l'intervalle $]C - \epsilon, C + \epsilon[$ si $x \neq c$ est dans l'intervalle $]c - \delta, c + \delta[$. Il faut que pour chaque valeur $\epsilon > 0$ nous puissions trouver un δ (qui peut varier si ϵ varie) tel que $f(x)$ soit dans l'intervalle $]C - \epsilon, C + \epsilon[$ si $x \neq c$ est dans l'intervalle $]c - \delta, c + \delta[$.

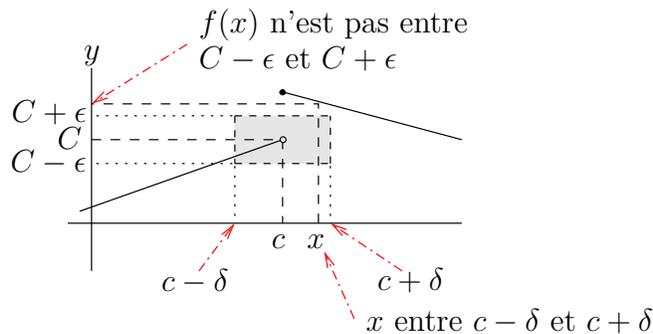


FIGURE 3.5 – Pour ϵ donné, il est impossible de trouver δ pour que $f(x)$ soit entre $C - \epsilon$ et $C + \epsilon$ quel que soit $x \neq c$ entre $c - \delta$ et $c + \delta$.

Exemple 3.1.9

Montrons à l'aide de la dernière définition de limite d'une fonction en un point que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Soit $\epsilon > 0$ quelconque mais fixe. Puisque nous cherchons la limite lorsque x approche 2, nous pouvons supposer que $x > 1$. Ainsi,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2-x}{2x} \right| = \frac{|2-x|}{|2x|} < \frac{|2-x|}{2}$$

pour $x > 1$. Si nous prenons $\delta = \min\{1, 2\epsilon\}$, alors

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| < \frac{|2-x|}{2} < \frac{\delta}{2} \leq \epsilon$$

pour $|x - 2| < \delta$. ♣

Proposition 3.1.10

Les définitions de convergence données aux définitions 3.1.2 et 3.1.8 sont équivalentes.

Démonstration

i) Supposons que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$ selon la définition 3.1.2. Montrons que la définition 3.1.8 est satisfaite.

La preuve est par contradiction. Supposons que la définition 3.1.8 ne soit pas satisfaite. Cela implique qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout δ nous pouvons trouver au moins un point x_δ tel que $|x_\delta - c| < \delta$ et $|f(x_\delta) - C| \geq \epsilon$.

Si nous prenons $\delta = 1/n$ pour n un entier positif, nous obtenons une suite $\{x_{1/n}\}_{n=1}^\infty$ telle que $|x_{1/n} - c| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_{1/n}) - C| \geq \epsilon$ pour tout n . Nous avons donc $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1/n} = c$ mais la suite $\{f(x_{1/n})\}_{n=1}^\infty$ ne tend pas vers C . Ce qui contredit la définition 3.1.2.

ii) Supposons maintenant que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$ selon la définition 3.1.8. Montrons que la définition 3.1.2 est satisfaite.

Supposons que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ soit une suite qui tend vers c . Soit $\epsilon > 0$. Selon la définition 3.1.8, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - C| < \epsilon$ si $|x - c| < \delta$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, il existe $N > 0$ tel que $|x_n - c| < \delta$ pour $n > N$. Ainsi, $|f(x_n) - C| < \epsilon$ pour $n > N$. Puisque ϵ est arbitraire, nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = C$.

Comme le résultat du paragraphe précédent est vrai pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ qui tend vers c , nous avons que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = C$ selon la définition 3.1.2. ■

3.1.2 Règles pour évaluer les limites

Le théorème suivant est parfois très utile pour évaluer la limite d'une fonction en un point. Nous avons déjà vu une version de ce théorème (théorème 2.1.10) pour les suites. La présente version en est une conséquence.

Théorème 3.1.11 (des gendarmes ou sandwich)

Soit f , g et h ; trois fonctions telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour x près de c . Si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L ,$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L .$$

Exemple 3.1.12

La méthode algébrique de l'exemple 3.1.7 n'est pas utile pour démontrer rigoureusement que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 . \quad (3.1.1)$$

Il faut utiliser une autre approche. Le théorème précédent nous permet de démontrer rigoureusement (3.1.1).

Considérons le dessin à la figure 3.6. Nous avons

$$\sin(x) = |\overline{CE}| < |\overline{AC}| < \text{longueur de l'arc de cercle } AC = x .$$

Donc

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1 . \quad (3.1.2)$$

De plus,

$$\begin{aligned} x &= \text{longueur de l'arc de cercle } AC \\ &< |\overline{AD}| + |\overline{DC}| < |\overline{AD}| + |\overline{DB}| = |\overline{AB}| = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{OA}|} = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} . \end{aligned}$$

Donc

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} . \quad (3.1.3)$$

Nous déduisons de (3.1.2) et (3.1.3) que

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 .$$

Il est facile de vérifier à partir de la définition du cosinus que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

Par exemple, pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0, nous avons que $\cos(x_n)$ tend vers $\cos(0) = 1$. Ainsi, nous obtenons que $g(x) = \sin(x)/x$ approche 1 lorsque x approche 0 grâce au théorème des gendarmes. ♣

Comme nous venons de voir, il n'est pas toujours facile de démontrer rigoureusement qu'une fonction a une limite en un point.

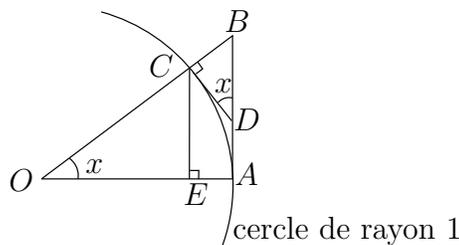


FIGURE 3.6 – La figure utilisée pour démontrer rigoureusement que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$.

Comme pour les limites de suites, nous avons les propriétés suivantes.

Théorème 3.1.13

Supposons que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ et $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$.

1. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$.
2. Si k est un nombre réel, alors $\lim_{x \rightarrow c} (k f(x)) = kA$.
3. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = AB$.
4. Si $B \neq 0$ (donc $g(x) \neq 0$ pour x près de c), alors $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Les quatre conclusions du théorème précédent sont souvent énoncées de la façon suivante.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow c} k f(x) &= k \lim_{x \rightarrow c} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) &= \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow c} g(x) \right)\end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

respectivement.

3.2 Fonctions continues

Une propriété que possèdent certaines fonctions est la **continuité**. La fonction f est continue au point $x = c$ si f est définie au point $x = c$ et $f(x)$ approche la valeur $f(c)$ lorsque x approche c .

Si nous utilisons la définition de limite introduite à la section précédente pour définir la continuité d'une fonction au point $x = c$, nous obtenons l'énoncé suivant.

Définition 3.2.1

Soit f une fonction à valeurs réelles définie près d'un point c et au point c . La fonction f est **continue au point** c si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

En d'autres mots, f est continue au point c si $f(c)$ existe et $f(x_n)$ approche $f(c)$ quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers c .

La figure 3.7 contient le graphe d'une fonction f qui n'est pas continue au point $x = c$ car $f(x)$ approche la valeur B lorsque $x > c$ approche c et $f(x)$ approche la valeur $A \neq B$

lorsque $x < c$ approche c . Comme f est une fonction, elle ne peut pas prendre deux valeurs distinctes, A et B , lorsque $x = c$. Dans le dessin à la figure 3.7, le cercle plein à l'extrémité gauche de la courbe supérieure (à $x = c$) et le cercle vide à l'extrémité droite de la courbe inférieure (aussi à $x = c$) indiquent que $f(c) = B$.

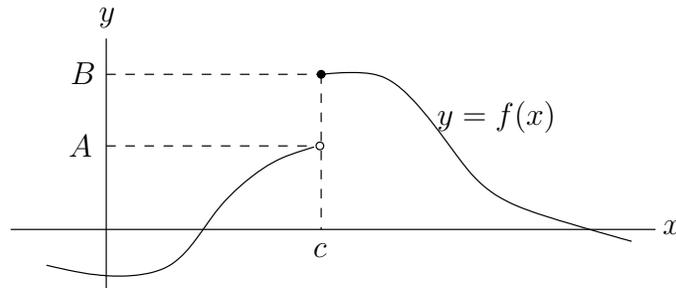


FIGURE 3.7 – La fonction f n'est pas continue au point $x = c$

Pour qu'une fonction ne soit pas continue en un point $x = c$, il faut que le graphe de la fonction soit représenté par une courbe brisée à $x = c$.

Exemple 3.2.2

À l'exemple 3.1.1, nous avons montré que la fonction $g(x) = x^2 + 1$ est continue au point $x = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ et $g(1) = 2$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) .$$



Exemple 3.2.3

La fonction $g(x) = \sin(x)/x$ que nous avons étudié à l'exemple 3.1.4 n'est pas continue au point $x = 0$ car $g(x)$ n'est pas définie pour $x = 0$. Par contre, si nous définissons

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

alors $f(x) = g(x)$ pour $x \neq 0$ et f est continue au point $x = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) .$$

Le graphe de f est le graphe à la figure 3.2 où le point $(0, 1)$ est maintenant représenté par un cercle plein. ♣

Définition 3.2.4

Si une fonction f est continue en tout point d'un intervalle (e.g. $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, b[$ or $]a, b]$) nous disons que la fonction f est **continue cet intervalle**.

Il est toujours préférable (si c'est possible) d'utiliser des fonctions continues pour décrire les phénomènes physiques, biologiques, et autres. La raison pour cette préférence est qu'une petite variation de l'argument d'une fonction continue aura très peu d'effet (en général) sur la valeur retournée par la fonction. Cela est nécessaire si nous voulons faire des prédictions à long terme ou si nous voulons estimer les valeurs à fournir à la fonction pour obtenir le résultat escompté. Nous illustrons ce dernier type de problèmes dans l'exemple suivant.

Exemple 3.2.5 🌲

La concentration d'un contaminant dans l'eau d'une rivière est déterminée par la fonction $f(t) = \frac{0.7t}{1+t}$ où la variable t est mesurée en années. À quel moment aurons-nous une concentration du contaminant entre 0.1 et 0.2 pourcent ?

Il faut trouver t tel que

$$0.1 < f(t) = \frac{0.7t}{1+t} < 0.2 \quad .$$

Il découle de la première inégalité que

$$0.1 < \frac{0.7t}{1+t} \Rightarrow 0.1 + 0.1t < 0.7t \Rightarrow 0.1 < 0.6t \Rightarrow \frac{1}{6} < t$$

et de la deuxième inégalité que

$$\frac{0.7t}{1+t} < 0.2 \Rightarrow 0.7t < 0.2 + 0.2t \Rightarrow 0.5t < 0.2 \Rightarrow t < \frac{2}{5} \quad .$$

Nous aurons donc une concentration entre 0.1 et 0.2 pourcent pour t entre $1/6 = 0.1\bar{6}$ de l'année (environ 2 mois) et $2/5 = 0.4$ de l'année (un peu moins de 5 mois).

Si nous considérons la même question pour une concentration entre 0.13 et 0.17 pourcent, il faut trouver t tel que

$$0.13 < f(t) = \frac{0.7t}{1+t} < 0.17 \quad .$$

Puisque

$$0.13 < \frac{0.7t}{1+t} \Rightarrow 0.13 + 0.13t < 0.7t \Rightarrow 0.13 < 0.57t \Rightarrow \frac{13}{57} < t$$

et

$$\frac{0.7t}{1+t} < 0.17 \Rightarrow 0.7t < 0.17 + 0.17t \Rightarrow 0.53t < 0.17 \Rightarrow t < \frac{17}{53} \quad ,$$

nous aurons une concentration entre 0.13 et 0.17 pourcent pour t entre $13/57 = 0.228\dots$ de l'année et $17/53 = 0.320\dots$ de l'année.

Si considère la même question pour une concentration entre 0.14 et 0.16 pourcent, nous trouvons $1/4 = 0.25 < t < 8/27 = 0.\overline{296}$, Pour une concentration entre 0.145 et 0.155 pourcent, nous trouvons $29/111 = 0.\overline{261} < t < 31/109 = 0.284\dots$, etc. À la limite, nous

avons une concentration de 0.15 pourcent pour $t = 3/11 = 0.\overline{27}$ de l'année. C'est la valeur de t lorsque $f(t) = 0.15$.

Naturellement, cet exemple n'est pas réaliste car la fonction f est donnée explicitement. Dans une expérience réelle, la fonction f est inconnue. Nous avons peut-être quelques résultats expérimentaux qui nous donnent que la concentration du contaminant varie de 0.1 à 0.2 pourcent entre $t = 0.1\overline{6}$ et $t = 0.4$, de 0.13 à 0.17 pourcent entre $t = 0.228\dots$ et $t = 0.320\dots$, de 0.14 à 0.16 pourcent entre $t = 0.25$ et $t = 0.29\overline{6}$, de 0.145 à 0.155 pourcent entre $t = 0.26\overline{1}$ et $t = 0.284\dots$, etc. Si nous assumons que la fonction qui donne la densité du contaminant en fonction du temps est une fonction continue, nous pouvons alors conclure que la concentration du contaminant est possiblement de 0.15 pourcent pour $t = 0.27$; une valeur qui se trouve entre $t = 0.26\overline{1}$ et $t = 0.284\dots$. Si nous n'assumons pas que la fonction soit continue, nous ne pouvons rien conclure. ♣

3.2.1 Epsilon et delta 👁

La définition en termes de ϵ et δ de la limite d'une fonction à un point nous donne une définition de la continuité qui est équivalente à celle que nous venons de donner.

Définition 3.2.6

Soit f une fonction à valeurs réelles définie près d'un point c et au point c . La fonction f est continue au point $x = c$ si, quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné, nous pouvons trouver un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x - c| \leq \delta.$$

Remarque 3.2.7

Nous illustrons à la figure 3.8 la deuxième formulation de la définition d'une fonction continue f en un point c . Quel que soit le nombre ϵ , nous pouvons toujours trouver δ tel que le graphe de la fonction f entre $c - \delta$ et $c + \delta$, incluant $(c, f(c))$, soit dans la boîte définie par $c - \delta < x < c + \delta$ et $f(c) - \epsilon < y < f(c) + \epsilon$. ♠

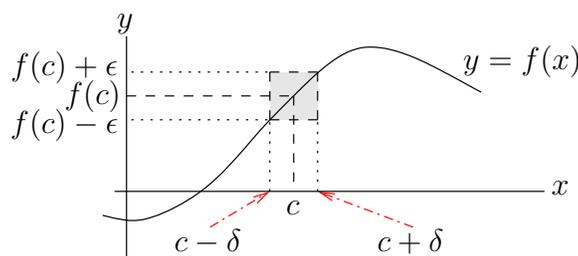


FIGURE 3.8 – Pour ϵ donné, il est possible de trouver δ pour que $f(x)$ (incluant $f(c)$) soit entre $f(c) - \epsilon$ et $f(c) + \epsilon$ quel que soit x entre $c - \delta$ et $c + \delta$.

3.3 Quelques propriétés des fonctions continues

Les résultats suivants découlent de la définition d'une fonction continue.

Proposition 3.3.1

1. Les fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles et logarithmiques sont des fonctions continues sur leur domaine.
2. Il découle du théorème 3.1.13 que le produit et la somme de fonctions continues donnent une nouvelle fonction continue. De même, le quotient de deux fonctions continues donne une nouvelle fonction continue sauf aux points où le dénominateur est nul.
3. La composition de deux fonctions continues donne une nouvelle fonction continue.

Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite qui converge vers un point c du domaine d'une fonction continue f , alors la suite $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers le point $f(c)$. En d'autres mots,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

Puisque la définition de limite d'une fonction en un point c fait appel aux suites $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers c , nous obtenons le résultat suivant qui est très utile pour calculer des limites.

Proposition 3.3.2

Soit f une fonction continue et g une fonction dont l'image est un sous-ensemble du domaine de f . Nous pouvons donc considérer la composition $f \circ g$. Si $\lim_{x \rightarrow r} g(x) = s$ est un élément du domaine de f , alors $\lim_{x \rightarrow r} f(g(x)) = f(s)$. En d'autres mots,

$$\lim_{x \rightarrow r} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow r} g(x)\right)$$

Exemple 3.3.3

Calculons les limites suivantes si elles existent.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{2 - \sqrt{x}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2 - \sqrt{x + 3}}$$

a) Notons que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Puisque $\sin(x)$ est continue en $x = 4$, nous pouvons utiliser la proposition 3.3.2 pour conclure que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = \sin(4).$$

b) Remarquons que

$$\frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{2-\sqrt{x}} = -(\sqrt{x}+2)$$

pour $x \neq 4$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} -(\sqrt{x}+2) = -(\sqrt{4}+2) = -4$$

Nous avons utilisé le fait que $\sqrt{x}-2$ est une fonction continue pour calculer la dernière limite.

c) Pour évaluer cette limite, nous éliminons premièrement la racine carrée au dénominateur.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} &= \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} \left(\frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}} \right) = \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} \\ &= \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{1-x} = -(2+\sqrt{x+3}) \end{aligned}$$

pour $x \neq 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} -(2+\sqrt{x+3}) = -(2+\sqrt{4}) = -4$$

Nous avons utilisé le fait que $2+\sqrt{x+3}$ est une fonction continue pour calculer la dernière limite. ♣

Exemple 3.3.4

Soit la fonction

$$h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Montrons que

$$h(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Premièrement, montrons que

$$\sin(h(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Posons $\theta_1 = \arctan(x)$ et $\theta_2 = \arctan(1/x)$. Nous avons $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$ et

$$\sin(h(x)) = \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1).$$

Nous déduisons des deux dessins à la figure 3.9 que

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \sin(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{et} \quad \cos(\theta_2) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

pour $x > 0$. Donc

$$\sin(h(x)) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 1$$

pour tout $x > 0$. De même, nous déduisons des deux dessins à la figure 3.10 que

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \sin(\theta_2) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{et} \quad \cos(\theta_2) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

pour $x < 0$. Donc

$$\sin(h(x)) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -1$$

pour tout $x < 0$.

Pour compléter le problème, remarquons que $h(1) = 2 \arctan(1) = \pi/2$. Comme $\sin(h(x))$ est constant pour $x > 0$ et h est une fonction continue pour $x > 0$, $h(x)$ doit être constant pour $x > 0$ et ainsi $h(x) = \pi/2$ pour $x > 0$. De même, $h(-1) = 2 \arctan(-1) = -\pi/2$. Comme $\sin(h(x))$ est constant pour $x < 0$ et h est continue pour $x < 0$, $h(x)$ doit être constant pour $x < 0$ et ainsi $h(x) = -\pi/2$ pour $x < 0$. ♣

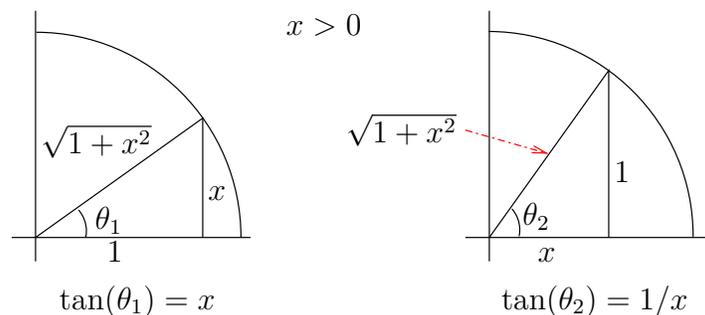


FIGURE 3.9 – Représentations graphiques de $\tan(\theta_1) = x$ et $\tan(\theta_2) = 1/x$ pour $x > 0$ et $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$.

Les fonctions continues possèdent une propriété très importante que nous utiliserons lors de l'étude des fonctions au prochain chapitre.

Théorème 3.3.5 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et soit m une valeur entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe au moins une valeur c telle que $a \leq c \leq b$ et $f(c) = m$ (figure 3.11).

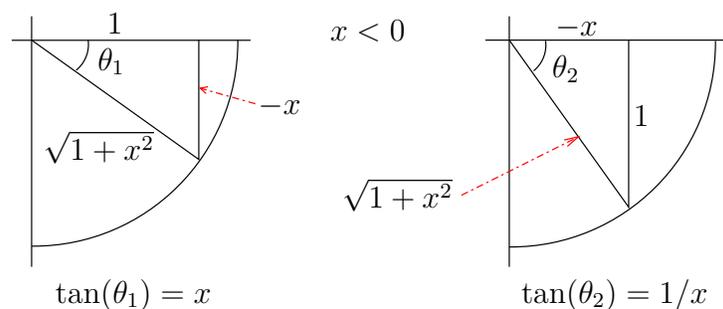


FIGURE 3.10 – Représentations graphiques de $\tan(\theta_1) = x$ et $\tan(\theta_2) = 1/x$ pour $x < 0$ et $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < 0$. Notons que $\tan(\theta_i) < 0$, $\sin(\theta_i) < 0$ et $\cos(\theta_i) > 0$ pour $-\pi/2 < \theta_1, \theta_2 < 0$.

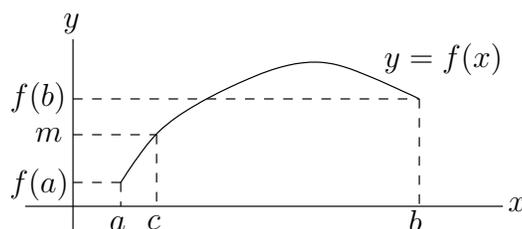


FIGURE 3.11 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires.

3.4 Limites à l'infini et limites infinies

Lorsque nous étudions une fonction, il est souvent intéressant de savoir comment se comporte la fonction pour de très grandes valeurs de son domaine.

Exemple 3.4.1

Comme nous pouvons le constater à partir du graphe de la fonction $g(x) = 5 + e^{(2-x/10)}$ que l'on retrouve à la figure 3.12, $g(x)$ semble approcher la valeur 5 lorsque x devient de plus en plus grand. En effet, $g(x) \approx 5$ pour x très grand. ♣

Commençons par donner un sens mathématique à l'énoncé « $f(x)$ approche une certaine valeur lorsque x tend vers plus l'infini ». Pour se faire, nous utilisons la définition 2.1.14 de limite à l'infini pour les suites. Nous obtenons la définition suivante de limite d'une fonction f lorsque x tend vers plus ou moins l'infini.

Définition 3.4.2

Si la définition 3.1.2 est satisfaite lorsque c est remplacé par ∞ , nous disons que $f(x)$ converge (ou tend) vers la constante C lorsque x converge (ou tend) vers

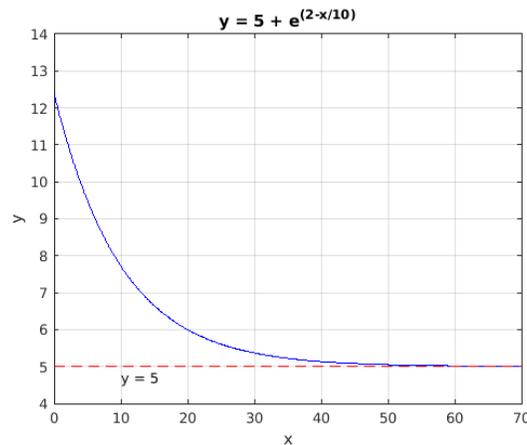


FIGURE 3.12 – Le graphe de $g(x) = 5 + e^{(2-x/10)}$. Nous avons que $g(x)$ approche 5 lorsque x tend vers plus l'infini.

plus l'infini et nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C .$$

De même, si la définition 3.1.2 est satisfaite lorsque c est remplacé par $-\infty$, nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers la constante C lorsque x converge (ou tend) vers moins l'infini** et nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = C .$$

Exemple 3.4.3

Revenons à l'exemple précédent avec $g(x) = 5 + e^{(2-x/10)}$.

La suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ est une suite qui tend vers plus l'infini car c'est une suite croissante de nombres sans borne supérieure. Nous donnons, dans le tableau 3.1, les valeurs de $g(x_n)$ pour quelques uns des termes de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Il est clair que $g(x_n)$ approche 5 lorsque n (et donc x_n) devient de plus en plus grand.

Puisque pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers plus l'infini, nous pourrions montrer que $g(x_n)$ approche 5 lorsque n devient de plus en plus grand, nous avons que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 5$. Ainsi, $g(x)$ tend vers 5 lorsque x tend vers plus l'infini.

La droite $y = 5$ est appelée une **asymptote horizontale** pour la fonction g .

Nous pourrions aussi raisonner à partir du graphe de $y = e^x$ pour montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 5$. En effet, puisque $2 - x/10$ devient de plus en plus petit (de plus en plus « négatif ») lorsque x devient de plus en plus grand, nous pouvons conclure à partir du graphe de $y = e^x$ que $e^{(2-x/10)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers plus l'infini. Donc $5 + e^{(2-x/10)}$ tend vers 5 lorsque

n	$x_n = n^2$	$g(x_n)$	n	$x_n = n^2$	$g(x_n)$
1	1	11.68589444228...	13	169	5.00000033807...
2	4	9.95303242440...	14	196	5.00000002272...
3	9	8.00416602395...	15	225	5.00000000125...
4	16	6.49182469764...	16	256	5.00000000006...
5	25	5.60653065971...	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	22	484	5.00000000000...
11	121	5.00004107956...	23	529	5.00000000000...
12	144	5.00000411859...	24	576	5.00000000000...

TABLE 3.1 – $g(x_n)$ pour quelques valeurs de n .

x tend vers plus l'infini.



Les propositions 2.1.17 et 2.1.18 ne sont pas limitées à la suite $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposition 3.4.4

Soit r un nombre réel positif. Alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r^x = \begin{cases} \infty & \text{pour } r > 1 \\ 1 & \text{pour } r = 1 \\ 0 & \text{pour } 0 < r < 1 \end{cases} .$$

Proposition 3.4.5

Soit r un nombre réel. Alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > 0 \\ 1 & \text{pour } r = 0 \\ \infty & \text{pour } r < 0 \end{cases} .$$

Remarque 3.4.6

Dans les deux propositions précédentes, nous faisons référence à la convergence d'une fonction vers plus l'infini lorsque x tend vers plus l'infini. La définition 3.4.9 ci-dessous explique ce que cela veut dire. C'est deux propositions seront extrêmement utiles pour calculer des limites.



Exemple 3.4.7

Évaluons les limites suivantes si elles existent.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{5x^2 + 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{x^{3/2} + 2x + 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 5}}{(x^8 + x^2 + 1)^{1/4}}$$

a) Si nous divisons le numérateur et dénominateur par x^2 , alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 3}{5x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + (1/x) + (3/x^2)}{5 + (1/x^2)} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2)}{5 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2)} = \frac{1}{5}$$

grâce à la proposition 3.4.5 qui nous donne $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2) = 0$.

b) Si nous divisons le numérateur et dénominateur par $x^{3/2}$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{x^{3/2} + 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/x^{1/2}) - (4/x^{3/2})}{1 + (2/x^{1/2}) + (1/x^{3/2})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{1/2}) - 4 \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{3/2})}{1 + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{1/2}) + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{3/2})} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

grâce encore à la proposition 3.4.5 qui nous donne $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{1/2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^{3/2}) = 0$.

c) Si nous factorisons x^4 à l'extérieur de la racine carrée et x^8 à l'extérieur de la racine quatrième, alors

$$\frac{\sqrt{4x^4 + 5}}{(x^8 + x^2 + 1)^{1/4}} = \frac{x^2 \sqrt{4 + (5/x^4)}}{x^2 (1 + (1/x^6) + (1/x^8))^{1/4}} = \frac{\sqrt{4 + (5/x^4)}}{(1 + (1/x^6) + (1/x^8))^{1/4}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 5}}{(x^8 + x^2 + 1)^{1/4}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + (5/x^4)}}{(1 + (1/x^6) + (1/x^8))^{1/4}} \\ &= \frac{\sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow \infty} (5/x^4)}}{\left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^6) + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^8)\right)^{1/4}} = \frac{\sqrt{4}}{1^{1/4}} = 2 \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^r) = 0$ pour $r > 0$ comme nous avons énoncé à la proposition 3.4.5. ♣

Exemple 3.4.8

Déterminons si la limite suivante existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

et, si elle existe, qu'elle est cette limite.

Remarquons que

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Puisque $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ croît sans borne supérieure lorsque x augmente, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$



Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

si la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait la définition 2.1.14 de convergence vers plus l'infini. De même,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

si la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait la définition 2.1.14 de convergence vers moins l'infini. Nous pouvons ainsi donner la définition suivante.

Définition 3.4.9

Soit f une fonction définie pour x près de c . Nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres différents de c qui tend vers c . Nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque x converge (ou tend) vers c .**

Il n'est pas nécessaire que f soit définie à c , et nous pouvons avoir $c = +\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 3.4.10

Si $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$, que se passe-t-il lorsque x approche 3? Remarquons que $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 3$.

Une façon de montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^2} = \infty$$

serait de montrer que, quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 3, la suite $\left\{ \frac{2}{(x_n-3)^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini. Nous ne ferons pas cela mais le lecteur peut vérifier avec une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de son choix qui tend vers 3 que $\left\{ \frac{2}{(x_n-3)^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers plus l'infini.

Nous utilisons une autre approche (un peu moins rigoureuse) pour nous convaincre que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^2} = \infty.$$

Si x est très près de 3 avec $x > 3$ alors $x-3$ est très près de zéro avec $x-3 > 0$. Donc $(x-3)^2$ est encore plus près de zéro que $x-3$ peut l'être si $0 < x-3 < 1$. Ainsi, $2/(x-3)^2 > 0$ est très grand car nous divisons par un très petit nombre. Plus $x-3 > 0$ sera petit, plus $2/(x-3)^2 > 0$ sera grand. Un raisonnement semblable pour x très près de 3 avec $x < 3$,

montre que $2/(x-3)^2 > 0$ devient aussi de plus en plus grand lorsque $3-x > 0$ devient de plus en plus petit.

Si nous résonnons à partir du graphe de f près de 3 que nous retrouvons à la figure 3.13, nous pouvons conclure que la fonction f croît sans borne supérieure lorsque x tend vers 3. La droite $x = 3$ est appelée une **asymptote verticale** pour f . ♣

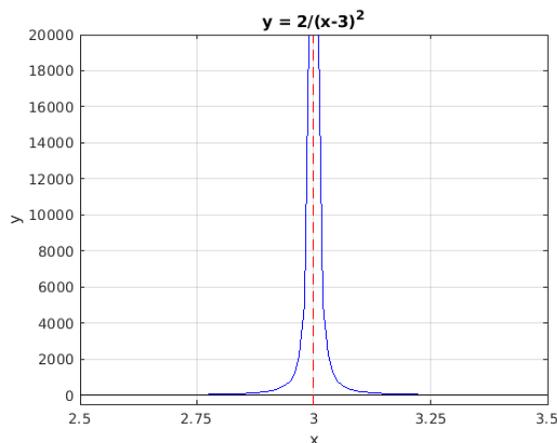


FIGURE 3.13 – Le graphe de $f(x) = 2/(x-3)^2$. f croît sans limite supérieure lorsque x approche 3. La droite $x = 3$ est une asymptote verticale.

Exemple 3.4.11

Si $f(x) = \frac{2}{x^2-9}$, que se passe-t-il lorsque x approche 3? Remarquons que $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 3$.

Si x est très près de 3 avec $x > 3$ alors $x^2 - 9$ est très près de zéro avec $x^2 - 9 > 0$. Donc $2/(x^2 - 9) > 0$ est très grand car nous divisons par un très petit nombre. Si x est très près de 3 avec $x < 3$ alors $x^2 - 9$ est très près de zéro avec $x^2 - 9 < 0$. Donc $2/(x^2 - 9) < 0$ est très petit car nous divisons par un nombre négatif qui est très petit en valeur absolue.

Le graphe de f près de 3 que nous retrouvons à la figure 3.14 indique que la fonction f croît sans borne supérieure lorsque x approche 3 avec $x > 3$ et la fonction f décroît sans borne inférieure lorsque x approche 3 avec $x < 3$. La fonction $2/(x^2 - 9)$ ne tend pas vers plus l'infini ou moins l'infini lorsque x tend vers 3. ♣

Si f est une fonction qui n'est pas définie en un point c , l'exemple précédent suggère de considérer le comportement de cette fonction lorsque nous nous approchons de c avec des valeurs plus petites que c (i.e. par la gauche) ou des valeurs plus grandes que c (i.e. par la droite).

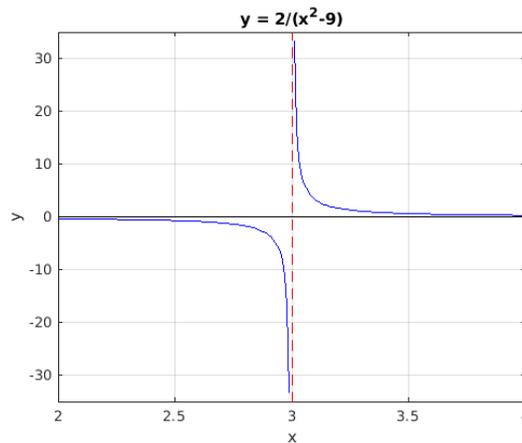


FIGURE 3.14 – Le graphe de $f(x) = 2/(x^2 - 9)$. f croît sans limite supérieure lorsque x approche 3 avec $x > 3$ et f décroît sans limite inférieure lorsque x approche 3 avec $x < 3$.

Définition 3.4.12

Soit f une fonction définie pour $x > c$. Nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n > c$ qui tend vers c . Nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque x converge par la droite vers c** . De même, nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty \quad (\text{resp. } -\infty).$$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $x_n < c$ qui tend vers c . Nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers plus l'infini (resp. moins l'infini) lorsque x converge par la gauche vers c** (figure 3.15).

Exemple 3.4.13

À l'exemple précédent, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{x^2 - 9} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x^2 - 9} = \infty.$$

La droite $x = 3$ est appelée une **asymptote verticale** pour f .



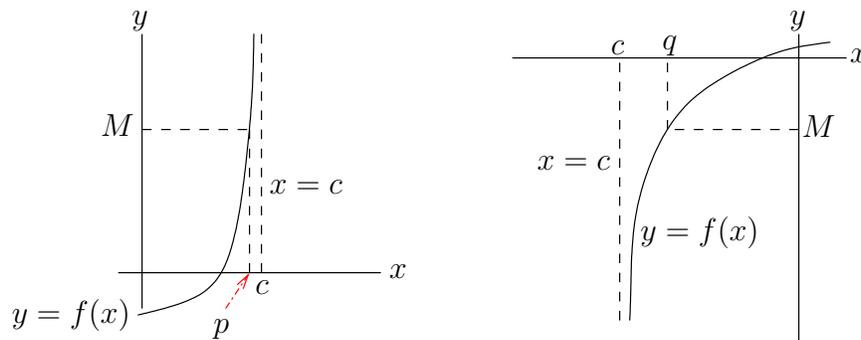


FIGURE 3.15 – Dans le graphe à de gauche $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$ alors que dans le graphe à de droite $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$.

3.4.1 Des définitions plus pratiques

Dans les exemples précédents, nous nous sommes inspiré du graphe de la fonction pour déterminer les limites à l'infini et les limites infinies en un point. Ce n'est pas une approche rigoureuse et elle dépend de notre capacité à tracer le graphe de la fonction. Il nous faut donc une définition de limite à l'infini et une définition de limite infinie en un point qui soient en accord avec la définition 3.1.8 de limite d'une fonction en un point en termes de ϵ et δ .

La définition 3.1.8 de la limite d'une fonction en un point (équivalent à celle donné à la définition 3.1.2) ne faisait pas appelle aux suites. Nous pouvons faire de même pour la définition de la limite d'une fonction à l'infini (définition 3.4.2) et la définition de la limite infinie d'une fonction en un point (définition 3.4.9).

Ce sont ces définitions qui nous permettent de déterminer rigoureusement si une limite à l'infini existe et qu'elle est cette limite, ou si une fonction à une limite infinie en un point.

Définition 3.4.14

Soit f une fonction définie pour x positif. Nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$$

et nous disons que $f(x)$ dent vers C lorsque x dent vers plus l'infini si la condition suivante est satisfaite. Il existe une unique constante C telle que, pour toute valeur $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver une constante $M > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) pour laquelle $f(x)$ est dans l'intervalle $]C - \epsilon, C + \epsilon[$ si $x > M$ (figure 3.16).

De façons semblables, nous pouvons définir la limite vers moins l'infini.

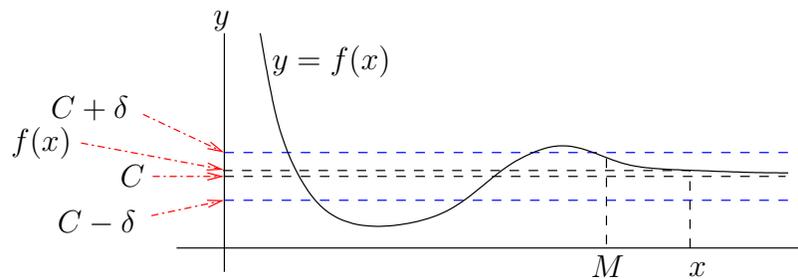


FIGURE 3.16 – La fonction f tend vers C lorsque x tend vers plus l'infini. Pour $\epsilon > 0$ donné, nous pouvons voir à partir du graphe de f qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x)$ est entre $C - \epsilon$ et $C + \epsilon$ si $x > M$.

Définition 3.4.15

Soit f une fonction définie pour x près d'un point c . Nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$$

et nous disons que $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers c si la condition suivante est satisfaite. Pour toute constante M , il existe une constante $\delta > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) > M$ lorsque x est dans l'intervalle $]c - \delta, c + \delta[$ (figure 3.17).

De façons semblables, nous pouvons définir la convergence vers moins l'infini, et les convergences à droite et à gauche vers plus ou moins l'infini.

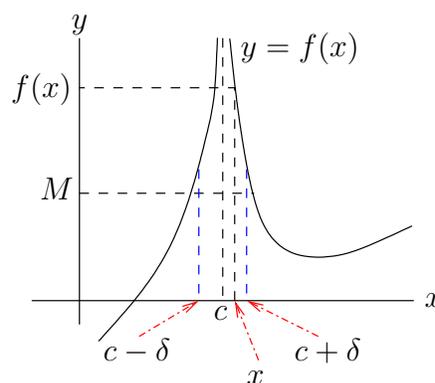


FIGURE 3.17 – La fonction f tend vers plus l'infini lorsque x tend vers c . Pour $M > 0$ donné, nous pouvons voir à partir du graphe de f qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > M$ si x est entre $c - \delta$ et $c + \delta$.

Exemple 3.4.16

Revenons à $f(x) = \frac{2}{x^2 - 9}$ que nous avons étudié précédemment. Montrons à l'aide des définitions précédentes que

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty .$$

Prenons un très grand nombre M (e.g. $M = 10^6$). Existe-t-il un nombre $\delta > 0$ tel que

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 9} > M$$

lorsque $3 < x < 3 + \delta$? Cherchons les valeurs de $x > 3$ telles que $\frac{2}{x^2 - 9} > M$; c'est-à-dire, telles que $x^2 < 9 + 2/M$. Il faut donc que

$$3 < x < \sqrt{9 + 2/M} = 3 + \left(\sqrt{9 + 2/M} - 3 \right) .$$

Si $\delta = \sqrt{9 + 2/M} - 3$, alors $\delta > 0$ car $M > 0$. De plus, $f(x) > M$ pour $3 < x < 3 + \delta$. Le lecteur est invité à calculer δ pour une valeur M de son choix. Nous venons de montrer que quel que soit $M > 0$, nous pouvons toujours trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $f(x) > M$ pour $3 < x < 3 + \delta$. Ce qui prouve bien que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend par la droite vers 3.

De même, prenons un très petit nombre M (e.g. $M = -10^8$). Existe-t-il un nombre $\delta > 0$ tel que

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 9} > M$$

lorsque $3 - \delta < x < 3$? Cherchons les valeurs de x entre 0 et 3 telles que $\frac{2}{x^2 - 9} < M$; c'est-à-dire, telles que $x^2 > 9 + 2/M$. Il faut donc que

$$3 > x > \sqrt{9 + 2/M} = 3 - (3 - \sqrt{9 + 2/M})$$

où nous assumons que $M < -2/9$ pour que $9 + 2/M$ soit positif. Si $\delta = 3 - \sqrt{9 + 2/M}$, alors $\delta > 0$ car $M < -2/9$. De plus, $f(x) < M$ pour $3 - \delta < x < 3$. Nous venons de montrer que quel que soit $M < 0$, nous pouvons toujours trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $f(x) < M$ pour $3 > x > 3 - \delta$. Ce qui prouve bien que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend par la gauche vers 3. ♣

Exemple 3.4.17

Revenons au calcul de la limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right)$$

que nous avons étudié à l'exemple 3.4.8.

Démontrons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

à partir de notre définition de limite à l'infini. Soit $\epsilon > 0$ quelconque mais fixe. Si nous prenons $M = \frac{1}{4\epsilon^2}$, nous obtenons

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{1/(4\epsilon^2)}} = \epsilon$$

pour $x > M$. ♣

Pour terminer, nous considérons le cas où nous avons une limite infinie à l'infini.

Définition 3.4.18

Soit f une fonction définie pour x positif. Nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

et nous disons que $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers plus l'infini si pour toute constante $M > 0$ il existe une constante $m > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) > M$ lorsque $x > m$. De même, nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

et nous disons que $f(x)$ tend vers moins l'infini lorsque x tend vers plus l'infini si pour toute constante $M < 0$ il existe une constante $m > 0$ (qui peut dépendre de M) pour laquelle $f(x) < M$ lorsque $x > m$.

De façons semblables, nous pouvons définir la convergence de $f(x)$ vers plus l'infini ou moins l'infini lorsque x converge vers moins l'infini.

3.4.2 Comportement asymptotique semblable

Définition 3.4.19

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers l'infini lorsque x tend vers c . Nous disons que f et g ont un **comportement asymptotique semblable** lorsque x tend vers c si

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Si f et g ont un comportement asymptotique semblable près de c , alors $f(x) \approx g(x)$ pour x très près de c . Ainsi, les fonctions f et g ont des graphes semblables pour x près de c .

De même,

Définition 3.4.20

Deux fonctions f et g ont un **comportement asymptotique semblable** lorsque x tend vers plus l'infini (resp. moins l'infini) si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1) .$$

Exemple 3.4.21

À l'exemple 3.4.3, nous avons montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 5$ où $g(x) = 5 + e^{2-x/10}$. Si nous posons $f(x) = 5$ pour tout x , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

Donc g et f ont des graphes semblables lorsque x est très grand. ♣

Nous reviendrons sur l'étude du comportement asymptotique des fonctions à la section 5.6.

3.5 Exercices

3.5.1 Limites

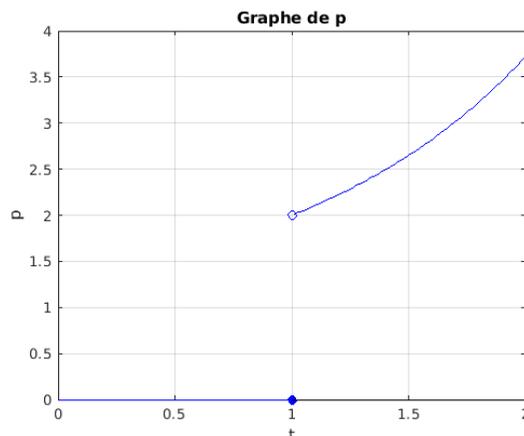
Question 3.1

Utilisez une approche numérique et une approche graphique (c'est-à-dire que vous devez utiliser un logiciel ou une calculatrice graphique pour tracer le graphe) pour trouver la valeur de la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} .$$

Question 3.2

Le graphe de la fonction p est donné ci-dessous.



Évaluez graphiquement $\lim_{t \rightarrow 1^-} p(t)$, $\lim_{t \rightarrow 1^+} p(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 1} p(t)$ si cela est possible.

Question 3.3

À l'aide de suites de valeurs numériques, estimez la valeur des limites suivantes.

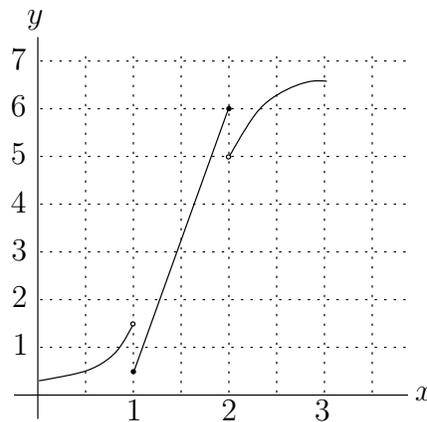
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$$

Question 3.4

Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$. Pour quelles valeurs de x aurons-nous que $\sqrt{x} < 0.1$? Que $\sqrt{x} < 0.01$? Est-ce que \sqrt{x} approche rapidement 0 lorsque $x > 0$ approche 0?

Question 3.5

Le graphe de la fonction f est donné ci-dessous.



Calculez les limites à droite et à gauche aux points $x = 1$ et $x = 2$. Est-ce que la limite de la fonction existe aux points $x = 1$ et $x = 2$?

Question 3.6

Soit $v(t) = 1 + t^2$. Évaluez la limite $\lim_{t \rightarrow 0} v(t)$. Soit α la valeur de cette limite.

1. Pour quelles valeurs de t aurons-nous que $|v(t) - \alpha| < 1$?
2. Pour quelles valeurs de t aurons-nous que $|v(t) - \alpha| < 0.5$?
3. Pour quelles valeurs de t aurons-nous que $|v(t) - \alpha| < 0.01$?

Question 3.7

Évaluez si possible la limite $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x)$.

Question 3.8

La fonction de Heaviside est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Est-ce que $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 1$? Justifiez votre réponse.

3.5.2 Fonctions continues

Question 3.9

Déterminez si les limites suivantes existent. Évaluez la limite quand elle existe.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t+t^2}{1+t} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+x} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{2+\sqrt{2x^2-4}} \\ \text{d)} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z}{1+\ln(1+z)} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(\pi/x)}{x^2-5} & \end{array}$$

Question 3.10

Déterminez si les limites suivantes existent. Évaluez la limite quand elle existe.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x^2-25} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-\sqrt{9-3x}}{8x} \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2|-1}{x^2-1} & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+3|(5+x)}{x+3} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4+3x^2-8}{12x^2-11x-1} \end{array}$$

Question 3.11 🌲

Le volume d'une culture au temps t en secondes est donnée par la formule $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$ ml où $V_0 = V(0) = 1$ ml est le volume initial. Sachant que le volume est de 2.71828 ml après 1000 secondes (i.e. $V(1000) = 2.71828$ ml), trouvez α . Déterminez les valeurs de t pour lesquelles le volume $V(t)$ après t secondes est 2.71828 ml avec une marge d'erreur de 0.1 ml. C'est-à-dire, trouvez t tel que $2.71828 - 0.1 < V(t) < 2.71828 + 0.1$.

Question 3.12

Donnez une formule mathématique pour définir la fonction continue f telle que $f(x) = -1$ pour $x < -0.1$, $f(x) = 1$ pour $x > 0.1$, et $f(x)$ est linéaire pour $-0.1 < x < 0.1$.

Question 3.13 🌲

Un neurone a la réaction suivante lorsqu'il reçoit une impulsion électrique. Si le voltage V de l'impulsion électrique est supérieure à une valeur V_0 , le neurone produit une impulsion électrique de voltage $2V$. Au contraire, si le voltage V de l'impulsion électrique est inférieure à cette valeur V_0 , le neurone produit une impulsion électrique de voltage V_1 . Donnez une formule mathématique pour la réponse du neurone à une impulsion électrique? Si nous savons que la réponse du neurone à une impulsion électrique est une fonction continue, quelle doit être la valeur de V_1 ?

Question 3.14

Soit

$$f(x) = \begin{cases} a \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x < 3 \\ \frac{x^2}{2} - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Trouvez la valeur de a pour que f soit continue sur la droite réelle. Donnez une justification claire et complète.

Question 3.15

Soit

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4x & \text{si } x < 3 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Trouvez la valeur de a pour que f soit continue sur la droite réelle. Donnez une justification claire et complète.

Question 3.16

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ ax^2 + x + b & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ b\sqrt{x} + \frac{5ax}{2} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Trouvez les valeurs de a et b pour que f soit continue sur la droite réelle. Donnez une justification claire et complète.

Question 3.17 🌲 🔧

Utilisez le Théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que l'équation $e^x + x^2 - 2 = x$ a au moins une solution.

Question 3.18

Montrez qu'il existe au moins une solution de l'équation suivante sur l'intervalle donnée. Ne pas oublier d'indiquer le théorème que vous avez utilisé et de vérifier que ses hypothèses sont satisfaites.

a) $\tan(x) + 4x = x^2 + e^x$ sur $[0, \pi/4]$

b) $e^{\cos(x/2)} = 2 \sin(x/2)$ sur $[0, \pi]$

Question 3.19 ✍️

Le prix de l'essence a augmenté de \$2.10 à \$2.50 par litre au cours de la semaine passée, pouvons-nous conclure à l'aide du Théorème des valeurs intermédiaires que le prix de l'essence a été de \$2.25 le litre à un moment au cours de la semaine passée? Justifiez votre réponse.

3.5.3 Limites à l'infini et limites infinies**Question 3.20** ✍️

Un diapason est un petit instrument en acier qui a la forme d'une fourche et qui produit (approximativement) la note **La** lorsqu'il vibre. La fréquence x (en hertz) d'un bon diapason devrait être très proche de la fréquence exacte du **La** qui est de 440 hertz. Une marque de diapason coûte $5/|x - 440|$ dollars où x est la fréquence du diapason. Combien coûtera un tel diapason si nous demandons une précision de 0.1%? De 0.01%? Pouvons-nous se permettre un diapason parfait?

Question 3.21

Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Pour quelles valeurs de x aurons-nous que $\frac{1}{\sqrt{x}} > 10$? Que

$\frac{1}{\sqrt{x}} > 100$? Est-ce que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ croît rapidement ou lentement lorsque $x > 0$ approche 0?

Question 3.22

Utilisez des suites pour évaluer $\lim_{t \rightarrow 1} (1 - t)^{-4}$.

Question 3.23

Évaluez numériquement la limite suivante.

$$\lim_{y \rightarrow 1^+} y^2 \ln(y - 1) .$$

Question 3.24

Déterminez si les limites suivantes existent. Évaluez celles qui existent. Pour celles qui n'existent pas, expliquez pourquoi.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 4}{3x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - (8x^3 + 3)^{1/3}}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 7x})$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x} - e^{-3x}}{3e^{2x} - 4e^{-5x}}$

Question 3.25 🌲 🔧

Évaluez si possible la limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(x)}{1 + x^2}$.



Nous définissons dans ce chapitre la dérivée d'une fonction. Nous présentons quelques unes des propriétés importantes de la dérivée d'une fonction ainsi que les principales techniques pour calculer facilement la dérivée d'une fonction. Quelques applications de la dérivée seront fournies au prochain chapitre.

4.1 Étude du graphe et comportement d'une fonction

Avant de définir ce qu'est la dérivée d'une fonction, un des piliers du calcul différentiel et intégral, et de plonger dans l'étude de la dérivée d'une fonction, nous énonçons quelques propriétés des fonctions que la dérivée nous permettra de déterminer.

La dérivée est un outil pour l'étude des fonctions. Lorsque nous parlons de l'étude des fonctions, nous parlons de l'étude du graphe et du comportement des fonctions sur leur domaine. Nous cherchons les caractéristiques marquantes des fonctions. Quelques unes des caractéristiques qu'une fonction peut avoir sont énoncées dans les trois prochaines définitions.

Définition 4.1.1

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f est **strictement croissante** si $f(x) < f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
2. La fonction f est **croissante** si $f(x) \leq f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
3. La fonction f est **strictement décroissante** si $f(x) > f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.
4. La fonction f est **décroissante** si $f(x) \geq f(y)$ pour tout x et y dans l'intervalle $]a, b[$ tels que $x < y$.

Définition 4.1.2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f a un **maximum local** au point c si $f(x) < f(c)$ pour tout $x \neq c$

suffisamment près de c .

2. La fonction f a un **minimum local** au point c si $f(x) > f(c)$ pour tout $x \neq c$ suffisamment près de c .

Définition 4.1.3

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. La fonction f a un **maximum global ou absolu** s'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > f(x)$ pour tout $x \neq c$ dans $[a, b]$. La valeur $f(c)$ est le maximum global de f sur $[a, b]$.
2. La fonction f a un **minimum global ou absolu** s'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) < f(x)$ pour tout $x \neq c$ dans $[a, b]$. La valeur $f(c)$ est le minimum global de f sur $[a, b]$.

Exemple 4.1.4

Considérons la fonction continue dont le graphe est donné à la figure 4.1. Quelques unes des caractéristiques de cette fonction sont :

1. La fonction f a un maximum absolu au point c car $f(x) < f(c)$ pour tout $x \neq c$. La valeur $f(c)$ est le maximum absolu de f . Cela implique aussi que f a un maximum local au point c .
2. La fonction f a un minimum local au point e car $f(x) > f(e)$ pour tout x près de e , $x \neq e$. Ce n'est pas un minimum absolu car il y a des valeurs de x pour lesquelles $f(x) < f(e)$; par exemple, $f(a) < f(e)$.
3. La fonction f est strictement croissante pour $x < c$ car $f(x_1) < f(x_2)$ pour tous $x_1 < x_2 < c$. De même, la fonction f est strictement croissante pour $x > e$. Par contre, la fonction f est strictement décroissante pour x entre c et e car $f(x_1) > f(x_2)$ pour tout $a < x_1 < x_2 < c$.
4. $f(x)$ approche la valeur Y lorsque x devient de plus en plus grand. La droite $y = Y$ est une asymptote horizontale pour f lorsque x tend vers plus l'infini.



Nous verrons plus tard d'autres caractéristiques que les fonctions peuvent avoir.

Si nous observons minutieusement l'exemple précédent, nous remarquons que la fonction f est strictement croissante au point x si la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est positive, la fonction f est strictement décroissante au point x si la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est négative, la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est zéro lorsque la fonction f a un maximum local au point x , et ainsi de suite. La pente des droites tangentes au graphe d'une fonction semble donc déterminer les caractéristiques importantes d'une fonction. Il serait donc important de pouvoir facilement calculer la pente des tangentes au graphe d'une fonction. La dérivée est l'outil qui nous permettra de facilement calculer la pente des tangentes au graphe d'une fonction. Ainsi, elle nous permettra de trouver les

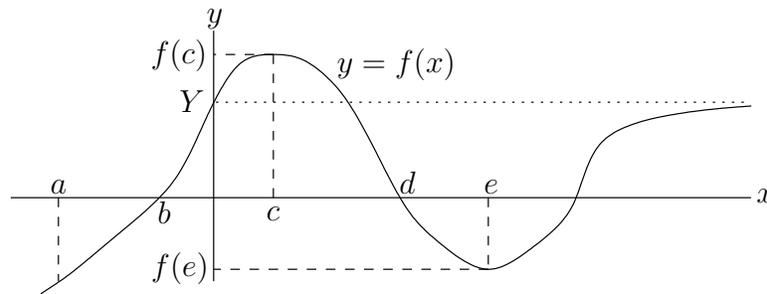


FIGURE 4.1 – À l'exemple 4.1.4, nous déterminons certaines caractéristiques de la fonction qui possède ce graphe.

minimums et maximums locaux d'une fonction, les intervalles de croissance et décroissance d'une fonction, et encore plus.

Naturellement, il faut définir ce qu'est une droite tangente au graphe d'une fonction en un point du graphe. En fait, cela n'est pas aussi évident que nous pourrions l'imaginer comme nous allons voir prochainement. Nous allons voir que définir ce qu'est la droite tangente au graphe d'une fonction en un point du graphe revient à définir la dérivée de la fonction en ce point.

4.2 Taux de variation d'une fonction

Définition 4.2.1

Si f est une fonction dont le domaine inclut l'intervalle $[a, b]$, le **taux de variation moyen** de f entre a et b est $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Exemple 4.2.2

Suite à une expérience de laboratoire sur une culture de bactéries dans un milieu qui ne leur est pas favorable, nous observons que la fonction $g(t) = 50 e^{-2t}$ représente le nombre de bactéries par cm^3 au temps t en heures.

Cette formule demande quelques clarifications. Remarquons que g peut retourner des valeurs réelles qui ne sont pas des entiers. Cela ne semble pas « rationnel » car nous ne pouvons pas avoir une fraction de bactérie (e.g. nous ne pouvons pas avoir un dixième de bactérie). Il faut comprendre que g retourne un nombre moyen de bactéries par cm^3 dans un contenant qui pourrait avoir 10 cm^3 par exemple. De plus, dans nos exemples, nous utiliserons des petites valeurs pour le nombre de bactéries. Ce qui ne correspond pas à la réalité. Il faudrait généralement multiplier le nombre de bactéries par un facteur de 10^9 pour être plus prêt de la réalité. Cependant, dans le but de ne pas alourdir le texte, nous avons

choisi d'utiliser de petites valeurs. Malgré cela, le graphe de g (figure 4.2) est une très bonne représentation du nombre de bactéries par cm^3 en fonction du temps t en heures.

Le taux de variation moyen du nombre de bactéries entre $t = 0$ et $t = 10$ est

$$\frac{g(10) - g(0)}{10 - 0} = \frac{50 e^{-20} - 50}{10 - 0} \approx -5.0000$$

bactéries par cm^3 par heure. C'est-à-dire que le nombre de bactéries décroît en moyenne de 5 bactéries par cm^3 par heure pendant les dix premières heures. Nous disons que la population de bactéries a un taux de croissance moyen de -5 bactéries par cm^3 par heure. Nous aurions pu parler de décroissance mais la tradition veut que nous parlions de croissance négative.

Si nous regardons le graphe de g , nous voyons que la population de bactéries décroît plus rapidement dans les premières heures. Par exemple, le taux de croissance moyen de la population de bactéries entre $t = 0$ et $t = 3$ est

$$\frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{50 e^{-6} - 50}{3 - 0} \approx -16.625$$

bactéries par cm^3 par heure. Le nombre de bactéries décroît donc en moyenne de 16.625 bactéries par cm^3 par heure pendant les trois premières heures.

La population de bactéries a théoriquement disparu après 10 heures car il reste

$$g(10) = 50 e^{-20} \approx 1.0306 \times 10^{-7}$$

bactéries par cm^3 après 10 heures. ♣

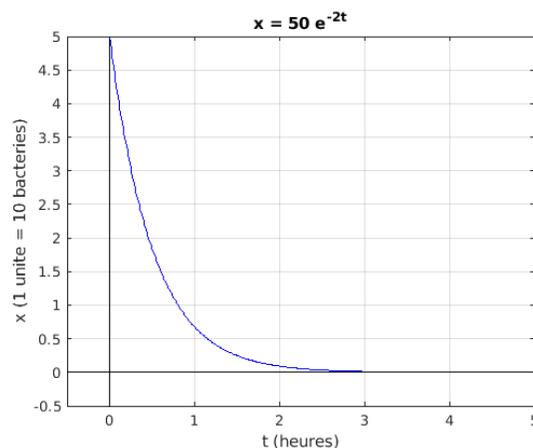


FIGURE 4.2 – Graphe de $x = 50 e^{-2t}$ pour $0 \leq t \leq 5$ heures.

Qu'arrivera-t-il si nous calculons les taux de variation moyens sur des intervalles $[a, b]$ de plus en plus petit ; c'est-à-dire, pour lesquelles b tend vers a ?

Exemple 4.2.3

Revenons à l'exemple précédent au sujet d'une population de bactéries. Si nous calculons le taux de croissance moyen (i.e. le taux de variation moyen) sur des intervalles $[a, b]$ où $a = 1$ et b est de plus en plus près de a , nous obtenons les données suivantes.

a heures	b heures	$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$ bactéries par cm^3 par heure
1	2	-5.8509822...
1	1.5	-8.5548214...
1	1.1	-12.2660624...
1	1.01	-13.3990907...
1	1.001	-13.5200038...
1	1.0001	-13.5321750...
1	1.00001	-13.5333929...
1	1.000001	-13.5335147...
1	1.0000001	-13.5335269...

Comme le taux de croissance moyen n'a pas vraiment le temps de changer entre $t = 1$ et $t = 1.0000001$ heure, nous pouvons dire que le taux de croissance à $t = 1$ heure est approximativement -13.5335269 bactéries par cm^3 par heure. Nous pourrions prendre des intervalles $[a, b]$ où $a = 1$ et b est encore plus près de 1 que 1.0000001. Si nous faisons cela, nous trouvons que le taux de croissance moyen (i.e. le taux de variation moyen) approche $-13.53352832\dots$ bactéries par cm^3 par heure. Cette dernière valeur est le **taux de variation instantané** du nombre de bactéries à $t = 1$ heure. Nous définissons le **taux de croissance** de la population de bactéries à $t = 1$ heure comme étant ce taux de variation instantané.

Nous aurions pu calculer des taux de variation moyens pour des intervalles de la forme $[b, a]$, où $b < a$ tend vers a . Nous aurions trouvé le même taux de variation instantané. ♣

Définition 4.2.4

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $a \in \mathbb{R}$, le **taux de variation instantané** de f au point a est la valeur M unique (si une telle valeur existe) telle que le taux de variation moyen $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ tend vers M lorsque b tend vers a avec b plus petit ou plus grand que a .

Remarquons que le taux de variation moyen

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

est aussi la pente de la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Une droite qui passe par au moins deux points d'une courbe est une **sécante**.

Exemple 4.2.5

Pour la population de bactéries étudiée précédemment, nous avons tracé à la figure 4.3 les sécantes qui passent par les points suivants.

1. $(1, 50 e^{-2})$ et $(4, 50 e^{-8})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \frac{50 e^{-8} - 50 e^{-2}}{4 - 1} = -2.24999701 \dots$$

2. $(1, 50 e^{-2})$ et $(3, 50 e^{-6})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{50 e^{-6} - 50 e^{-2}}{3 - 1} = -3.321413276 \dots$$

3. $(1, 50 e^{-2})$ et $(2, 50 e^{-4})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \frac{50 e^{-4} - 50 e^{-2}}{2 - 1} = -5.850982217 \dots$$

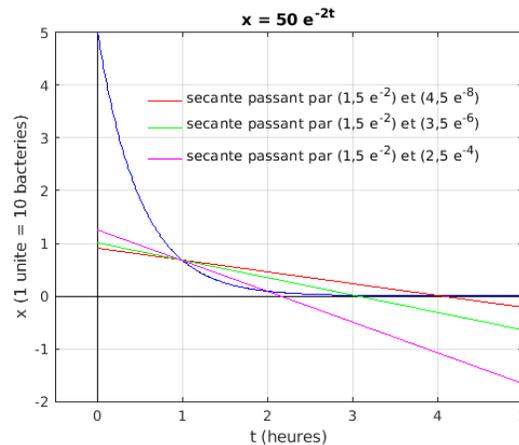


FIGURE 4.3 – Quelques sécantes du graphe de $x = 50 e^{-2t}$.

Que devient la sécante qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ si b est de plus en plus près de a ? L'exemple suivant va fournir une réponse à cette question.

Exemple 4.2.6

Toujours pour la population de bactéries de l'exemple 4.2.2, nous avons tracé à la figure 4.4 les sécantes qui passent par les points suivants.

1. $(1, 50 e^{-2})$ et $(1.1, 50 e^{-2.2})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(1.1) - g(1)}{1.1 - 1} = \frac{50 e^{-2.2} - 50 e^{-2}}{1.1 - 1} = -12.2660624 \dots$$

2. $(1, 50 e^{-2})$ et $(1.001, 51 e^{-2.002})$ donnent une droite de pente

$$\frac{g(1.001) - g(1)}{1.001 - 1} = \frac{50 e^{-2.002} - 50 e^{-2}}{1.001 - 1} = -13.5200038 \dots$$

Remarquons que, pour des valeurs de b très près de $a = 1$, il devient de plus en plus difficile de différencier le graphe de la fonction g dans le voisinage de $x = 1$ de la sécante qui passe par les points $(a, g(a)) = (1, g(1))$ et $(b, g(b))$. À la limite, ces sécantes approchent une droite que nous ne pouvons dissocier de la courbe $x = g(t)$ pour t assez près de $t = 1$. Cette droite est appelée la droite tangente à la courbe au point $(1, g(1))$. La pente de cette droite est la valeur limite des pentes des sécantes qui passent par $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$ lorsque que b tend vers $a = 1$. Dans le cas présent, cette pente est $-13.53352832\dots$ que nous avons trouvée à l'exemple 4.2.3. ♣

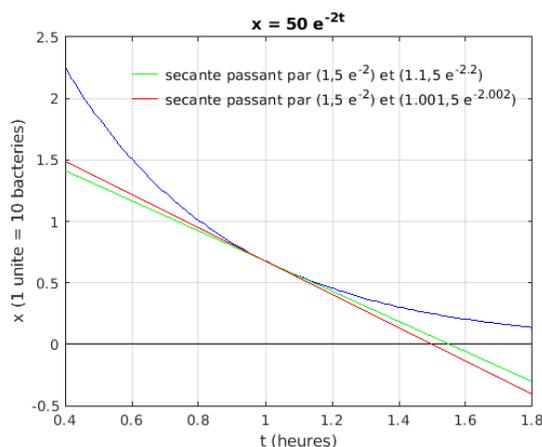


FIGURE 4.4 – La sécante qui passe par $(1, 50e^{-2})$ et $(1.001, 50e^{-2.002})$ se confond à la courbe $x = 50e^{-2t}$ pour t très près de $t = 1$ heure.

Définition 4.2.7

Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient $a \in \mathbb{R}$. La droite

$$y = h(x) = f(a) + M(x - a),$$

où M est le taux de variation instantané de f à $x = a$, est la **droite tangente** à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$.

Nous avons que la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a .

Au moment de donner la définition de la dérivée d'une fonction en un point, nous donnons un sens mathématique à « la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a ».

En résumé, lorsque b approche a , la sécante qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ approche une droite qui passe par $(a, f(a))$ et qui est indissociable (presque superposée) à la courbe $y = f(x)$ pour x assez près de $x = a$. Cette droite limite est la droite tangente que nous venons de définir.

4.3 Dérivée d'une fonction en un point

La **dérivée** d'une fonction f en un point n'est rien d'autre que le taux de variation instantané de f à ce point.

Avec la définition de limite d'une fonction en un point, nous pouvons donner un sens mathématique au taux de variation instantané de f au point a . À la section 4.2, nous avons défini le taux de variation instantané de f au point a comme étant le nombre M tel que le taux de variation moyen $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ approche M lorsque b approche a où b peut être plus petit ou plus grand que a . En termes mathématiques, l'énoncé précédent est simplement

$$M = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nous obtenons la définition suivante.

Définition 4.3.1

Soit f une fonction définie dans un voisinage de a incluant le point a . La **dérivée de f au point a** , dénotée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$, est

$$f'(a) \equiv \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si cette limite existe.

La limite précédente est équivalente à

$$f'(a) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si cette limite existe. Il suffit de substituer $x = a + h$ dans la première limite pour obtenir la deuxième et de substituer $h = x - a$ dans la deuxième limite pour obtenir la première. Nous avons que x approche a si et seulement si $h = x - a$ approche 0. Notez que h peut être plus petit ou plus grand que 0.

Exemple 4.3.2

À l'exemple 4.2.3, nous avons montré numériquement que

$$g'(1) = -13.53352832 \dots \quad \text{bactéries par cm}^3/\text{heure}$$

où $g(t) = 50e^{-2t}$.



Pour l'exemple qui suit, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 4.3.3

Le **taux de croissance relatif** d'une population au temps t est

$$\frac{\text{taux de croissance instantané (au temps } t)}{\text{nombre d'individus dans la population (au temps } t)}.$$

En d'autres mots, si $p(t)$ est le nombre d'individus au temps t , le taux de croissance relatif au temps t est $\frac{p'(t)}{p(t)}$.

Exemple 4.3.4

Estimons le taux de croissance relatif à $t = 1$ et $t = 2$ d'une population dont le nombre d'individus au temps t (en heures) est donnée par $p(t) = 2^t$.

Commençons par estimer $p'(1)$, le taux de croissance instantané à $t = 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{p(1.01) - p(1)}{0.01} &= \frac{2^{1.01} - 2}{0.01} \approx 1.3911100, & \frac{p(1.001) - p(1)}{0.001} &= \frac{2^{1.001} - 2}{0.001} \approx 1.386774925, \\ \frac{p(1.0001) - p(1)}{0.0001} &= \frac{2^{1.0001} - 2}{0.0001} \approx 1.386342407529995, & \dots &\rightarrow 1.3862943611\dots \end{aligned}$$

Donc $p'(1) = 1.3862943611\dots$

De même, nous pouvons estimer $p'(2)$, le taux de croissance instantané à $t = 2$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{p(2.01) - p(2)}{0.01} &= \frac{2^{2.01} - 4}{0.01} \approx 2.7822200, & \frac{p(2.001) - p(2)}{0.001} &= \frac{2^{2.001} - 4}{0.001} \approx 2.773549850, \\ \frac{p(2.0001) - p(2)}{0.0001} &= \frac{2^{2.0001} - 4}{0.0001} \approx 2.7726848151, & \dots &\rightarrow 2.772588722\dots \end{aligned}$$

Donc $p'(2) = 2.772588722\dots$

Le taux de croissance relatif à $t = 1$ est

$$\frac{p'(1)}{p(1)} = \frac{1.3862943611\dots}{2} = 0.693147180559945\dots$$

et le taux de croissance relatif à $t = 2$ est

$$\frac{p'(2)}{p(2)} = \frac{2.772588722\dots}{4} = 0.693147180559945\dots$$

Est-ce que $\frac{p'(t)}{p(t)} = 0.693147180559945\dots$ pour tout t ? Nous verrons prochainement que la réponse est affirmative. 

Si

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

alors

$$f'(a) \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

pour x près de a . Si nous résolvons cette relation pour $f(x)$, nous trouvons

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (4.3.1)$$

Le côté droit de cette relation n'est nul autre que l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ définie à la section 4.2 car $f'(a)$ est le taux de variation instantané. Donc $f'(a)$ est la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$.

Nous retrouvons à la figure 4.5 un résumé de l'interprétation graphique de la dérivée.

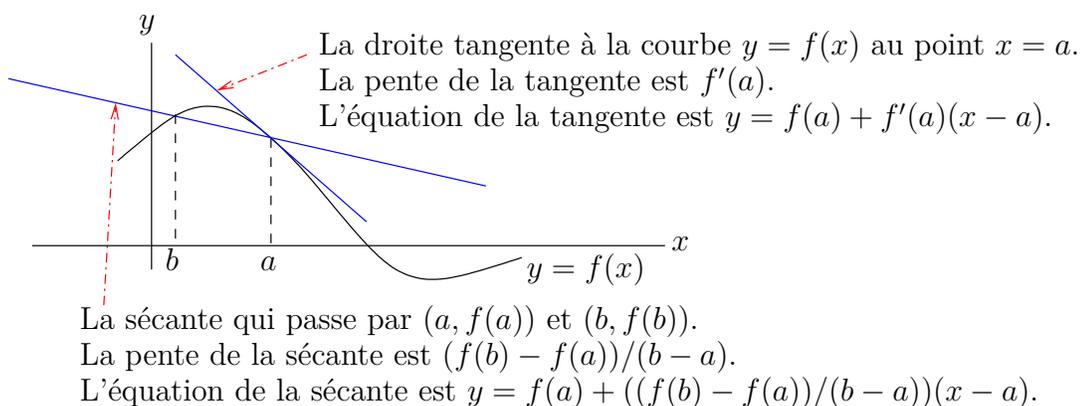


FIGURE 4.5 – Interprétation graphique de la dérivée d'une fonction f au point $x = a$

Proposition 4.3.5

Si f est une fonction différentiable au point a , alors

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

pour x très près de a .

L'équation de la droite tangente est une formule simple pour estimer la fonction f au voisinage du point $x = a$ (figure 4.6). L'approximation de fonctions compliquées à l'aide de droites tangentes ou de polynômes sera abordé dans une prochaine section.

Remarque 4.3.6

En Analyse Mathématique, nous définissons la dérivée d'une fonction f au point a de la façon suivante.

Définition 4.3.7

Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La dérivée de la fonction f au point a est le nombre $f'(a)$ qui satisfait

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)|}{|x - a|} = 0. \quad (4.3.2)$$

Cette définition de la dérivée est équivalent à la définition de la dérivée que nous avons donnée. En effet, puisque

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right|$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = 0,$$

nous déduisons que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)|}{|x - a|} = 0.$$

Il découle de cette définition que, lorsque x approche a , la distance entre $f(x)$ et $f(a) + f'(a)(x - a)$ approche 0 plus vite que la distance entre x et a (figure 4.6). Cette propriété explique les énoncés « la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = h(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ sont presque superposées lorsque nous considérons des valeurs de x assez près de $x = a$ » et « la distance entre $f(x)$ et $h(x)$ devient de plus en plus petite lorsque x approche a ». ♠

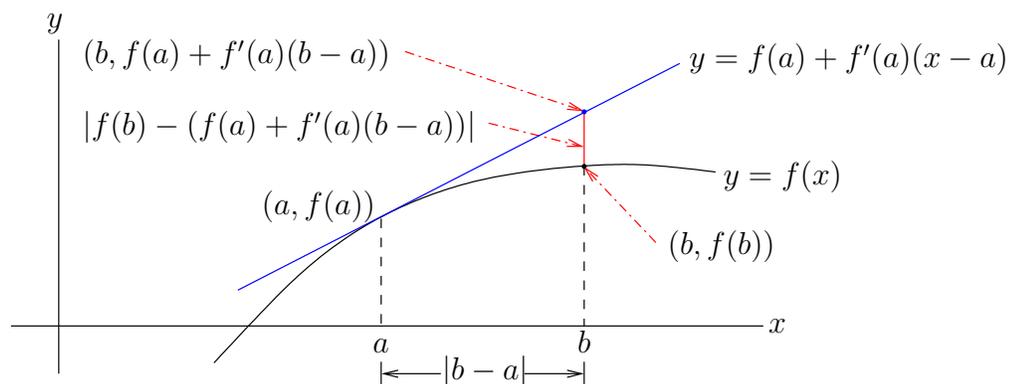


FIGURE 4.6 – Distance entre la courbe $y = f(x)$ et la droite tangente $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ à $x = b$. La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ a une pente de $f'(a)$, le taux de variation instantané de f à $x = a$.

Remarque 4.3.8

Une fonction peut ne pas avoir de dérivée en un point. Prenons la fonction $g(x) = |x|$. La dérivée de g au point $x = 0$ n'existe pas. Les tableaux suivants donnent deux suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tendent vers 0. Dans le premier tableau, les valeurs $\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$ approchent 1 alors que dans le second tableau, les valeurs $\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$ approchent -1 .

n	$x_n = \frac{1}{n}$	$\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$	n	$x_n = -\frac{1}{n}$	$\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$
1	1	1	1	-1	-1
2	1/2	1	2	-1/2	-1
3	1/3	1	3	-1/3	-1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
10000	1/10000	1	10000	-1/10000	-1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Nous ne pouvons pas trouver une valeur unique M telle que $\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0}$ approche M pour toute suite x_n qui approche 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ n'existe pas, et $g'(0)$ n'existe pas.

De plus, à partir du graphe de g à la figure 4.7, nous voyons qu'il n'y a pas de droite qui passe par $(0, g(0)) = (0, 0)$ et qui soit indissociable de la courbe $y = g(x) = |x|$ pour x assez près de 0 où x peut être inférieur ou supérieur à 0. Nous pouvons satisfaire la condition précédente pour $x < 0$ ou $x > 0$ séparément mais elle ne peut pas être satisfaite pour $x < 0$ et $x > 0$ en même temps. La droite $y = x$ est superposée à la courbe $y = g(x)$ pour $x > 0$ mais ne l'est pas pour $x < 0$. De même, la droite $y = -x$ est superposée à la courbe $y = g(x)$ pour $x < 0$ mais ne l'est pas pour $x > 0$. Les autres droites qui passent par $(0, 0)$ sont clairement distinctes de la courbe $y = g(x)$. ♠

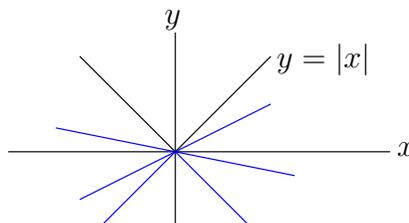


FIGURE 4.7 – Le graphe de $y = g(x) = |x|$. La fonction g n'a pas de dérivée à $x = 0$ car il n'y a pas de droite qui soit indissociable du graphe de g près de l'origine.

Remarque 4.3.9

Il n'est pas nécessaire que le graphe de la fonction ait un « coin » comme à la remarque

précédente pour que la fonction ne soit pas différentiable. La fonction f dont le graphe se trouve à la figure 4.8 n'est pas différentiable à $x = a$ car la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est verticale; elle a donc une pente infinie. ♠

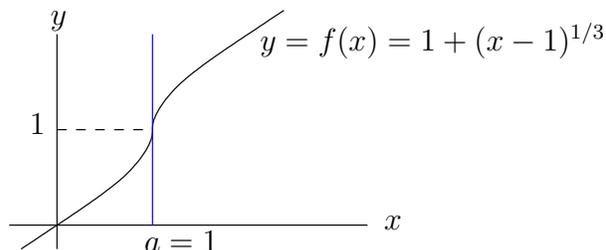


FIGURE 4.8 – La fonction f représentée par le graphe ci-dessus n'est pas différentiable à $x = a$ car la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est verticale.

4.4 Dérivée d'une fonction

À la section précédente, nous avons vu la définition de la dérivée $f'(a)$ d'une fonction f en un point a ; c'est-à-dire,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si la limite existe. Si nous calculons $f'(a)$ pour toutes les valeurs de a , nous obtenons la fonction qui, pour tout nombre réel a , donne la valeur $f'(a)$ de la dérivée de f au point a . Cette fonction est appelée la **dérivée de f** . Comme la tradition veut que nous utilisions x comme variable indépendante d'une fonction, nous obtenons la définition suivante.

Définition 4.4.1

La **dérivée** d'une fonction f est la fonction f' définie par

$$f'(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pour toutes les valeurs de x où la limite existe. Nous utilisons aussi la notation $\frac{df}{dx}$ pour désigner f' .

Puisque $f'(x)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$, nous en déduisons les propriétés suivantes.

Proposition 4.4.2

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$.

1. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ et la dérivée est positive en tout point de cet intervalle, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[$. La pente $f'(x)$ de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ est positive pour tout x entre a et b (figure 4.9).
2. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ et la dérivée est négative en tout point de cet intervalle, alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]a, b[$. La pente $f'(x)$ de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ est négative pour tout x entre a et b (figure 4.10).
3. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf possiblement au point c , et si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c , alors la fonction f a un maximum local à $x = c \in]a, b[$. La fonction f est strictement croissante pour $x < c$ près de c et strictement décroissante pour $x > c$ près de c (figure 4.11).
4. Si f est différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf possiblement au point c , et si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x > c$ près de c , alors la fonction f a un minimum local à $x = c \in]a, b[$. La fonction f est strictement décroissante pour $x < c$ près de c et strictement croissante pour $x > c$ près de c (figure 4.12).

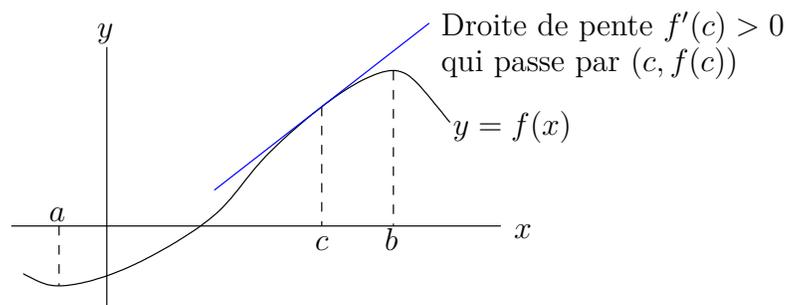


FIGURE 4.9 – $f'(x) > 0$ pour $a < x < b$ entraîne que la fonction f est strictement croissante pour $a < x < b$.

Exemple 4.4.3

La fonction f dont le graphe est donné à la figure 4.1 est strictement croissante pour $x < c$ et $x > e$; ce sont les intervalles où $f'(x) > 0$. De même, f est strictement décroissante pour $c < x < e$; c'est l'intervalle où $f'(x) < 0$. Nous avons un maximum local à $x = c$ qui est prédit par $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c . Finalement, nous avons un minimum local à $x = e$ qui est prédit par $f'(x) < 0$ pour $x < e$ près de e et $f'(x) > 0$ pour $x > e$ près de e . ♣

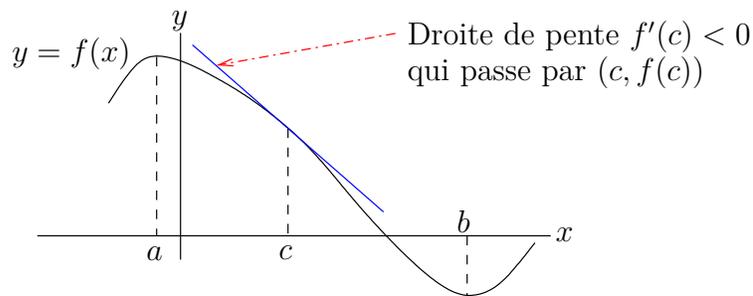


FIGURE 4.10 – $f'(x) < 0$ pour $a < x < b$ entraîne que la fonction f est strictement décroissante pour $a < x < b$.

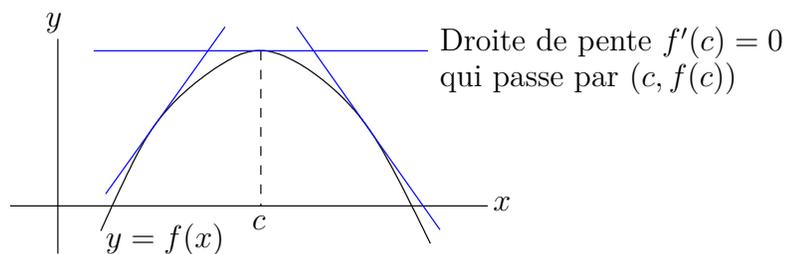


FIGURE 4.11 – La fonction f a un maximum local à $x = c$ car $f'(x) < 0$ pour $x > c$ et $f'(x) > 0$ pour $x < c$.

Remarque 4.4.4

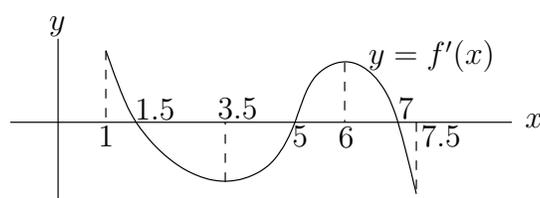
Si f' est une fonction continue, puisque f' change de signe à un maximum ou un minimum local c , nous devons avoir $f'(c) = 0$. Par contre, $f'(c) = 0$ n'implique pas que nous ayons un maximum ou minimum local comme c'est le cas pour la fonction f dont le graphe est donné à la figure 4.13.

De plus, f peut ne pas avoir de dérivée à un maximum ou minimum local comme c'est le cas pour la fonction f dont le graphe est donné à la figure 4.14.

Nous reviendrons plus en détails sur ce sujet au chapitre sur les applications de la dérivée. ♠

Exemple 4.4.5

Le graphe de f' est donné ci-dessous.



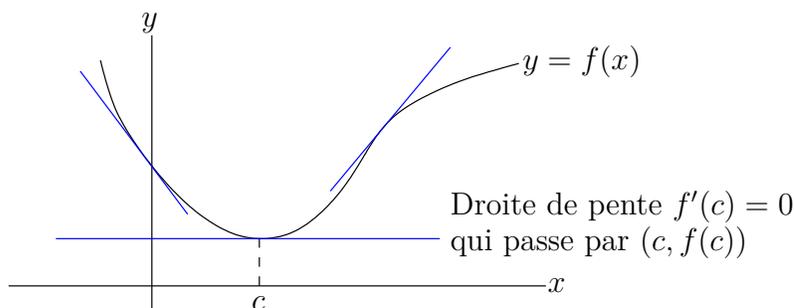


FIGURE 4.12 – La fonction f a un minimum local à $x = c$ car $f'(x) > 0$ pour $x > c$ et $f'(x) < 0$ pour $x < c$.

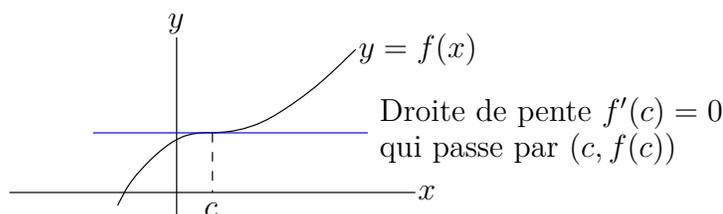


FIGURE 4.13 – $f'(c) = 0$ mais il n'y a pas de minimum ou maximum local à $x = c$.

Si nous savons que $f(1) = 3$, nous pouvons dessiner un graphe approximatif de f à partir de l'information fournie par le graphe de f' .

Entre 1 et 1.5, la fonction est strictement croissante car f' est positive. Plus précisément, comme f' décroît lorsque x augmente de 1 à 1.5, la pente de f est de moins en moins abrupte lorsque x augmente de 1 à 1.5 et la fonction f croît donc de moins en moins rapidement.

Entre 1.5 et 5, la fonction f est strictement décroissante car f' est négative. Plus précisément, comme f' décroît lorsque x augmente de 1.5 à 3.5, la pente de f devient de plus en plus abrupte et f décroît donc de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 1.5 à 3.5. Par contre, f' augmente lorsque x augmente de 3.5 à 5. Ainsi, la pente de f devient de moins en moins abrupte et donc f décroît de moins en moins rapidement lorsque x augmente de 3.5 à 5.

En raisonnant comme nous l'avons fait aux paragraphes précédents, nous obtenons que f croît de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 5 à 6, et de moins en moins rapidement lorsque x augmente de 6 à 7. Finalement, la fonction f décroît de plus en plus rapidement lorsque x augmente de 7 à 7.5.

Nous retrouvons ci-dessous un graphe possible pour f .

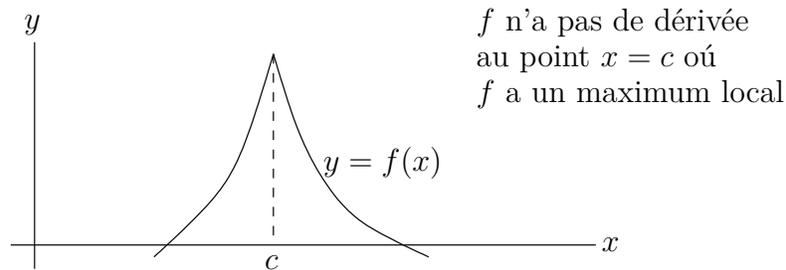
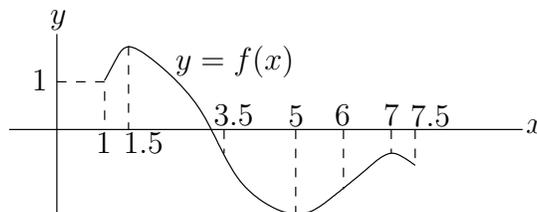


FIGURE 4.14 – Il y a un maximum local au point $x = c$ mais la fonction f n'a pas de dérivée à ce point.



Le théorème qui suit a généralement peu d'utilité du point de vue numérique. Par contre, il est très utile du point de vue conceptuelle comme les exemples qui suivront son énoncé vont démontrer.

Théorème 4.4.6 (Théorème de la moyenne / Théorème des accroissements finis)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiable sur l'intervalle $]a, b[$, alors il existe une valeur $\xi = \xi(a, b)$ entre a et b telle que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nous insistons sur le fait que ξ dépend de a et b (d'où la notation $\xi = \xi(a, b)$) et donc varie si a et b changent (figure 4.15).

Exemple 4.4.7

Si un train prend deux heures pour parcourir la distance de 200 km entre Ottawa à Montréal, sa vitesse moyenne est de 100 km/h. Alors il faut qu'à un moment durant le voyage la vitesse (instantanée) du train soit de 100 km/h. Si ce n'est pas le cas, cela implique que la plus grande vitesse du train durant le voyage a été inférieure à 100 km/h (si nous supposons que le train parte au repos) et donc la vitesse moyenne est inférieure à 100 km/h.

De même, si le taux moyen de croissance d'une population de bactéries pour une période de 24 heures est 1,000 bactéries par heure, alors, à un moment durant la période de 24

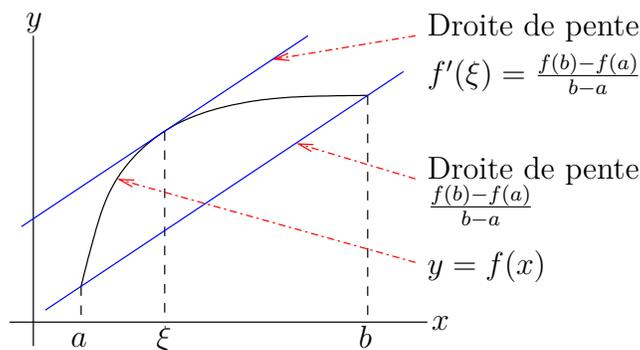


FIGURE 4.15 – Une représentation graphique du théorème de la moyenne. Les deux droites sont parallèles car elles ont la même pente.

heures, le taux de croissance instantané de la population a été de 1,000 bactéries par heure.

Ces deux observations sont deux réalisations concrètes du théorème de la moyenne. ♣

Remarque 4.4.8

Le théorème de la moyenne peut être utilisé pour donner une démonstration analytique de la proposition 4.4.2 ; une démonstration qui ne fait pas appel à l'interprétation graphique de la dérivée.

Montrons que si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f'(x) > 0$ pour $x \in]a, b[$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[$. Soit $x_1 < x_2$ deux points de l'intervalle $]a, b[$. Le théorème de la moyenne donne ξ entre x_1 et x_2 tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) .$$

Puisque $\xi \in]a, b[$, nous avons que $f'(\xi) > 0$ et ainsi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0 .$$

Donc $f(x_2) > f(x_1)$.

De la même façon, nous pourrions montrer que si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f'(x) < 0$ pour $x \in]a, b[$ alors f est strictement décroissante sur l'intervalle $]a, b[$. ♠

Nous verrons très prochainement que la dérivée d'une fonction constante est nulle en tout point. Est-ce que les fonctions constantes sont les seules fonctions dont la dérivée est nulle en tout point ? Le théorème de la valeur moyenne nous permet de répondre par l'affirmative à cette question. En effet, supposons que f soit une fonction telle que $f'(x) = 0$ pour tout x . Si x_1 et x_2 sont deux points distincts quelconques, il existe grâce au théorème de la moyenne un point ξ entre x_1 et x_2 telle que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) .$$

Or $f'(\xi) = 0$. Donc $f(x_2) = f(x_1)$.

4.4.1 Différentiable implique continu

Remarquons que la fonction f dont le graphe donnée à la figure 4.16 n'est pas différentiable au point a où elle n'est pas continue. La pente des sécantes $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$ approche moins l'infini car ces sécantes approchent une droite verticale. Nous avons donc

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\infty .$$

Il semble donc que les fonctions doivent être continues aux points où elles sont différentiables. Nous allons vérifier que cela est vrai à partir de la définition de la dérivée.

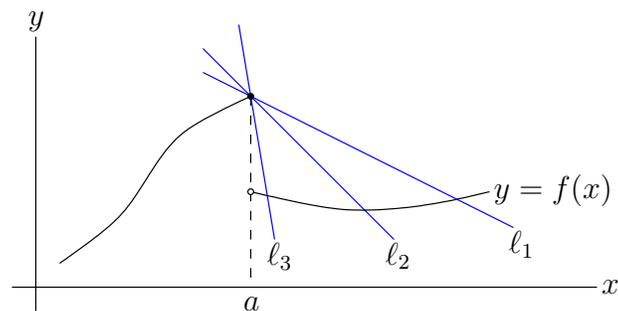


FIGURE 4.16 – Cette fonction n'est pas continue à $x = a$ et donc sa dérivée n'existe pas à ce point,

Théorème 4.4.9

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable au point $c \in]a, b[$, alors f est continue au point c .

Nous démontrons ce théorème de la façon suivante. Si la fonction f est différentiable au point c , nous avons donc que la limite

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

existe et est égale à $f'(c) \in \mathbb{R}$. En particulier, f doit être définie au point c . Mais alors,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow c} (f(z) - f(c)) &= \lim_{z \rightarrow c} \left(\frac{f(z) - f(c)}{z - c} \right) (z - c) \\ &= \lim_{z \rightarrow c} \left(\frac{f(z) - f(c)}{z - c} \right) \times \lim_{z \rightarrow c} (z - c) = f'(c) \times 0 = 0 . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c) .$$

Ce qui prouve que f est continue au point c .

4.4.2 Une première application de la dérivée ; la vitesse d'un objet

Soit $x(t)$ la position en kilomètres (km) au temps t en heures (h) d'un véhicule se déplaçant en ligne droite. La vitesse moyenne d'un véhicule est donnée par la distance parcourue divisée par le temps nécessaire pour couvrir cette distance. Si la distance est en kilomètres et le temps est en heures, la vitesse moyenne est en kilomètres par heure (km/h). La formule pour calculer la vitesse moyenne entre $t = a$ heures et $t = b > a$ heures est donnée par

$$\frac{x(b) - x(a)}{b - a} \quad \text{km/h} .$$

Si b est très près de a , alors nous pouvons assumer que la vitesse du véhicule entre $t = a$ et $t = b$ heures est (presque) constante et est égale à la vitesse moyenne entre $t = a$ et $t = b$. Si nous laissons b tendre vers a , nous obtenons la vitesse instantanée du véhicule au temps $t = a$ heures. C'est la vitesse du véhicule à précisément $t = a$ heures. Donc

$$x'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{x(b) - x(a)}{b - a}$$

est la vitesse instantanée en km/h du véhicule à $t = a$ heures.

4.5 Dérivées de quelques fonctions élémentaires

Nous avons vu précédemment comment calculer numériquement la dérivée d'une fonction en un point. Malheureusement, pour analyser le comportement d'une fonction sur un intervalle donné à l'aide de la dérivée, nous ne pouvons pas calculer numériquement la dérivée à tous les points de l'intervalle pour déterminer le signe de la dérivée en ces points. Il faut donc chercher des formules qui nous permettront de calculer la dérivée d'une fonction rapidement et efficacement.

Nous allons voir dans les prochaines sections qu'il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées de fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles et trigonométriques à partir de la définition de la dérivée. Il existe des formules générales pour calculer ces dérivées.

Nous pourrions réduire ce chapitre à une courte section énonçant les règles de dérivation sans ou avec le minimum de justifications. Les lecteurs n'auraient eu qu'à mémoriser ces règles. Cependant, cet approche n'aurait pas permis au lecteur de développer ses capacités de raisonnement logique et mathématique.

Nous avons donc choisi de présenter dans cette section et celles qui suivent les règles de dérivation de façon logique et avec le plus de rigueur possible sans aller aux extrêmes. Chaque règle est introduite quand et seulement quand les concepts nécessaires pour justifier cette règle ont été présentés. C'est pour cette raison, par exemple, que la règle de dérivation pour $f(x) = x^\alpha$ avec α un nombre réel quelconque est présentée seulement à la presque toute fin du chapitre. C'est pourtant une des premières règles de dérivation qui est donnée dans le cours de mathématiques de 12^e année au niveau secondaire.

4.5.1 Dérivée de $f(x) = x^n$ où n est un entier positif ou nul

Quelle est la dérivée de la fonction constante f ; c'est-à-dire, de la fonction définie par $f(x) = c$ pour tout x où c est une constante ?

Si nous utilisons le fait que la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la droite tangente au graphe de cette fonction en ce point, nous trouvons que $f'(x) = 0$ pour tout x car le graphe de f est une droite horizontale et les droites horizontales ont une pente nul. Nous utilisons le fait que la tangente à une droite est la droite elle-même.

Nous pouvons aussi utiliser la définition de la dérivée pour démontrer que $f'(x) = 0$ pour tout x . Puisque

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

quel que soit h , nous avons que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

pour tout x . La fonction constante à 0 approche évidemment 0 quand nous approchons l'origine. Nous obtenons donc la règle suivante.

Proposition 4.5.1

Soit c une constante. Si $f(x) = c$ pour tout x , alors $f'(x) = 0$ pour tout x .

Considérons maintenant la fonction f définie par $f(x) = x$ pour tout x . Si nous utilisons encore le fait que la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la droite tangente au graphe de cette fonction en ce point, nous trouvons que $f'(x) = 1$ pour tout x car $y = f(x) = x$ est une droite de pente 1 qui est sa propre tangente en tout point.

Nous pouvons démontrer à partir de la définition de la dérivée que la dérivée de $f(x) = x$ est bien $f'(x) = 1$ pour tout x . Pour faire cela, il suffit de remarquer que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

pour tout $h \neq 0$. Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 .$$

La fonction constante à 1 sur la droite réelle approche évidemment 1 quand nous approchons l'origine.

Considérons maintenant la fonction $f(x) = x^2$ pour tout x . Dans le tableau suivant, nous avons estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où

$h = 0.00001$.

x	$f'(x) \approx \frac{f(x + 0.00001) - f(x)}{0.00001}$	$ 2x - f'(x) $
-1	-2	0
1	2.00001000001...	$0.1000001 \dots \times 10^{-4}$
2	4.00001000002...	$0.1000002 \dots \times 10^{-4}$
π	6.2831953071...	$0.99999 \dots \times 10^{-5}$
3.5	7.00001000009...	$0.1000009 \dots \times 10^{-4}$

Nous remarquons que $f'(x) \approx 2x$ pour les valeurs de x considérées dans le tableau. Nous pouvons conjecturer que $f'(x) = 2x$ pour tout x .

Montrons à partir de la définition de la dérivée que la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est bien $f'(x) = 2x$ pour tout x . Nous avons

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

qui approche $2x$ lorsque h tend vers 0. Donc

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

quel que soit x .

Maintenant que nous savons que la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$ pour tout x , il est très facile de trouver la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en un point de cette courbe. Il n'est plus nécessaire de calculer numériquement les pentes des tangentes à l'aide de limites de pentes de sécantes.

Exemple 4.5.2

Trouvons l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = x^2$ au point $(x, y) = (3, 9)$ sur cette courbe.

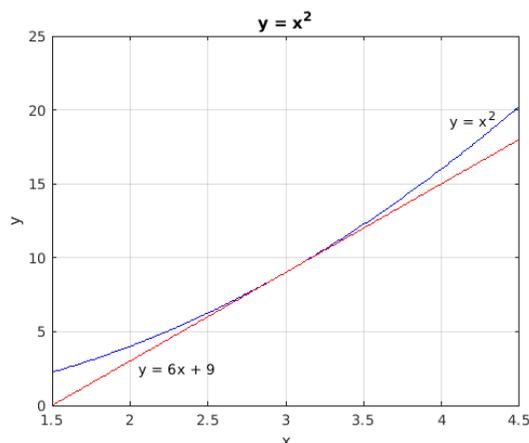
Nous avons vu que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est donnée par $f'(a)$. Ainsi, la pente de la tangente à la courbe $y = f(x) = x^2$ au point $(3, 9)$ est $f'(3) = 2 \times 3 = 6$.

L'équation de la tangente dans la forme point-pente est donc $y - 9 = 6(x - 3)$, ce qui donne $y = 6x - 9$ dans la forme standard. Nous avons tracé le graphe de $y = x^2$ et de sa tangente au point $(3, 9)$ à la figure 4.17. 

En procédant comme nous l'avons fait avec la fonction $f(x) = x^2$, nous pouvons montrer que la dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$, celle de $f(x) = x^4$ est $f'(x) = 4x^3$, et ainsi de suite. Nous pouvons obtenir un résultat dans le cas général où $f(x) = x^n$ avec n un entier positif à l'aide de la formule du binôme.

Puisque

$$(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \dots + nh^{n-1}x + h^n \quad ,$$

FIGURE 4.17 – Graphe de $y = x^2$ et de sa tangente au point $(3, 9)$.

nous avons

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\left(x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \dots + nh^{n-1}x + h^n \right) - x^n \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2}}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0} + \dots + \underbrace{nh^{n-2}x}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0} + \underbrace{h^{n-1}}_{\rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0} \right) \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

Nous obtenons la règle suivante.

Proposition 4.5.3

Soit $f(x) = x^n$ pour un entier $n \neq 0$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$ pour les valeurs de x où x^{n-1} est définie.

4.5.2 Dérivée du sinus et du cosinus 🌲 🔧

Si $f(x) = \cos(x)$, quel sera $f'(x)$?

Commençons par quelques observations qui nous guideront dans la recherche de la dérivée de f . Puisque f est périodique de période 2π , alors f' sera aussi périodique de période au plus 2π comme nous pouvons le constater à partir du graphe à la figure 4.18. Par exemple, la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(\pi/6, \cos(\pi/6)) = (\pi/6, \sqrt{3}/2)$ est parallèle à la tangente à cette même courbe au point $(13\pi/6, \cos(13\pi/6)) = (13\pi/6, \sqrt{3}/2)$. Les deux tangentes ont donc la même pente. Ainsi, $f'(\pi/6) = f'(13\pi/6)$.

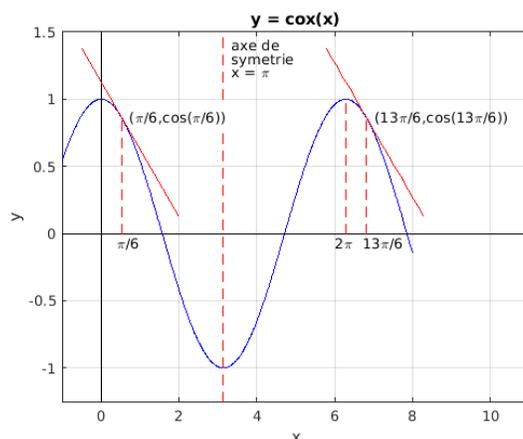


FIGURE 4.18 – Le graphe de $y = f(x) = \cos(x)$ et de deux de ses tangentes. Ces deux tangentes sont parallèles.

De plus, puisque $f(x) = f(2\pi - x)$, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = \pi$. Ainsi, la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(2\pi - a, f(2\pi - a))$ est obtenue de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ par une symétrie par rapport à l'axe vertical $x = \pi$ (figure 4.19). En particulier, $f'(2\pi - a) = -f'(a)$.

Puisque f a des maximums locaux à $x = 2n\pi$ et des minimums locaux à $x = (2n - 1)\pi$ quel que soit l'entier n , nous avons que $f'(n\pi) = 0$ pour tout entier n .

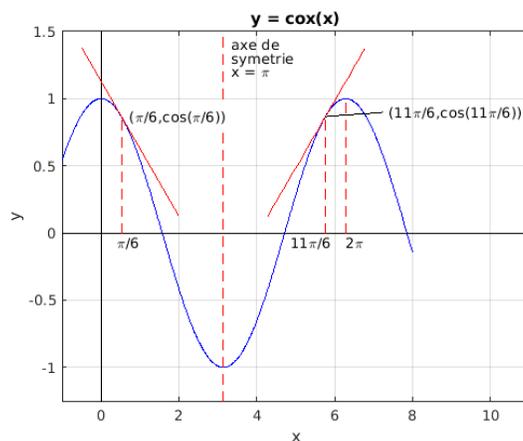


FIGURE 4.19 – Le graphe de $y = f(x) = \cos(x)$ et de deux de ses tangentes. Ces deux tangentes sont symétriques par rapport à l'axe $x = \pi$.

À partir du graphe de f , nous pouvons supposer que la plus petite pente pour les tangentes à la courbe $y = f(x)$ est lorsque $x = (4n + 1)\pi/2$ et la plus grande pente pour les tangentes

de cette même courbe est lorsque $x = (4n+3)\pi/2$ quel que soit l'entier n . Cela sera démontré plus loin. Donc f' aura des minimums locaux (tous de même valeur) aux points $x = (4n+1)\pi/2$ et des maximums locaux (tous de même valeur) aux points $x = (4n+3)\pi/2$ quel que soit l'entier n .

Si nous utilisons le fait que $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ sur la courbe, nous pouvons déterminer le signe de $f'(x)$ et même estimer la valeur de $f'(x)$ pour prédire la forme du graphe de f' . Nous avons tracé un graphe possible pour f' à la figure 4.20.

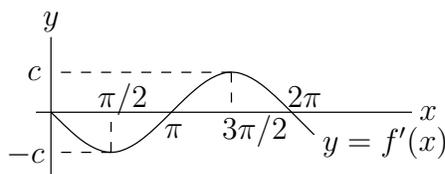


FIGURE 4.20 – Un graphe possible pour la dérivée du cosinus basé sur le signe de la pente de la tangente à la courbe $y = f(x) = \cos(x)$.

Dans le tableau 4.1, nous avons estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

Remarquons que $f'(x) \approx -\sin(x)$ pour les quelques valeurs de x dans le tableau 4.1.

Le graphe associé aux données du tableau 4.1 ainsi que le graphe de $y = -\sin(x)$ sont donnés à la figure 4.21. Les deux graphes sont très semblables. Pour obtenir un meilleur graphe de f' , nous suggérons au lecteur d'ajouter plus de points au tableau 4.1 et de choisir h plus petit dans l'approximation $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ de $f'(x)$.

Nous allons démontrer plus loin qu'il est effectivement vrai que $f'(x) = -\sin(x)$.

Si $g(x) = \sin(x)$, nous pourrions procéder comme nous venons de le faire pour $f(x) = \cos(x)$ pour montrer numériquement que $g'(x) = \cos(x)$. Cependant, il y a une façon plus simple de démontrer cela en assumant que la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$.

Puisque

$$g(x) = \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

nous obtenons le graphe de g par une translation de $\pi/2$ vers la droite du graphe de f . Il s'en suit que les tangentes au graphe de g sont obtenues par une translation de $\pi/2$ vers la droite des tangentes au graphe de f , et il en est de même pour les pentes de ses tangentes. Ainsi,

$$g'(x) = f'\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Nous pouvons aussi expliquer cette égalité à l'aide de la définition de la dérivée. Pour $a \in \mathbb{R}$,

x	$f'(x) \approx \frac{f(x + 0.00001) - f(x)}{0.00001}$	$ \sin(x) - f'(x) $
0.000000...	-0.000005...	0.000005...
$\pi/12 = 0.261799...$	-0.258824...	0.000005...
$\pi/6 = 0.523599...$	-0.500004...	0.000004...
$\pi/4 = 0.785398...$	-0.707110...	0.000004...
$\pi/3 = 1.047198...$	-0.866028...	0.000002...
$5\pi/12 = 1.308997...$	-0.965927...	0.000001...
$\pi/2 = 1.570796...$	-1.000000...	0.000000...
$7\pi/12 = 1.832596...$	-0.965925...	0.000001...
$2\pi/3 = 2.094395...$	-0.866023...	0.000003...
$3\pi/4 = 2.356194...$	-0.707103...	0.000004...
$5\pi/6 = 2.617994...$	-0.499996...	0.000004...
$11\pi/12 = 2.879793...$	-0.258814...	0.000005...
$\pi = 3.141593...$	0.000005...	0.000005...
$13\pi/12 = 3.403392...$	0.258824...	0.000005...
$7\pi/6 = 3.665191...$	0.500004...	0.000004...
$5\pi/4 = 3.926991...$	0.707110...	0.000004...
$4\pi/3 = 4.188790...$	0.866028...	0.000002...
$17\pi/12 = 4.450590...$	0.965927...	0.000001...
$3\pi/2 = 4.712389...$	1.000000...	0.000000...
$19\pi/12 = 4.974188...$	0.965925...	0.000001...
$5\pi/3 = 5.235988...$	0.866023...	0.000003...
$7\pi/4 = 5.497787...$	0.707103...	0.000004...
$11\pi/6 = 5.759587...$	0.499996...	0.000004...
$23\pi/12 = 6.021386...$	0.258814...	0.000005...
$2\pi = 6.283185...$	-0.000005...	0.000005...

TABLE 4.1 – Approximations de la dérivée de $f(x) = \cos(x)$ à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$

nous avons

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(a+h\right) - \frac{\pi}{2}\right) - f\left(a - \frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + h\right) - f\left(a - \frac{\pi}{2}\right)}{h} = f'\left(a - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

En combinant les deux cas précédents nous obtenons les formules suivantes.

Proposition 4.5.4

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

Soit $f(x) = \cos(x)$. Pour démontrer que $f'(x) = -\sin(x)$, il faut se rappeler que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Ainsi,

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}$$

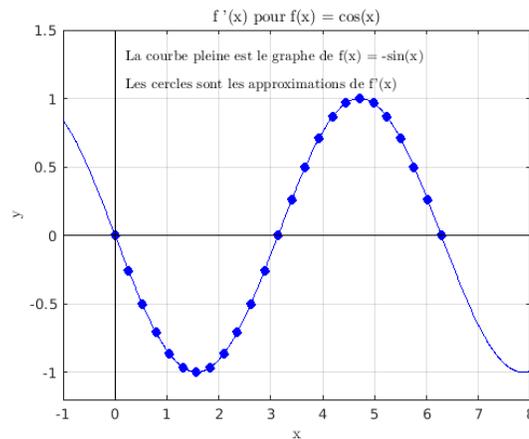


FIGURE 4.21 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = \cos(x)$ qui se retrouvent dans le tableau 4.1 sont représentées par des cercles. La courbe pleine est le graphe de $-\sin(x)$.

$$= \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin h}{h} .$$

Or, nous avons vu à l'exemple 3.1.12 que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 .$$

De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(h) - 1}{h} \right) \left(\frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1} \right) \\ &= -1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

car $\frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1}$ est une fonction continue à $h = 0$ et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1} = \frac{\sin(0)}{\cos(0) + 1} = \frac{0}{2} = 0 .$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos(x) \times 0 - \sin(x) \times 1 = -\sin(x) \end{aligned}$$

quel que soit x .

4.6 Règles de dérivation

Quelle est la dérivée de $x^{10} + 5x^3 + 4$, de $x \cos(x)$, de $\cos(x^2)$, etc ? Il n'est pas raisonnable de chercher systématiquement la dérivée de chaque fonction comme nous l'avons fait à la section précédente. Il y a des règles de dérivation qui nous permettront de calculer la dérivée d'un grand nombre de fonctions sans avoir à utiliser la définition de la dérivée comme nous l'avons fait pour les fonctions de la section précédente.

4.6.1 Dérivée d'une fonction multipliée par une constante

Exemple 4.6.1

Soit $x(t)$ le nombre de bactéries au temps t en heures dans une culture A et $y(t)$ le nombre de bactéries au temps t en heures dans une culture B. Si nous avons deux bactéries de la culture A pour chaque bactérie de la culture B en tout temps, alors pour chaque bactérie qui s'ajoute à la culture B, deux bactéries doivent s'ajouter à la culture A pour préserver le rapport de 2 pour 1. Par exemple, si pendant une période de deux heures, le nombre de bactéries de la culture B augmente de 10,000 à 11,000 alors le nombre de bactéries de la culture A doit augmenter de 20,000 à 22,000 pour préserver le rapport de 2 pour 1. Le taux de croissance de la culture A est donc deux fois celui de la culture B.

Mathématiquement, si $x(t) = 2y(t)$ pour tout t alors $x'(t) = 2y'(t)$ pour tout t car $x'(t)$ et $y'(t)$ sont les taux de croissance (taux de variation instantanée) au temps t pour les cultures A et B respectivement. ♣

L'exemple précédent suggère la règle suivante.

Théorème 4.6.2

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $f = cg$ où c est une constante, alors

$$f'(x) = cg'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

Vérifions à partir de la définition de la dérivée que la règle précédente est vraie. Si $f(x) = cg(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{cg(x+h) - cg(x)}{h} = c \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = cg'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

Exemple 4.6.3

Cette règle nous permet donc de calculer les dérivées suivantes.

$$\frac{d}{dx}(5x^7) = 5 \frac{d}{dx}(x^7) = 5(7x^6) = 35x^6$$

et

$$\frac{d}{dx}(7 \cos(x)) = 7 \frac{d}{dx}(\cos(x)) = 7(-\sin(x)) = -7 \sin(x)$$



4.6.2 Dérivée d'une somme de fonctions

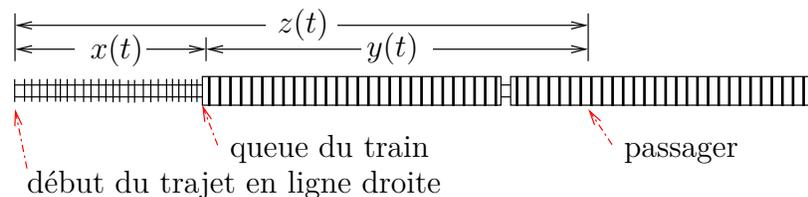


FIGURE 4.22 – Distance parcourue par un passager de train qui roule en ligne droite.

Exemple 4.6.4

Un train se déplace en ligne droite (figure 4.22). Si $x(t)$ est la distance au temps t entre la queue du train et le début du trajet, la vitesse du train (taux de variation instantané de sa position) au temps t est donnée par $x'(t)$.

Si $y(t)$ est la distance entre un passager et la queue du train au temps t , alors la vitesse du passager par rapport au train au temps t est $y'(t)$. Comme le passager passe normalement la majorité de son temps assis, nous avons que $y(t)$ est constant et donc $y'(t) = 0$ pour de long intervalles. De plus, $y'(t)$ sera plus grand que 0 si la personne se déplace vers l'avant du train et plus petit que 0 si la personne se déplace vers l'arrière du train.

La distance au temps t entre le passager et le début du trajet est $z(t) = x(t) + y(t)$, la somme de la distance entre le début du trajet et la queue du train, et de la distance entre la queue du train et la position du passager dans le train.

Si, 30 minutes (i.e. 0.5 heure) après le début du trajet, le train se déplace à une vitesse de 130 km/heure et le passager se déplace vers l'avant du train par rapport au train à une vitesse de 3 km/heure, alors la vitesse du passager par rapport au début du trajet en ligne droite est de 133 km/heure.

Mathématiquement, ce que nous venons de dire est que $z'(0.5) = 133 = 130 + 3 = x'(0.5) + y'(0.5)$.

L'exemple précédent suggère la règle suivante pour la dérivée.

Théorème 4.6.5

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $q = f + g$, alors

$$q'(x) = f'(x) + g'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

Vérifions à partir de la définition de la dérivée que la règle précédente est vraie. Par définition de la dérivée de q ,

$$q'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x),$$

nous avons

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Exemple 4.6.6

Soit $p(x) = 5x^{10} + 3x^4 + 2x^2 + 7$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} p(x) &= \frac{d}{dx} (5x^{10}) + \frac{d}{dx} (3x^4) + \frac{d}{dx} (2x^2) + \frac{d}{dx} (7) \\ &= 5 \frac{d}{dx} (x^{10}) + 3 \frac{d}{dx} (x^4) + 2 \frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (7) \\ &= 5(10x^9) + 3(4x^3) + 2(2x) + 0 = 50x^9 + 12x^3 + 4x \end{aligned}$$

où la règle pour calculer la dérivée de x^n a été utilisée. ♣

Exemple 4.6.7

Pour trouver l'équation de la droite tangente à la courbe $y = p(x) = 3x^{10} + 5x^4$ lorsque $x = 1$, il faut trouver la pente de la tangente à la courbe $y = p(x)$ au point $(1, p(1)) = (1, 8)$. Cette pente est donnée par $p'(1)$. Or

$$p'(x) = \frac{d}{dx} (3x^{10}) + \frac{d}{dx} (5x^4) = 3 \frac{d}{dx} (x^{10}) + 5 \frac{d}{dx} (x^4) = 3(10x^9) + 5(4x^3) = 30x^9 + 20x^3.$$

Donc $p'(1) = 50$. L'équation de la tangente dans la forme point-pente est $y - 8 = 50(x - 1)$, ce qui donne $y = 50x - 42$. ♣

4.6.3 Dérivée du produit de fonctions

Exemple 4.6.8

Supposons que la longueur des côtés d'un rectangle varient en fonction du temps. Soit $x(t)$ la longueur de la base du rectangle en mètres au temps t en secondes, et soit $y(t)$ la longueur de la hauteur du rectangle en mètres au temps t en secondes. L'aire $A(t)$ du rectangle en mètres carrés au temps t en secondes est donc $A(t) = x(t)y(t)$ m².

Si la longueur de la base augmente à une vitesse constante de 2 m/s et la longueur de la hauteur augmente à une vitesse constante de 3 m/s, quel sera le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle en m²/s ?

Nous avons que $x'(t) = 2$ m/s et $y'(t) = 3$ m/s pour tout t . Si la longueur initiale de la base est de 10 m et la longueur initiale de la hauteur est de 11 m, alors la longueur de la base augmente de 10 à 12 m et la longueur de la hauteur augmente 11 à 14 m en une seconde. L'aire du rectangle augmente donc de $10 \times 11 = 110$ m² à $12 \times 14 = 168$ m² en une seconde, une augmentation moyenne de 58 m²/s.

Est-ce que $A'(t) = 58$ m²/s pour tout t ? En particulier, est-ce que la vitesse de croissance de l'aire du rectangle est constante par rapport au temps ?

Toujours en supposant que la longueur initiale de la base soit de 10 m et celle de la hauteur soit de 11 m, après 2 secondes la longueur de la base est de 14 m et celle de la hauteur est de 17 m. L'aire du rectangle augmente donc de $10 \times 11 = 110$ m² à $14 \times 17 = 238$ m² en deux secondes. Ce qui donne une augmentation moyenne de 64 m²/s. Nous ne pouvons donc pas avoir $A'(t) = 58$ m²/s pour tout t .

Comment pouvons-nous calculer $A'(t)$ à l'aide $x'(t)$ et $y'(t)$? En fait, pouvons-nous calculer $A'(t)$ à l'aide $x'(t)$ et $y'(t)$?

Il est clair que la formule $A'(t) = x'(t)y'(t)$ est **fausse**. Les calculs précédents montrent que le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle varie avec le temps, ce qui n'est pas le cas pour le produit $x'(t)y'(t)$ qui est égal à 6 pour tout t . En fait, une étude des unités utilisées montre que cette formule n'a pas de sens. Puisque les unités de $x'(t)$ et de $y'(t)$ sont des m/s, les unités de $x'(t)y'(t)$ sont des m²/s² et non des m²/s comme nous devons avoir pour $A'(t)$.

Considérons la variation de l'aire sur un très petit intervalle de temps Δt . Durant cet petit intervalle de temps, la longueur de la base augmente de x à $x + \Delta x$ mètres et la longueur de la hauteur augmente de y à $y + \Delta y$ mètres (figure 4.23). L'aire du rectangle augmente donc de xy à

$$(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y.$$

Lorsque Δt approche 0, nous avons que $\Delta x\Delta y/\Delta t$ converge vers 0 car

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} = \Delta x \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ou Δx converge vers 0 et $\Delta y/\Delta t$ converge vers y' lorsque Δt approche 0. Ainsi,

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy}{\Delta t} = x \frac{\Delta y}{\Delta t} + y \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} \rightarrow xy' + yx'$$

lorsque Δt approche 0.

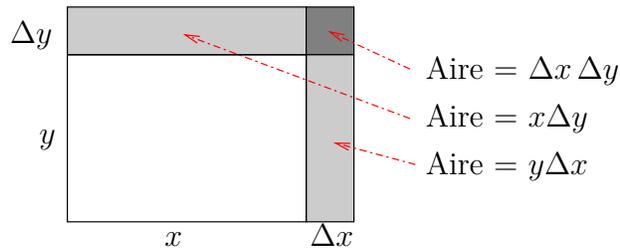


FIGURE 4.23 – L'aire du rectangle augmente de xy à $(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + x \Delta y + y \Delta x + \Delta x \Delta y$.

La formule obtenue à l'exemple précédant suggère donc le résultat suivant.

Théorème 4.6.9

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables et $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $q = fg$, alors

$$q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$.

Posons $q(x) = f(x)g(x)$ pour tout x . Par définition de la dérivée,

$$q'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) g(x+h) + f(x) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Comme g est différentiable au point x par hypothèse, g est continue au point x . Ainsi,

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x).$$

De plus,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

car f et g sont différentiables au point x par hypothèse. Nous avons donc

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \right) + f(x) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule pour la dérivée du produit de deux fonctions.

Exemple 4.6.10

Retournons à l'exemple précédent où nous devons déterminer le taux de croissance instantané de l'aire d'un rectangle dont la longueur des côtés varie en fonction du temps. Notre formule pour la dérivée du produit de fonctions donne donc

$$A'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t) = 2y(t) + 3x(t) \quad \text{m}^2/\text{s}.$$

Nous observons que le taux de croissance instantané de l'aire du rectangle n'est pas constant par rapport au temps même si les taux de croissance instantanés des longueurs des côtés sont constants. Par exemple, le taux de croissance instantané au début (à $t = 0$) est

$$A'(0) = x'(0)y(0) + x(0)y'(0) = 2 \times 11 + 3 \times 10 = 52 \quad \text{m}^2/\text{s}$$

et celui à $t = 1$ est

$$A'(1) = x'(1)y(1) + x(1)y'(1) = 2 \times 14 + 3 \times 12 = 64 \quad \text{m}^2/\text{s}.$$

Si nous étudions les unités utilisées, nous obtenons de la formule $A'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$ que les unités de $A'(t)$ sont des $\text{m}/\text{s} \times \text{m} + \text{m} \times \text{m}/\text{s} = \text{m}^2/\text{s}$ comme il se doit. ♣

Exemple 4.6.11

Soit $q(x) = (x^3 + 2x)\sin(x)$. La fonction q est le produit des fonctions $f(x) = x^3 + 2x$ et $g(x) = \sin(x)$. Ainsi,

$$q'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (3x^2 + 2)\sin(x) + (x^3 + 2x)\cos(x).$$

♣

4.6.4 Dérivée du quotient de fonctions

Quelle est la dérivée de $g(x) = p(x)/q(x)$? En multipliant par $q(x)$ des deux côtés, nous obtenons $g(x)q(x) = p(x)$. Maintenant, en dérivant des deux côtés, nous obtenons

$$\begin{aligned} g'(x)q(x) + g(x)q'(x) &= p'(x) \Leftrightarrow g'(x)q(x) = p'(x) - g(x)q'(x) \\ \Leftrightarrow g'(x) &= \frac{p'(x)}{q(x)} - \frac{g(x)q'(x)}{q(x)}. \end{aligned}$$

Or $g(x) = p(x)/q(x)$, donc

$$g'(x) = \frac{p'(x)}{q(x)} - \frac{p(x)q'(x)}{q^2(x)} = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$

Cette formule pour calculer la dérivée du quotient de deux fonctions mérite d'être mise en évidence car elle est utile.

Proposition 4.6.12

Soit $p :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Si $q(x) \neq 0$ pour $a < x < b$, alors

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

Cette formule est appelée la **règle de dérivée du quotient** de deux fonctions.

Exemple 4.6.13

Calculons la dérivée de $g(x) = (x^3 + 2)/(x^2 + 5x)$.

Il suffit d'appliquer la règle de dérivée du quotient de deux fonctions ci-dessus avec $p(x) = x^3 + 2$ et $q(x) = x^2 + 5x$. Ainsi,

$$g'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)} = \frac{(3x^2)(x^2 + 5x) - (x^3 + 2)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}.$$



Exemple 4.6.14

Calculons la dérivée de $\tan(x)$.

Puisque $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, nous pouvons utiliser la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions ci-haut avec $p(x) = \sin(x)$ et $q(x) = \cos(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan(x) &= \frac{\left(\frac{d}{dx} \sin(x) \right) \cos(x) - \sin(x) \left(\frac{d}{dx} \cos(x) \right)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \left(\frac{1}{\cos(x)} \right)^2 = \sec^2(x) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.



En procédant de la même façon que dans l'exemple précédent, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.6.15

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x), \quad \frac{d}{dx} \cot(x) = -\csc^2(x), \quad \frac{d}{dx} \sec(x) = \tan(x) \sec(x)$$

et

$$\frac{d}{dx} \csc(x) = -\cot(x) \csc(x).$$

4.6.5 Dérivée de fonctions composées

Exemple 4.6.16

Nous étudions les populations d'ours et de poissons le long d'une section de 1 kilomètre d'une rivière du nord de l'Ontario.

Nous estimons que le nombre de poissons augmente de 147 lorsque la température de l'eau de la rivière augmente de 2°C et que le nombre d'ours augmente de 2 lorsque le nombre de poissons augmente de 49. Nous pouvons donc dire que le nombre d'ours augmente de 3 lorsque la température de l'eau augmente de 1°C car une augmentation de 2°C entraîne une augmentation de 147 poissons qui entraîne une augmentation de 6 ours (2 ours par tranche de 49 poissons).

Essayons de reformuler le raisonnement du paragraphe précédent en termes mathématiques. Si $P(T)$ est le nombre de poissons lorsque la température de l'eau est de $T^\circ\text{C}$ et $N(P)$ est le nombre d'ours lorsqu'il y a P poissons, alors le nombre d'ours en fonction de la température T en degrés centigrades de l'eau est donné par $B(T) = (N \circ P)(T) = N(P(T))$. Nous avons que $P'(T) = 147/2$ poissons/degré et $N'(P) = 2/49$ ours/poisson. L'énoncé du paragraphe précédent se traduit donc par la formule mathématique

$$B'(T) = N'(P(T))P'(T) = \frac{2}{49} \times \frac{147}{2} = 3 \text{ ours/degré.}$$

En d'autres mots, le taux de croissance du nombre d'ours par rapport à la température de l'eau est le produit du taux de croissance du nombre d'ours par rapport au nombre de poissons (2/49 ours/poisson) et du taux de croissance du nombre de poissons par rapport à la température de l'eau (147/2 poissons/degré).

La formule $B'(T) = N'(P(T))P'(T)$ est cohérente avec les unités utilisées. Les unités de $P'(T)$ sont des poissons/degré et les unités de $N'(P(T))$ sont des ours/poisson. Il n'est donc pas surprenant que les unités de $B'(T) = N'(P(T))P'(T)$ soient des ours/degré. ♣

L'exemple précédent suggère la règle suivante.

Théorème 4.6.17

Soit $f :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables telles que $g(x) \in]c, d[$ pour tout $x \in]a, b[$. La dérivée de la fonction $q :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q = f \circ g$ est

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Vérifions que cette règle est vraie à partir de la définition de la dérivée. Par définition de la dérivée,

$$q'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h}.$$

Le quotient dans la limite précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \left(\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \right) \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right). \end{aligned}$$

Nous allons calculer la limite lorsque h tend vers 0 pour chacun des facteurs de l'expression précédente. Pour le deuxième facteur, nous remarquons que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

car g est différentiable par hypothèse. Pour le premier facteur, nous remarquons premièrement que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$$

car g est une fonction différentiable, donc continue, sur l'intervalle $]a, b[$. Puisque f est différentiable sur l'intervalle $]c, d[$ et $g(x) \in]c, d[$, nous avons

$$f'(g(x)) = \lim_{b \rightarrow g(x)} \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)}.$$

Nous en déduisons que

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \rightarrow f'(g(x))$$

lorsque $h \rightarrow 0$ car $g(x+h) \rightarrow g(x)$ lorsque $h \rightarrow 0$. C'est-à-dire,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)).$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(g(x))g'(x). \end{aligned}$$

Remarque 4.6.18

Soit $x \in]a, b[$ arbitraire mais fixe. Pour démontrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = f'(g(x)). \quad (4.6.1)$$

à l'aide de la définition de limite en termes de ϵ et δ , nous choisissons $\epsilon > 0$. Puisque

$$f'(g(x)) = \lim_{b \rightarrow g(x)} \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)}$$

pour $g(x) \in]c, d[$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)} - f'(g(x)) \right| < \epsilon$$

pour $|b - g(x)| < \delta_1$. De plus, puisque g est continue à $x \in]a, b[$, il existe δ tel que $|g(x + h) - g(x)| < \delta_1$ pour $|h| < \delta$. Donc, pour $|h| < \delta$, nous avons

$$\left| \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} - f'(g(x)) \right| < \epsilon$$

Puisque ϵ est arbitraire, nous obtenons (4.6.1). 

Exemple 4.6.19

Calculons la dérivée de $q(x) = (1 + x^2)^{101}$.

Il faut remarquer que $q = f \circ g$ où $g(x) = 1 + x^2$ et $f(y) = y^{101}$. Puisque $g'(x) = 2x$ et $f'(y) = 101y^{100}$, nous trouvons que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = 101(1 + x^2)^{100} \times 2x = 202x(1 + x^2)^{100}.$$



Exemple 4.6.20

Calculons la dérivée de $q(x) = \cos(1 - x^5)$.

Il faut remarquer que $q = f \circ g$ où $g(x) = 1 - x^5$ et $f(y) = \cos(y)$. Puisque $g'(x) = -5x^4$ et $f'(y) = -\sin(y)$, nous trouvons que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\sin(1 - x^5) \times (-5x^4) = 5x^4 \sin(1 - x^5).$$



Exemple 4.6.21

Nous pouvons utiliser la dérivée de fonctions composées pour obtenir la formule de dérivation d'un quotient de fonctions. Soit $g(x) = p(x)/q(x)$? La fonction g est le produit des fonctions p et $r \circ q$ où $r(y) = y^{-1}$. La règle pour la dérivée du produit de fonctions donne

$$g'(x) = p'(x) r(q(x)) + p(x) \left(\frac{d}{dx} r(q(x)) \right).$$

Or,

$$\frac{d}{dx} r(q(x)) = r'(q(x))q'(x) = -(q(x))^{-2}q'(x)$$

car $r'(y) = -y^{-2}$. Nous avons donc

$$g'(x) = p'(x)(q(x))^{-1} - p(x)(q(x))^{-2}q'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$



Exemple 4.6.22

Calculons la dérivée de $g(x) = (x^3 + 2)/(x^2 + 5x)$ sans utiliser la règle de dérivation du quotient de deux fonctions.

Nous avons que $g(x) = p(x)r(q(x))$ où $p(x) = x^3 + 2$, $q(x) = x^2 + 5x$ et $r(y) = y^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= p'(x)r(q(x)) + p(x)r'(q(x))q'(x) \\ &= (3x^2)(x^2 + 5x)^{-1} + (x^3 + 2) \left(-(x^2 + 5x)^{-2} \right) (2x + 5) \\ &= \frac{(3x^2)(x^2 + 5x) - (x^3 + 2)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la première égalité, nous avons utilisé la règle pour la dérivée du produit de fonctions et celle pour la dérivée des fonctions composées. ♣

4.7 Encore plus de dérivées de fonctions élémentaires

Avec nos connaissances des règles de dérivation, nous pouvons maintenant développer des formules pour calculer la dérivée de fonctions exponentielles et logarithmiques.

4.7.1 Dérivée de $f(x) = b^x$

Exemple 4.7.1

Quelle est la dérivée de $f(x) = 3^x$?

Dans la partie gauche du tableau 4.2, nous avons estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

Remarquons que $f'(x)/f(x) \approx 1.098618\dots$ pour les quelques valeurs de x dans la partie gauche du tableau 4.2. Si $C_3 = 1.098618\dots$, nous semblons avoir

$$\frac{d}{dx} 3^x = C_3 3^x.$$

Le graphe associé aux données de la partie gauche du tableau 4.2 ainsi que le graphe de $y = f(x) = 3^x$ sont donnés à la figure 4.24. Il semble bien que $f'(x)$ soit un multiple plus grand que 1 de $f(x)$. ♣

Exemple 4.7.2

Soit $f(x) = 2^x$. Essayons de voir si, comme à l'exemple précédent, le rapport $f'(x)/f(x)$ est constant. Si c'est le cas, est-ce la même constante qu'à l'exemple précédent ?

Dans la partie droite du tableau 4.2, nous avons estimé $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

x	$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f'(x)/3^x$	x	$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f'(x)/2^x$
-2.00	0.122069...	1.098618...	-2.00	0.173287...	0.693150...
-1.84	0.145527...	1.098618...	-1.84	0.193612...	0.693150...
-1.68	0.173493...	1.098618...	-1.68	0.216320...	0.693150...
-1.52	0.206834...	1.098618...	-1.52	0.241691...	0.693150...
-1.36	0.246582...	1.098618...	-1.36	0.270039...	0.693150...
-1.20	0.293969...	1.098618...	-1.20	0.301711...	0.693150...
-1.04	0.350462...	1.098618...	-1.04	0.337098...	0.693150...
-0.88	0.417811...	1.098618...	-0.88	0.376635...	0.693150...
-0.72	0.498103...	1.098618...	-0.72	0.420809...	0.693150...
-0.56	0.593826...	1.098618...	-0.56	0.470165...	0.693150...
-0.40	0.707943...	1.098618...	-0.40	0.525309...	0.693150...
-0.24	0.843991...	1.098618...	-0.24	0.586921...	0.693150...
-0.08	1.006183...	1.098618...	-0.08	0.655759...	0.693150...
0.08	1.199545...	1.098618...	0.08	0.732672...	0.693150...
0.24	1.430066...	1.098618...	0.24	0.818605...	0.693150...
0.40	1.704886...	1.098618...	0.40	0.914616...	0.693150...
0.56	2.032520...	1.098618...	0.56	1.021889...	0.693150...
0.72	2.423116...	1.098618...	0.72	1.141744...	0.693150...
0.88	2.888774...	1.098618...	0.88	1.275655...	0.693150...
1.04	3.443919...	1.098618...	1.04	1.425273...	0.693150...
1.20	4.105749...	1.098618...	1.20	1.592440...	0.693150...
1.36	4.894764...	1.098618...	1.36	1.779212...	0.693150...
1.52	5.835407...	1.098618...	1.52	1.987891...	0.693150...
1.68	6.956816...	1.098618...	1.68	2.221045...	0.693150...
1.84	8.293731...	1.098618...	1.84	2.481545...	0.693150...
2.00	9.887565...	1.098618...	2.00	2.772598...	0.693150...

TABLE 4.2 – Approximations de la dérivée de $f(x) = 3^x$ à gauche et de $f(x) = 2^x$ à droite à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$.

Remarquons que $f'(x)/f(x) \approx 0.693150\dots$ pour les quelques valeurs de x dans la partie droite du tableau 4.2. Si $C_2 = 0.693150\dots$, nous semblons avoir

$$\frac{d}{dx}2^x \approx C_2 2^x.$$

Comme à l'exemple précédent, nous avons que $f'(x)/f(x)$ est constant mais la constante n'est pas la même qu'à l'exemple précédent.

Le graphe associé aux données de la partie droite du tableau 4.2 ainsi que le graphe de $y = f(x) = 2^x$ sont donnés à la figure 4.25. Il semble bien que $f'(x)$ soit un multiple plus petit que 1 de $f(x)$. ♣

Les trois questions suivantes découlent des exemples que nous venons de présenter.

1. Est-il toujours vrai que, quelle que soit la base b utilisée, la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = C_b b^x$ où C_b est une constante qui dépend seulement du choix de b ?
2. Si la réponse à la question précédente est affirmative, existe-t-il un moyen de calculer facilement cette constante C_b en fonction de la base b qui a été choisie ?
3. Existe-t-il une base b pour laquelle la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = f(x) = b^x$? C'est-à-dire, pour laquelle la constante de proportionnalité C_b est 1 ?

Nous répondons à la première question et donne une réponse partielle à la deuxième question dans la prochaine sous-section. La réponse à la troisième question sera donnée dans

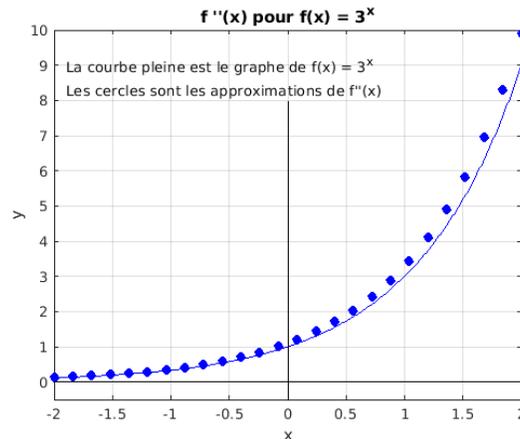


FIGURE 4.24 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = 3^x$ qui se retrouvent dans la partie gauche du tableau 4.2 sont représentées par des cercles. La courbe pleine est le graphe de 3^x .

la sous-section suivante. La réponse complète à la deuxième question dépend de la dérivée de fonctions composées. Cette réponse sera donnée dans la dernière sous-section.

La constante C_b

Pour répondre à la première question et aborder la réponse pour la deuxième question, il faut avoir recours à la définition de la dérivée. Si $f(x) = b^x$ pour une base quelconque $b > 0$, alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \frac{b^x b^h - b^x}{h} = b^x \frac{b^h - 1}{h}.$$

Comme b^x ne dépend pas de h , nous avons donc

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b^x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}}_{=C_b}$$

si la limite existe. Pour une base b donnée, l'expression $C_b \equiv \lim_{h \rightarrow 0} (b^h - 1)/h$ est une constante car elle est indépendante du point x qui est choisi.

Nous avons bien que, quelle que soit la base b utilisée, la dérivée de $f(x) = b^x$ est $f'(x) = C_b b^x$ pour une constante C_b . Pour calculer cette constante C_b , nous pouvons utiliser la formule

$$C_b \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}. \quad (4.7.1)$$

Remarque 4.7.3

Dans la discussion précédente, nous avons supposé que la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$ existait pour tout

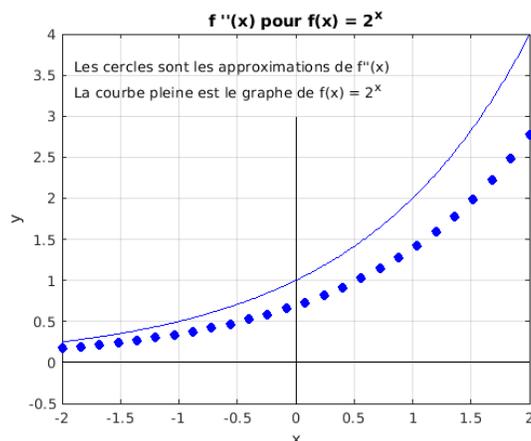


FIGURE 4.25 – Les approximations de $f'(x)$ où $f(x) = 2^x$ qui se retrouvent dans la partie droite du tableau 4.2 sont représentées par des cercles. La courbe pleine est le graphe de 2^x .

$b > 0$. Effectivement, la limite existe et cela sera prouvé à la section 8.5; après que nous aurons défini la fonction exponentielle e^x à l'aide d'une série. ♠

Exemple 4.7.4

Soit $f(x) = 3^x$. Pour estimer C_3 , nous utilisons (4.7.1) avec $b = 3$ et $h = h_n = 1/n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. La suite $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers 0. Donc $\frac{3^{h_n} - 1}{h_n}$ converge vers C_3 lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous obtenons les résultats suivants.

n	$h_n = 1/n^2$	$\frac{3^{h_n} - 1}{h_n}$
1	1	2
2	1/4	1.26429605180997...
3	1/9	1.16847867518778...
4	1/16	1.13720772916663...
5	1/25	1.12310877860219...
⋮	⋮	⋮
100	1/10000	1.09867263832664...
⋮	⋮	⋮
1000	1/1000000	1.09861289221413...
⋮	⋮	⋮

Nous avons donc que $\frac{3^{h_n} - 1}{h_n}$ approche la constante 1.09861... lorsque h_n approche 0.

b	$C_b \approx$		Prochaine valeur de b
2.0	0.6931470952...	< 1	
3.0	1.0986123122...	> 1	2.5 entre 2 et 3
2.5	0.9162908209...	< 1	2.7 entre 2.5 et 3
2.7	0.9932517031...	< 1	2.8 entre 2.7 et 3
2.8	1.0296195007...	> 1	2.75 entre 2.7 et 2.8
2.75	1.011600803...	> 1	2.72 entre 2.7 et 2.75
2.72	1.0006317996...	> 1	2.71 entre 2.7 et 2.72
2.71	0.9969487457...	< 1	2.715 entre 2.71 et 2.72
2.715	0.9987919380...	< 1	2.718 entre 2.715 et 2.72
2.718	0.9998963879...	< 1	2.719 entre 2.718 et 2.72
2.719	1.0002640937...	> 1	2.7185 entre 2.718 et 2.719
2.7185	1.0000802408...	> 1	2.7182 entre 2.718 et 2.7185
2.7182	0.9999698846...	< 1	2.7183 entre 2.7182 et 2.7185
2.7183	1.0000067440...	> 1	2.71825 entre 2.7182 et 2.7183
2.71825	0.9999883143...	< 1	2.71828 entre 2.71825 et 2.7183
2.71828	0.9999994166...	< 1	2.71829 entre 2.71828 et 2.7183
2.71829	1.0000029693...	> 1	2.718285 entre 2.71828 et 2.71829
2.718285	1.0000011929...	> 1	2.718282 entre 2.71828 et 2.718285
⋮	⋮	⋮	⋮
2.718281828	0.9999999939...		

TABLE 4.3 – C_b est estimé à l'aide de (4.7.1). Le nombre e est plus grand que les valeurs de b pour lesquelles $C_b < 1$ et plus petit que les valeurs de b pour lesquelles $C_b > 1$. Nous utilisons ce résultat pour prendre en sandwich le nombre $e \approx 2.718281828$.

Comme toute autre séquence qui tend vers 0 donnerait le même résultat, nous obtenons

$$C_3 \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = 1.09861 \dots$$

qui est la constante trouvée à l'exemple 4.7.1. ♣

La Formule 4.7.1 pour évaluer la constante C_b demande le calcul d'une limite comme nous venons de le faire à l'exemple précédent pour $b = 3$. Il existe une façon plus simple (du point de vue de l'utilisateur d'une calculatrice) de calculer la valeur de C_b que nous donnerons bientôt.

Le nombre e

Nous répondons maintenant à la troisième question au début de la section. C'est-à-dire, nous cherchons la base b telle que la dérivée de $f(x) = b^x$ soit $f'(x) = f(x) = b^x$.

Nous avons refait le travail de l'exemple 4.7.4 en choisissant des valeurs pour la base b de $f(x) = b^x$ de telle sorte que la constante de proportionnalité C_b entre f et sa dérivée soit de plus en plus près de 1. Nous résumons dans le tableau 4.3 suivant les résultats que nous avons trouvés.

Les valeurs de b dans le tableau 4.3 approche le nombre $e = 2.71828182852 \dots$. Nous avons donc le résultat suivant.

Proposition 4.7.5

Si $e = 2.71828182852\dots$ et $f(x) = e^x$ pour tout x , alors

$$f'(x) = f(x)$$

pour tout x .

La formule (4.7.1) avec la base $b = e$ devient donc

$$C_e = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Si $f(x) = e^x$, la formule précédente n'est nul autre que

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

La pente de la courbe $y = e^x$ à $x = 0$ est donc 1. La fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction exponentielle de la forme b^x dont la valeur de la dérivée à l'origine est 1.

Remarque 4.7.6

Nous avons vu la définition suivante de e à la section 2.3.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (4.7.2)$$

Est-ce le même nombre e que celui que nous venons de définir ?

Avec la définition de e^x donnée à la section 8.5, il est trivial de montrer que le nombre e définie par (4.7.2) satisfait $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Nous présentons ici un raisonnement qui supporte sans démontrer que le nombre e défini en (4.7.2) satisfait $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, il découle de la définition de limite d'une fonction en un point que $\frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$ quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0. Si $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, nous pouvons donc dire que $1 \approx \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$ pour n très grand. Si nous résolvons pour e , nous trouvons

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

pour n très grand. Le nombre e qui satisfait $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ et le nombre e défini par (4.7.2) semblent bien être le même nombre.

Il est beaucoup plus facile d'estimer e à l'aide de (4.7.2) que d'utiliser la formule (4.7.1) pour déterminer la valeur de b telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$ comme nous l'avons fait au tableau 4.3. ♠

Quelle est la valeur de la constante C_b

Nous pouvons maintenant donner une réponse complète à la deuxième question de la section 4.7.1. À savoir, comment pouvons-nous calculer la constante C_b dans la relation

$$\frac{d}{dx}b^x = C_b b^x$$

sans avoir à calculer une limite comme en (4.7.1)? Soit $q(x) = b^x$ avec $b > 0$. Puisque $q(x) = b^x = e^{x \ln(b)}$, nous pouvons exprimer $q(x)$ comme la composition $q(x) = f(g(x))$ des fonctions $g(x) = x \ln(b)$ et $f(y) = e^y$. Comme $f'(y) = f(y)$ et $g'(x) = \ln(b)$, nous avons

$$\frac{d}{dx}b^x = q'(x) = f'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = q(x)g'(x) = b^x \ln(b).$$

Nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 4.7.7

Si $b > 0$, alors

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x \ln(b)$$

pour tout x .

La constante C_b que nous cherchions est donc $\ln(b)$.

Exemple 4.7.8

Si $f(x) = 5^x$, alors $f'(x) = 5^x \ln(5)$. ♣

Exemple 4.7.9

Si $f(x) = 5^{x^2}$, la dérivée de f n'est pas $5^{x^2} \ln(5)$. Il faut remarquer que $f(x) = q(p(x))$ où $q(y) = 5^y$ et $p(x) = x^2$. Puisque $q'(y) = 5^y \ln(5)$ et $p'(x) = 2x$, la règle de la dérivée de fonctions composées donne

$$f'(x) = q'(p(x))p'(x) = 5^{x^2} \ln(5) \times 2x = 2x 5^{x^2} \ln(5).$$



Remarque 4.7.10

Comme nous avons vu à l'exemple précédent, il est facile de se tromper avec toutes les règles de calcul des dérivées. Il est souvent plus avantageux de s'en tenir aux formules les plus importantes.

À l'exemple précédent, nous aurions pu simplement écrire $f(x) = 5^{x^2}$ comme $f(x) = e^{x^2 \ln(5)}$. Il est alors clair que f est la composition de deux fonctions. En effet, $f(x) = q(p(x))$ où $q(y) = e^y$ et $p(x) = x^2 \ln(5)$. Puisque $q'(y) = e^y = q(y)$ et $p'(x) = 2x \ln(5)$, nous obtenons

$$f'(x) = q'(p(x))p'(x) = q(p(x))(2x \ln(5)) = 5^{x^2} (2x \ln(5)) = 2x 5^{x^2} \ln(5).$$



4.7.2 Dérivée de $\log_b(x)$

Puisque $\log_b(x) = \ln(x)/\ln(b)$ pour tout $x > 0$, il suffit de trouver une formule pour la dérivée de \ln . Pour trouver cette formule, nous utilisons le fait que $g(x) = \ln(x)$ est la fonction inverse de $f(x) = e^x$.

Si nous dérivons les deux côtés de l'égalité $f(g(x)) = x$ pour $x > 0$, nous trouvons

$$f'(g(x))g'(x) = 1.$$

Or $f'(x) = f(x)$ et $f(g(x)) = x$, donc

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{x}.$$

Nous venons de démontrer la règle suivante.

Proposition 4.7.11

Pour $x > 0$, alors

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Quelle est la dérivée de $\ln|x|$ pour tout $x \neq 0$? Puisque $|x| = x$ pour $x > 0$, nous avons

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour } x > 0.$$

Puisque $|x| = -x$ pour $x < 0$, nous avons $\ln|x| = \ln(-x)$ pour $x < 0$. Ainsi, pour $x < 0$, $\ln|x| = g(h(x))$ où $g(y) = \ln(y)$ et $h(x) = -x$. Puisque $g'(y) = 1/y$ et $h'(x) = -1$, nous obtenons donc

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{h(x)} h'(x) = \left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = \frac{1}{x} \quad \text{pour } x < 0.$$

Nous pouvons donc généraliser le théorème précédent de la façon suivante.

Proposition 4.7.12

Si $x \neq 0$, alors

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}.$$

Exemple 4.7.13

Quelle est la dérivée de $\log_5(x)$ pour tout $x > 0$?

Puisque $\log_5(x) = \ln(x)/\ln(5)$, nous avons

$$\frac{d}{dx} \log_5(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(5)} \right) = \frac{1}{\ln(5)} \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x \ln(5)}.$$

**Exemple 4.7.14**

Quelle est la dérivée de $q(x) = \ln(\sin(x))$ pour $0 < x < \pi$?

Notez que nous assumons $0 < x < \pi$ pour que $\sin(x)$ soit positif et donc que $\ln(\sin(x))$ soit bien définie.

Puisque $q = f \circ g$ où $g(x) = \sin(x)$ et $f(y) = \ln(y)$, nous obtenons de la règle pour la dérivée de fonctions composées que

$$q'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{\sin(x)} \cos(x) = \cot(x)$$

pour $0 < x < \pi$.

**Exemple 4.7.15**

Calculons la dérivée de $f(x) = (x+1)^5(x+5)^7/(x+2)^4$.

Il serait tentant d'utiliser la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions mais cela risquerait d'être très long.

En calcul numérique, nous utilisons très souvent la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour remplacer le produit de très grands nombres par la somme de leurs logarithmes. Cela permet d'éviter les nombres trop grands pour l'ordinateur. La même idée peut être utilisée ici. Nous avons

$$\ln |f(x)| = 5 \ln |x+1| + 7 \ln |x+5| - 4 \ln |x+2|$$

Si nous dérivons des deux côtés de l'égalité, nous trouvons

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2}$$

et ainsi

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2} \right) = \frac{(x+1)^5(x+5)^7}{(x+2)^4} \left(\frac{5}{x+1} + \frac{7}{x+5} - \frac{4}{x+2} \right).$$

Calculez la dérivée de f avec la règle de la dérivée du quotient de deux fonctions pour comparer cette méthode avec celle que nous venons d'introduire.

**Exemple 4.7.16**

Calculons la dérivée de $g(x) = \frac{(x^4+2)e^{2x}}{(x^2+3x)\sqrt{x^2+3}}$.

Nous pourrions adresser ce problème directement avec la règle de dérivation du quotient de deux fonctions mais, comme la fonction g est assez complexe, ce ne serait pas une bonne idée. Nous invitons le lecteur à essayer.

Nous allons faire appel à l'ensemble de nos connaissances des méthodes de dérivation. Commençons par calculer le logarithme de g . Nous obtenons

$$\ln |g(x)| = \ln \left| \frac{(x^4+2)e^{2x}}{(x^2+3x)\sqrt{x^2+3}} \right| = \ln \left(\frac{(x^4+2)e^{2x}}{|x^2+3x|\sqrt{x^2+3}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(x^4 + 2) + \ln(e^{2x}) - \ln|x^2 + 3x| - \ln((x^2 + 3)^{1/2}) \\
&= \ln(x^4 + 2) + 2x - \ln|x^2 + 3x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3)
\end{aligned}$$

Nous dérivons maintenant des deux côtés

$$\frac{d}{dx} \ln |g(x)| = \frac{d}{dx} \ln(x^4 + 2) + \frac{d}{dx} (2x) - \frac{d}{dx} \ln|x^2 + 3x| - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(x^2 + 3)$$

pour obtenir

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{4x^3}{x^4 + 2} + 2 - \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{x^2 + 3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{4x^3}{x^4 + 2} + 2 - \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{x^2 + 3} \right) g(x) \\
&= \left(\frac{4x^3}{x^4 + 2} + 2 - \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{x^2 + 3} \right) \left(\frac{(x^4 + 2)e^{2x}}{(x^2 + 3x)\sqrt{x^2 + 3}} \right)
\end{aligned}$$



4.7.3 Dérivée de x^α où α est réel

Nous avons vu que la dérivée de $h(x) = x^n$ où n est un entier positive est $h'(x) = nx^{n-1}$. Mais, quelle est la dérivée de $h(x) = x^\alpha$ si α n'est pas un entier positif. Par exemple, quelle est la dérivée de $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ou de x^π ? Commençons par un exemple simple.

Exemple 4.7.17

Soit $f(x) = x^{-1} = 1/x$ pour $x \neq 0$. Si nous estimons $f'(x)$ pour quelques valeurs de x à l'aide du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ où $h = 0.00001$, nous obtenons les résultats suivants.

x	$f'(x) \approx \frac{f(x+0.00001) - f(x)}{0.00001}$	$ -x^{-2} - f'(x) $
-1	-1.00001000009...	$0.1000009 \dots \times 10^{-4}$
1	-0.99999000010...	$0.999989 \dots \times 10^{-5}$
2	-0.24999875000...	$-0.124999 \dots \times 10^{-5}$
π	-0.10132086112...	$-0.32251 \dots \times 10^{-6}$
3.5	-0.08163241982...	$-0.23323 \dots \times 10^{-6}$

Remarquons que $f'(x) \approx -x^{-2}$ pour les valeurs de x considérées dans le tableau. Nous pouvons donc supposer que $f'(x) = -x^{-2}$ pour tout $x \neq 0$.

Montrons à partir de la définition de la dérivée que $f'(x) = -x^{-2}$ pour tout $x \neq 0$. En effet, si $x \neq 0$, alors

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2}$$

car $x^2 + xh \rightarrow x^2$ lorsque $h \rightarrow 0$. ♣

L'exemple précédent semble indiquer que la règle qui dit que la dérivée de $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$ pourrait s'appliquer pour tous les nombres entiers n .

Exemple 4.7.18

Calculons la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ à partir de la définition.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right) \underbrace{\left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)}_{=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

♣

Encore une fois, l'exemple précédent semble indiquer que la règle qui dit que la dérivée de $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$ pourrait s'appliquer pour tous les nombres rationnels n . En fait, nous avons plus.

Pour montrer que la règle est vraie pour tout exposant réel non nul, il faut se rappeler que $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ pour $x > 0$. Ainsi, $x^\alpha = f(g(x))$ où $g(x) = \alpha \ln(x)$ et $f(y) = e^y$. Puisque $f'(y) = f(y)$ et $g'(x) = \alpha/x$, nous déduisons de la règle de la dérivée de fonctions composées que

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = f'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) = x^\alpha \left(\frac{\alpha}{x} \right) = \alpha x^{\alpha-1}$$

pour $x > 0$. Nous venons de démontrer la règle suivante.

Proposition 4.7.19

Si $\alpha \neq 0$ est un nombre réel, alors

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

pour tout $x > 0$.

Exemple 4.7.20

Si $f(x) = x^{-1/2}$, alors $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{-1}{2x^{3/2}}$ pour $x > 0$. ♣

Avant de terminer cette section, il y a un exemple important que nous nous devons de présenter.

Exemple 4.7.21

Que devons-nous faire pour calculer la dérivée d'une fonction comme $f(x) = x^x$? La variable

x apparaît à la base et à l'exposant. La règle ci-dessus pour dérivée x^α ne s'applique pas car l'exposant n'est pas une constante. La règle donnée à la proposition 4.7.7 pour dérivée b^x ne s'applique pas car c'est la base qui n'est pas une constante.

Nous devons utiliser les fonctions exponentielles et logarithmiques.

Puisque

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln(x)},$$

il découle de la règle de dérivation des fonctions composées que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{d}{dy} e^y \Big|_{y=x \ln(x)} \right) \frac{d}{dx} (x \ln(x)) = \left(e^y \Big|_{y=x \ln(x)} \right) (\ln(x) + 1) \\ &= e^{x \ln(x)} (\ln(x) + 1) = x^x (\ln(x) + 1). \end{aligned}$$



4.7.4 Dérivée des fonction trigonométriques inverses 🌲 🔧

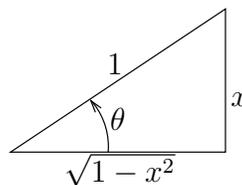
Si nous dérivons les deux côtés de l'identité $x = \sin(\arcsin(x))$ pour $-1 < x < 1$, nous obtenons grâce à la dérivée de fonctions composées que

$$1 = \cos(\arcsin(x)) \frac{d}{dx} \arcsin(x).$$

Donc

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Posons $\theta = \arcsin(x)$. Donc $\sin(\theta) = x$ par définition de l'arcsinus et nous obtenons la figure suivante par définition des fonctions trigonométriques à partir d'un triangle droit.



Nous en déduisons que

$$\cos(\arcsin(x)) = \cos(\theta) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Nous obtenons donc la formule suivante.

Proposition 4.7.22

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

pour $-1 < x < 1$.

De façon semblable, le lecteur peut démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.7.23

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour $-1 < x < 1$.

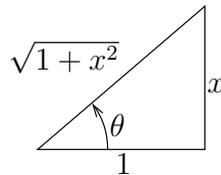
Si maintenant nous dérivons les deux côtés de l'identité $x = \tan(\arctan(x))$ où x est réel, nous obtenons grâce à la dérivée de fonctions composées que

$$1 = \sec^2(\arctan(x)) \frac{d}{dx} \arctan(x).$$

Donc

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}.$$

Posons $\theta = \arctan(x)$. Donc $\tan(\theta) = x$ par définition de l'arctangente et nous obtenons la figure suivante par définition des fonctions trigonométriques à partir d'un triangle droit.



Nous en déduisons que

$$\sec(\arctan(x)) = \sec(\theta) = \sqrt{1+x^2}.$$

Nous obtenons donc la formule suivante.

Proposition 4.7.24

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

4.8 Exercices

4.8.1 Taux de variation

Question 4.1

Pour chacune des fonctions suivantes et des points t_0 suivants :

- i) Calculez la moyenne de la fonction f entre les points t_0 et $t_0 + \Delta t$ pour $\Delta t = 1, 0.5, 0.1$ et 0.01 .
- ii) Donnez l'équation de la sécante qui passe par les points $(t_0, f(t_0))$ et $(t_0 + \Delta t, f(t_0 + \Delta t))$

pour $\Delta t = 1, 0.5, 0.1$ et 0.01 .

iii) Dessiner, sur une même figure, le graphe de la fonction avec ses quatre sécantes.

iv) Donner, en vous basant sur les valeurs calculées en (i), une approximation de la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(t)$ au point $(t_0, f(t_0))$.

v) Donnez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(t)$ au point $(t_0, f(t_0))$ en vous basant sur votre réponse en (iv).

$$\text{a) } f(t) = 2t^2 \text{ et } t_0 = 1. \quad \text{b) } f(t) = e^{2t} \text{ et } t_0 = 0.$$

Question 4.2

Supposons que le nombre d'individus au temps t (en heures) pour une certaine population animale soit donnée par $p(t) = 1.5^t$.

- Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 1 ?
- Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.1 ?
- Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.01 ?
- Quelle est le taux de croissance moyen entre 0 et 0.0001 ?
- Quelle est le taux de croissance instantané à $t = 0$?
- Donnez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = p(t)$ au point $(0, p(0))$.

Question 4.3 🌲

Les données du tableau suivant décrivent la hauteur H (en mètres) d'un arbre en fonction du temps t (en années).

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	10.11	11.18	12.40	13.74	15.01	16.61	18.27	20.17	22.01	24.45	26.85

- Estimez le taux de croissance instantané à $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ ans à l'aide de la moyenne des taux de croissance que vous pouvez estimer à partir des données de l'année qui précède et de l'année qui suit immédiatement (si possible).
- Tracez sur un graphe les points qui représentent le taux de croissance instantané pour chacune des années en (a). Est-ce que les points semblent tracer une courbe quelconque ?
- Estimez le taux de croissance relatif à $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ ans.
- Tracez sur un graphe les points qui représente le taux de croissance relatif pour chacune des années en (c). Est-ce que les points semblent tracer une courbe quelconque ?
- Comparez vos deux graphes. Que pouvez-vous conclure ?

Question 4.4 🌲

Le nombre d'individus dans une population est donné par la formule $p(t) = 2^t$ où t est le temps en heures. Trouvez le taux de croissance moyen entre 0 et 1 heure, 0 et 0.1 heure, 0 et 0.01 heure, et 0 et 0.001 heure.

Quelle est la limite ? Que représente cette limite ? Tracez le graphe de la fonction p et la droite tangent à ce graphe au point $(t, p) = (0, 1)$. Donnez l'équation de cette droite tangente.

Question 4.5

Le nombre N de visites au nouveau site Internet du ministère de l'environnement est donné dans le tableau suivant.

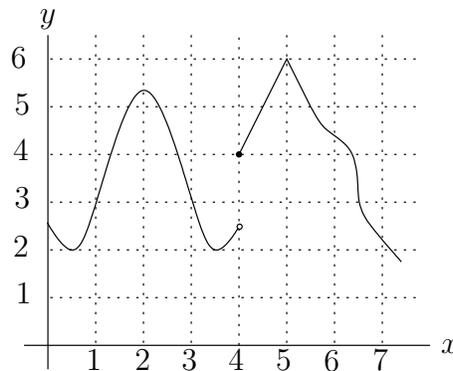
nombre d'heures après l'inauguration du site	1	2	3	4	5
N	30	57	87	151	246

- a) Trouvez le taux moyen de croissance des visites de la deuxième à la troisième heure, de la troisième à la quatrième heure, et de la troisième à la cinquième heure. Donnez les unités de vos réponses.
- b) Donnez une approximation du taux instantané de croissance des visite après trois heures en prenant la moyenne de deux taux de croissance moyens. Donnez les unités de votre réponse.
- c) Est-ce qu'il est réaliste d'estimer le taux de croissance instantané des visites après trois heures sur la base des données que nous possédons ?

4.8.2 Dérivée d'une fonction

Question 4.6

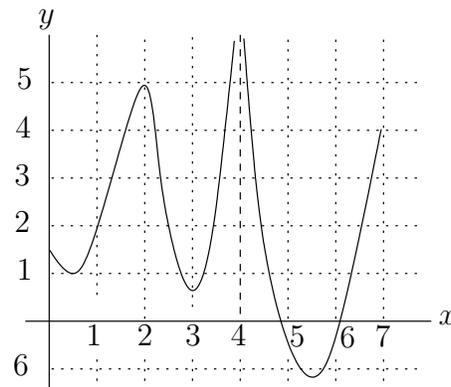
Le graphe de la fonction f est donné ci-dessous.



- a) Identifiez les points où la fonction n'est pas continue.
- b) Identifiez les points où la fonction n'est pas différentiable et dite pourquoi.
- c) Identifiez les points où la dérivée de la fonction est nulle.

Question 4.7

Le graphe de la fonction f est donné ci-dessous.



- a) Identifiez les points où la dérivée est positive.
- b) Identifiez les points où la dérivée est négative.
- c) Identifiez les points où la dérivée est nulle.

Question 4.8

Un chien court après un cycliste. Tracez sur un même système de coordonnées la position du chien et du cycliste en fonction du temps pour chacun des scénarios suivants.

- a) Le chien et le cycliste se déplacent à vitesse constante mais le chien se déplace plus rapidement que le cycliste et, après un certain temps, rattrape le cycliste.
- b) La vitesse du chien augmente et celle du cycliste diminue. Le chien rattrape le cycliste.
- c) La vitesse du chien et du cycliste diminue, et la distance entre les deux augmente.

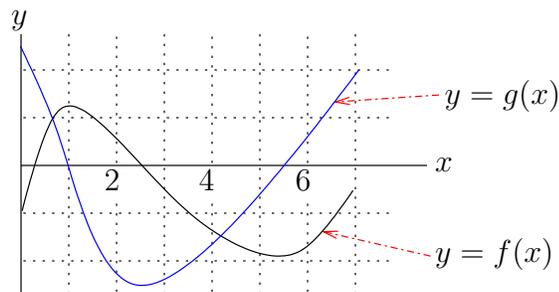
Question 4.9

Une voiture est remorquée par une dépanneuse à l'aide d'une tige rigide de 10 mètres de long. Tracez les graphes possibles de la position et de la vitesse des deux véhicules en fonction du temps dans chacun des cas suivants.

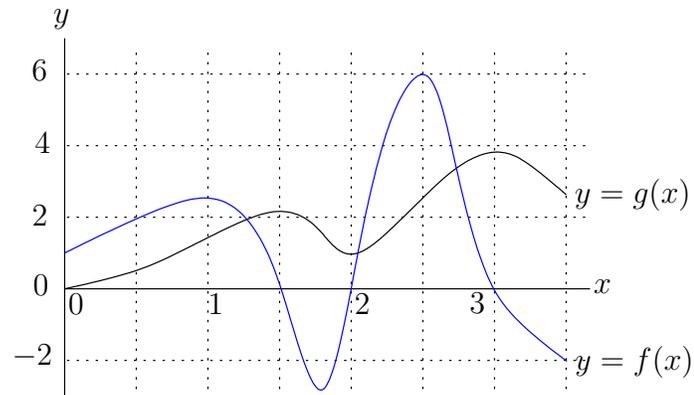
- a) La dépanneuse part du repos, recule lentement pour une courte période de temps, arrête, avance lentement pour une autre courte période de temps et finalement avance plus rapidement.
- b) La dépanneuse est initialement au repos, accélère lentement, garde une vitesse constante pour un certain temps, et finalement arrête brusquement.

Question 4.10

La figure ci-dessous contient le graphe d'une fonction et le graphe de la dérivée de cette fonction. Quelle est le graphe de la dérivée ?

**Question 4.11**

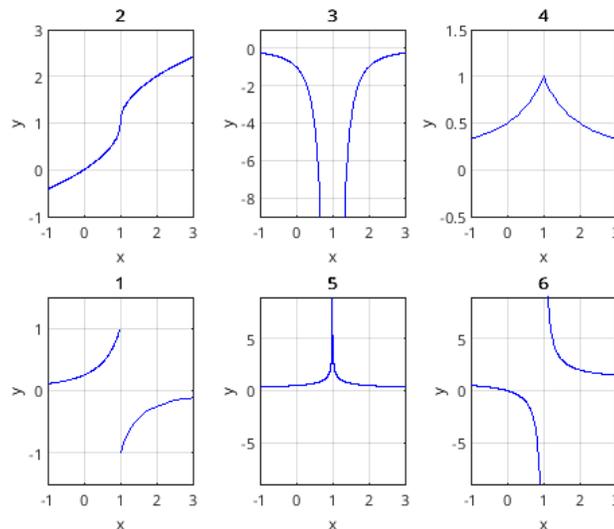
Considérons les graphes de deux fonctions donnés dans la figure ci-dessous.



Identifiez la courbe qui représente le graphe de la dérivée d'une fonction dont le graphe est donné par l'autre courbe.

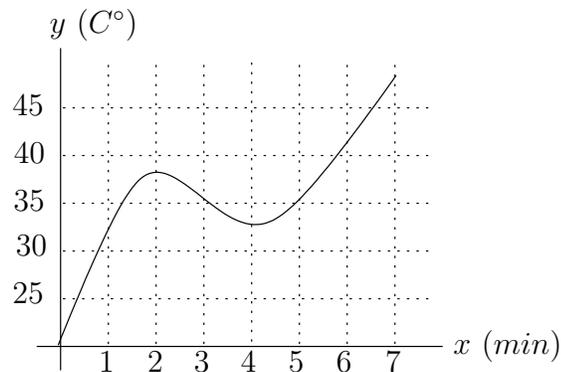
Question 4.12

Trois des graphes ci-dessous représentent les graphes de fonctions et les trois autres graphes représentent les graphes des dérivées de ces fonctions. Donner les paires (n_1, n_2) où n_1 est le numéro d'un graphe associé au graphe d'une fonction et n_2 est le numéro du graphe associé au graphe de la dérivée de cette fonction. **Vous ne pouvez pas utiliser une image plus d'une fois.**



Question 4.13

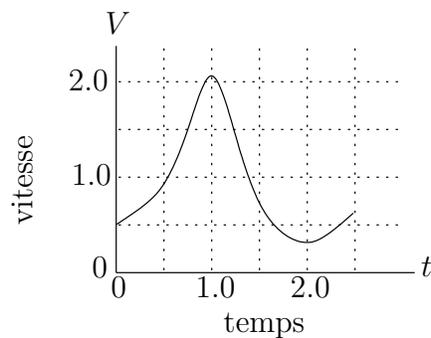
La température en fonction du temps d'une substance chimique est donnée par le graphe suivant.



Tracez le graphe du taux de variation instantané de la température en fonction du temps. Sur le graphe que vous avez dessiner, indiquer lorsque la température augmente et lorsqu'elle diminue.

Question 4.14

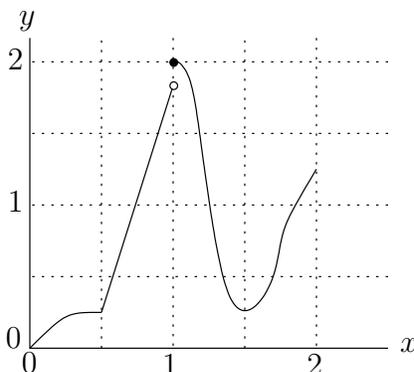
Le graphe du volume $V(t)$ en mètres cubes d'un objet en fonction du temps t en heures est donné ci-dessous.



- Identifiez un point t où la dérivée est positive.
- Identifiez un point t où la dérivée est négative.
- Identifiez le point t avec la plus grande dérivée.
- Identifiez le point t avec la plus petite dérivée.
- Identifiez les points t où la dérivée est nulle.
- Tracez le graphe de la dérivée V' de V .

Question 4.15

Le graphe d'une fonction f est donné ci-dessous.



Donnez les points x qui satisfont chacun des cas suivants.

- La fonction f n'est pas continue.
- La fonction f n'est pas différentiable et dite pourquoi.
- La dérivée $f'(x)$ est nulle.

Question 4.16

Utilisez la définition de la dérivée pour calculer la dérivée de $f(x) = 4 - x^2$. Tracez le graphe de f et f' . Trouvez les points où la dérivée de f est nulle. Déterminez les intervalles où la fonction est strictement croissante et ceux où elle est strictement décroissante.

Question 4.17

Soit $g(x) = x + 2x^2$ une fonction quadratique. Donnez la pente de la sécante à la courbe $y = g(x)$ entre les points x et $x + h$. Donnez la pente de la tangente à la courbe $y = g(x)$ au point x en passant à la limite lorsque h approche 0. Donnez la dérivée de g au point x .

Question 4.18

Utilisez la définition de la dérivée pour calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- $f(x) = (x + 1)^2$
- $f(x) = \frac{1}{2x + 5}$
- $f(x) = x^2 + x$
- $f(x) = \frac{x}{3x - 1}$
- $f(x) = \frac{1}{x(x + 1)}$

Question 4.19

La fonction de Heaviside est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Montrez qu'il n'existe pas de solution à l'équation $H(x) = 0.5$ même si $H(-1) = 0$ et $H(1) = 1$. Ceci démontre que le Théorème des valeurs intermédiaires est valable seulement pour les fonctions continues.

Montrez qu'il n'existe pas de valeur c telle que $H'(c)$ soit égale à la pente $\frac{H(1) - H(-1)}{2}$ de la sécante entre les points $(-1, H(-1))$ et $(1, H(1))$. Ceci démontre que le Théorème de la moyenne est valable seulement pour les fonctions qui sont différentiables.

Question 4.20 🌲

Un animal passe de 4 kg à 60 kg en 14 ans. Si nous supposons que la masse de l'animal est une fonction différentiable par rapport au temps, pourquoi pouvons-nous dire que le taux de croissance (instantané) a été de 4 kg/année à un moment durant les 14 années ?

4.8.3 Calcul des dérivées**Question 4.21**

Calculez la dérivée de $g(y) = -3y + 5$ et déterminez les intervalles, s'il y en a, où la fonction est strictement croissante.

Question 4.22

Une quantité $T(t)$ au temps t est donnée par le produit de deux quantités : $p(t) = 2 \times 10^6 + 10^3 t^2$ et $M(t) = 80 - 0.5t$.

- Donnez T en fonction du temps.
- Calculez la dérivée de T en fonction du temps.
- Quelle est la valeur de T au moment où $T'(t) = 0$? Quelle est la valeur de p à ce moment ? Quelle est la valeur de M à ce moment ?

Question 4.23

Un train se déplace à 110 km/h. Un passager de ce train se déplace à une vitesse de 3 km/h vers l'arrière du train. Quelle est la vitesse de ce passager par rapport au sol ?

Question 4.24

Pour chacune des questions suivantes, Calculez la dérivée à l'aide de la formule de dérivation des fonctions composées.

- Soit $T(W) = 30 - 0.2W$, $S(T) = 9 - T/5$ et $H(W) = S(T(W))$. Calculez $\frac{dH}{dW}$.
- Soit $L(T) = 10 + T/10$, $V(L) = 2L^3$, $M(V) = 1.3V$ et $H(T) = M(V(L(T)))$. Calculez $\frac{dH}{dT}$.
- Soit $M(G) = 5G + 2$, $P(M) = 0.5M$ et $H(G) = P(M(G))$. Calculez $\frac{dH}{dG}$.
- Soit $V(I) = 5I^2$, $F(V) = 37 + 0.4V$ et $H(I) = F(V(I))$. Calculez $\frac{dH}{dI}$.

Question 4.25

Soit $B = 0.007W^{2/3}$ et $W = 0.12L^{2.53}$. De plus, supposons que L soit une fonction de t et que $L'(t)$ soit constant. Si nous savons que L augmente de 5 lorsque t augmente de 10, quelle est la dérivée de $H(t) = B(W(L(t)))$ par rapport à t lorsque $L = 18$?

Question 4.26

Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = x^{1/5}$ b) $h(t) = x^{1/e}$ c) $g(z) = 3z^3 + 2z^2$
d) $p(z) = (1 + 3z)^2(1 + 2z)^3$ e) $f(x) = (2x + 1)^3$ f) $h(x) = (x^2 - 5)^{135/2}$
g) $G(x) = \frac{(1+x)(2+x)}{(3+x)}$ h) $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$ i) $f(x) = \log_2(1 - 3x)$
j) $f(y) = (5y - 3)^7(y^2 - 1)$ k) $h(t) = \frac{1+t}{2-t}$ l) $g(z) = \frac{1+z^2}{1+2z^3}$
m) $f(x) = \frac{\ln(2x + e^x)}{2x + e^x}$ n) $h(x) = \frac{(1+3x)^2}{(1+2x)^3}$ o) $f(x) = e^{-7x}$
p) $g(z) = \left(1 + \frac{2}{1+z}\right)^7$ q) $f(t) = (1+3t)^{33}$ r) $h(x) = \ln|\ln(x)|$
s) $g(t) = \ln\left(\frac{t^2}{(t-2)^3}\right)$ t) $f(x) = x^{\ln(x)}$ u) $f(x) = x^{x^2}$
v) $g(t) = \ln\left(\frac{t^7(t^2-5)^8}{(t-2)^5}\right)$

Question 4.27 

Évaluez les dérivées suivantes.

- a) $h(\theta) = \sec(\theta) \tan(\theta)$ b) $G(t) = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi(t-3)}{5}\right)$
c) $f(x) = \ln(4 + \sin(x))$ d) $g(\theta) = \sqrt{2\theta \sin(\theta)}$
e) $F(\theta) = \tan^2(\sin(\theta))$ f) $g(x) = x \arctan(x^2)$
g) $h(\theta) = \sin(\theta) \cos(\theta)$ h) $h(x) = 3 + \cos(2x - 1)$
i) $g(z) = e^{\cos(z)}$ j) $f(\theta) = \sec(\theta)$
k) $f(x) = e^{\sin(x^{100}+1)}$ l) $g(x) = x^{\sin(x)}$
m) $f(t) = \ln\left(\frac{2t - \cos(6t)}{t}\right)$

Question 4.28Calculez la dérivée de $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ de deux façons :

- i: Avec la règle de la dérivée d'un quotient.
ii: Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Question 4.29Calculez la dérivée de $f(x) = \ln(7x)$ de deux façons :

- i: Avec une des identités satisfaites par $\ln(\cdot)$.
ii: Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Question 4.30Calculez la dérivée de $f(x) = 7^x$ de deux façons :

- i: Avec la règle introduite en classe pour dériver ce type de fonctions.
ii: Avec le fait que 7^x peut s'exprimer sous la forme $e^{h(x)}$ pour une certaine fonction h .

Question 4.31 🔧 🌲

Calculez la dérivée de $f(\theta) = \cos(2\theta)$ de deux façons :

- i: Avec les formules d'addition pour le cosinus et le sinus.
- ii: Avec la règle de la dérivée de fonctions composées.

Montrez que vos deux réponses sont égales.

Question 4.32

Un tableau contenant certaines valeurs de f , f' , g et g' est donné ci-dessous.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

- a) Si $h(x) = f(g(x))$, calculez $h'(1)$.
- b) Si $h(x) = g(f(x))$, calculez $h'(1)$.
- c) Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calculez $h'(1)$.
- d) Si $h(x) = f^{-1}(x)$, calculez $h'(1)$

Suggestion pour (d) : $f(f^{-1}(x)) = x$. Nous assumons que f est injective.

Question 4.33

Soit f une fonction strictement croissante positive. Une fonction f est positive si $f(x) > 0$ pour tout x . Montrez que la fonction g définie par $g(x) = 1/f(x)$ pour tout x est strictement décroissante.

Question 4.34

Pour chacune des fonctions suivantes, calculez la dérivée de la fonction inverse f^{-1} en procédant de deux façons :

- i: Trouvez la fonction inverse et dérivez cette fonction.
- ii: Calculez la dérivée de la fonction composée $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$.

a) $f(x) = 2 + x^3$ b) $f(x) = 1 - e^{-x}$

Question 4.35 🔧 🌲

Pour chacune des courbes ci-dessous, trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe au point donné.

a) $y = \ln(x^3 - 7)$ au point $(2, 0)$ b) $y = \sin(\sin(x))$ au point $(x, y) = (\pi, 0)$.

Question 4.36

- a) Trouvez la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x) = x^3 + 8$ au point où cette courbe coupe l'axe des x .
- b) Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'intersection trouvé en (a).

c) Trouvez l'équation de la droite perpendiculaire à la droite tangente en (b) qui passe par le point d'intersection en (a).

Question 4.37 🔧 🌲

Pour quelle valeur de x avons-nous que la tangente à la courbe $y = f(x) = \sqrt{3}x + 2\sin(x)$ au point $(x, f(x))$ est horizontale?

Question 4.38

L'aire d'un disque en fonction de son rayon est donné par la formule $A(r) = \pi r^2$, où r est mesuré en mètres et A en mètres carrés. Calculez la dérivée de l'aire en fonction du rayon. Illustrez par un dessin la région représentée par la différence entre un disque de rayon $r + \Delta r$ et un disque de rayon r . Donnez une représentation géométrique de la dérivée. Est-ce que les unités sont cohérentes.

Question 4.39 🌲 🔧

Soit $f(x) = x^2$. Trouvez le point sur l'intervalle $[0, 2]$ où $f'(x) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$.



Applications de la dérivée | 5

Nous présentons plusieurs des applications de la dérivée d'une fonction dans ce chapitre. Comme nous avons mentionné dans l'avant-propos, les applications spécifiques aux sciences de la vie sont identifiées par le symbole $\mathbf{\clubsuit}$ alors que ceux spécifiques aux domaines de la physique et du génie sont identifiées par le symbole $\mathbf{\spadesuit}$. Cette classification des applications est très académique et arbitraire. Il est fort possible que certaines applications classifiées pour le génie pourrait aussi bien être utiles pour les sciences de la vie, et vice-versa.

5.1 Étude de courbes

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. À la section 4.3, nous avons vu que $f'(x)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$. À la proposition 4.4.2 de la section 4.4, nous avons utilisé cette propriété pour donner des conditions sur la dérivée f' qui déterminent les intervalles de croissance et décroissance de f , et les minimums et maximums locaux de f .

En résumé, nous avons les résultats suivants.

1. La fonction f est strictement croissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) > 0$ pour tout x entre a et b .
2. La fonction f est croissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) \geq 0$ pour tout x entre a et b .
3. La fonction f est strictement décroissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) < 0$ pour tout x entre a et b .
4. La fonction f est décroissante sur un intervalle $]a, b[$ si $f'(x) \leq 0$ pour tout x entre a et b .
5. La fonction f a un maximum local au point c de l'intervalle $]a, b[$ si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) < 0$ pour $x > c$ près de c .
6. La fonction f a un minimum local au point c de l'intervalle $]a, b[$ si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ près de c et $f'(x) > 0$ pour $x > c$ près de c .

Il découle de la remarque 4.4.4 que, si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui possède un minimum ou maximum local au point $x = c$ de l'intervalle $]a, b[$, nous avons un des deux scénarios suivants : f n'a pas de dérivée au point $x = c$ ou $f'(c) = 0$. Pour trouver les maximums et minimums locaux d'une fonction f , il faut donc analyser les points c définis ci-dessous.

Définition 5.1.1

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Un **point critique** de la fonction f est un point $c \in]a, b[$ qui satisfait une des deux conditions suivantes :

1. f n'a pas de dérivée au point $x = c$.
2. $f'(c) = 0$.

En plus de pouvoir déterminer sur quels intervalles une fonction est croissante ou décroissante et à quels points elle a un maximum ou minimum local, nous pouvons aussi utiliser la dérivée pour déterminer sur quels intervalles la pente de la fonction est croissante ou décroissante. Ce type de comportement des fonctions porte le nom de **courbure** de la fonction. Nous observons deux types de courbure.

Définition 5.1.2

Une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** (ou **concave vers le haut**) sur $]a, b[$ si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (5.1.1)$$

pour tous x et y dans $]a, b[$ et tous $\lambda \in [0, 1]$ (figure 5.1).

La fonction f est dite **concave** (ou **concave vers le bas**) sur $]a, b[$ si le signe \leq est remplacé par \geq en (5.1.1).

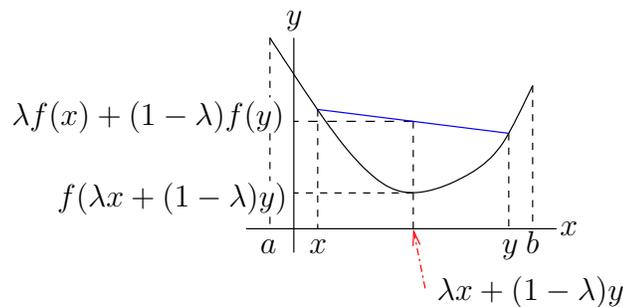


FIGURE 5.1 – Exemple d'une fonction convexe sur l'intervalle $]a, b[$. La droite qui relie les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est au-dessus du graphe de f .

Dans le cas où f est une fonction différentiable définie sur un intervalle $]a, b[$, nous obtenons que f est convexe sur $]a, b[$ si, pour tout $x \in]a, b[$, nous avons que la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$ est strictement en dessous du graphe de f sauf naturellement au point $(x, f(x))$ lui-même. À première vue, cette dernière caractérisation des fonctions convexes n'est pas facile à vérifier. Cependant, le théorème suivant nous donne un outil pour démontrer facilement qu'une fonction est convexe ou concave sur un intervalle.

Proposition 5.1.3

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. Si f' est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]a, b[$, alors f est convexe sur l'intervalle $]a, b[$ (figure 5.2).
2. Si f' est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $]a, b[$, alors f est concave sur l'intervalle $]a, b[$ (figure 5.3).

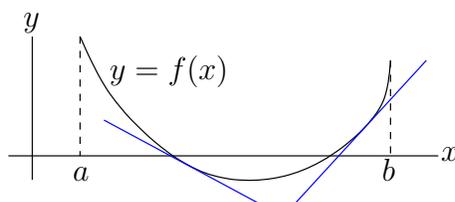


FIGURE 5.2 – Fonction convexe sur l'intervalle $]a, b[$. En tout point, le droite tangente au graphe de la fonction est en dessous du graphe de cette fonction. Notons que la pente de la tangente augmente lorsque x augmente.

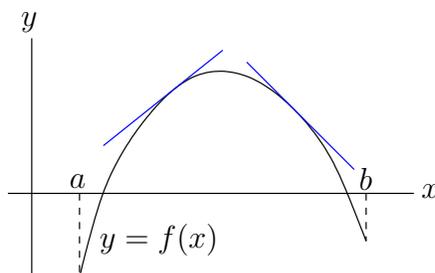


FIGURE 5.3 – Fonction concave sur l'intervalle $]a, b[$. En tout point, le droite tangente au graphe de la fonction est au dessus du graphe de cette fonction. Notons que la pente de la tangente diminue lorsque x augmente.

Si f' est une fonction différentiable, nous pouvons utiliser sa dérivée pour déterminer les intervalles où elle est croissante et décroissante comme nous avons fait pour la fonction f .

Définition 5.1.4

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est elle même une fonction différentiable. La **dérivée seconde de f** ou **dérivée d'ordre 2 de f** est la dérivée de la fonction f' . Elle est dénotée f'' , $\frac{d^2f}{dx^2}$ ou $f^{(2)}$.

Si $f'' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, la **dérivée troisième de f** ou la **dérivée d'ordre**

3 de f est la dérivée de la fonction f'' . Elle est dénotée f''' , $\frac{d^3 f}{dx^3}$ ou $f^{(3)}$.
 Par induction, nous pouvons définir la **n^e dérivée de f** ou **dérivée d'ordre n de f** qui est dénotée $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Proposition 5.1.5

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée d'ordre deux.

1. La fonction f est convexe sur un intervalle $]a, b[$ si $f''(x) > 0$ pour tout x entre a et b .
2. La fonction f est concave sur un intervalle $]a, b[$ si $f''(x) < 0$ pour tout x entre a et b .

Les points où la fonction change de convexe à concave et vice-versa sont très utiles pour tracer le graphe d'une fonction. Nous leur donnons donc un nom.

Définition 5.1.6

Un **point d'inflexion** est un point du domaine de la fonction où la direction de la concavité change.

Proposition 5.1.7

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Un point p est un point d'inflexion si f' a un maximum ou minimum local à p .

Remarque 5.1.8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Nous avons vu que $f'(p) = 0$ n'était pas suffisant et nécessaire pour obtenir un maximum ou minimum au point p . Nous avons un problème semblable avec les points d'inflexion.

Nous n'avons pas nécessairement $f''(p) = 0$ à un point d'inflexion p . La fonction dont le graphe est donné à la figure 5.4 a un point d'inflexion à $x = p$ mais elle ne possède pas de dérivée d'ordre deux (et d'ordre un) au point p .

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui possède des dérivées d'ordre 2, alors il faut avoir $f''(p) = 0$. Malheureusement, nous ne pouvons pas conclure que nous avons un point d'inflexion à p lorsque $f''(p) = 0$. Par exemple, la fonction $f(x) = x^4$ satisfait $f''(0) = 0$ mais 0 n'est pas un point d'inflexion (tracez le graphe de f pour vous en convaincre).

De plus, il n'est pas nécessaire d'avoir $f'(p) = 0$ à un point d'inflexion comme c'est le cas pour la fonction dont le graphe est donné à la figure 5.5. Un autre exemple est fourni par le graphe du sinus qui possède des points d'inflexion à tous les points $n\pi$ où n est un entier. ♠

Exemple 5.1.9

Considérons le graphe de f' donné ci-dessous.

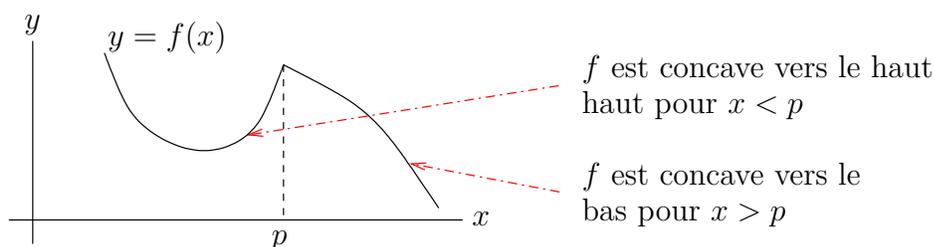


FIGURE 5.4 – Le point p est un point d'inflexion où f'' n'existe pas car f' n'existe pas.

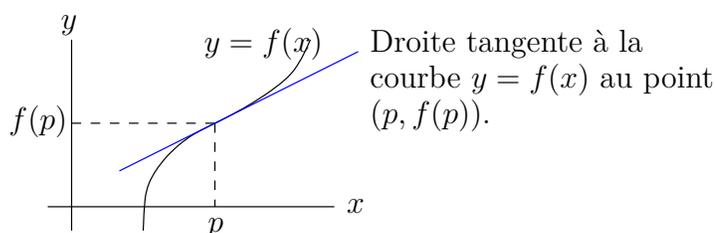
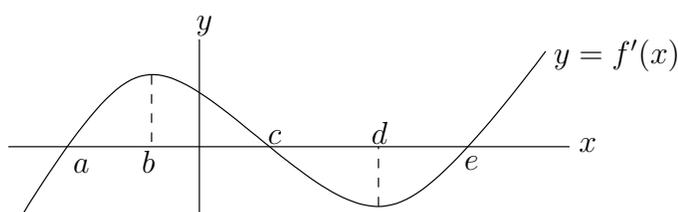


FIGURE 5.5 – Le point p est un point d'inflexion où $f'(p) \neq 0$.



a) Quels sont les points critiques de f ?

Les points critiques de f sont a , c et e car $f'(x) = 0$ pour ces valeurs de x .

b) La fonction f a-t-elle des maximums et minimums locaux ? Si elle en a, où sont-ils ?

Le graphe de f' nous donne l'information suivante sur la fonction f .

x	$x < a$	a	$a < x < c$	c	$c < x < e$	e	$e < x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	décroît	min. local	croît	max. local	décroît	min. local	croît

Il y a un maximum local au point $x = c$ car $f'(x)$ passe de positif à négatif lorsque x varie de plus petit que c à plus grand que c . Il y a un minimum local au point $x = a$ car $f'(x)$ passe de négatif à positif lorsque x varie de plus petit que a à plus grand que a . De même, il y a un minimum local au point $x = e$ car $f'(x)$ passe de négatif à positif lorsque x varie de plus petit que e à plus grand que e .

c) Quels sont les points d'inflexion de f ?

La pente de la tangente à la courbe $y = f'(x)$ au point x donne $f''(x)$. Ainsi, f'' nous donne l'information suivante sur la fonction f .

x	$x < b$	b	$b < x < d$	d	$x > d$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	convexe	point d'inflexion	concave	point d'inflexion	convexe

Les points $x = b$ et $x = d$ sont des points d'inflexion car la courbure change à ces points. ♣

Avant de décrire la procédure pour tracer le graphe d'une fonction, nous pouvons énoncer deux méthodes pour déterminer si un point critique est un maximum ou un minimum local.

Proposition 5.1.10 (Test de la dérivée première)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$ un point critique de la fonction f . De plus, supposons que f soit différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ sauf peut-être au point c .

1. Si $f'(x) < 0$ pour $x < c$ et $f'(x) > 0$ pour $x > c$, alors f a un minimum local au point c .
2. Si $f'(x) > 0$ pour $x < c$ et $f'(x) < 0$ pour $x > c$, alors f a un maximum local au point c .

Pour le premier cas, nous déduisons du signe de la dérivée que f est décroissante pour $x < c$ et croissante pour $x > c$. Donc f a un minimum local à $x = c$. Par contre, pour le deuxième cas, nous avons que f est croissante pour $x < c$ et décroissante pour $x > c$. Donc f a un maximum local à $x = c$.

Proposition 5.1.11 (Test de la dérivée seconde)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée d'ordre deux et $c \in]a, b[$ un point critique de la fonction f' .

1. Si $f''(c) > 0$, alors f a un minimum local au point c .
2. Si $f''(c) < 0$, alors f a un maximum local au point c .

Pour le premier cas, nous déduisons du signe de la dérivée seconde que f est convexe au voisinage de c . Donc f a un minimum local à $x = c$. Par contre, pour le deuxième cas, nous avons que f est concave au voisinage de c . Donc f a un maximum local à $x = c$.

Si nous nous fions seulement à l'énoncé des deux propositions précédentes, nous pourrions croire que le test de la dérivée seconde est plus simple à utiliser que le test de la dérivée première car l'énoncé du test de la dérivée seconde est plus simple que celui du test de la dérivée première. Ce n'est pas un bon critère de comparaison entre les deux tests. Le test de la dérivée première est généralement préférable car il faut seulement calculer la première dérivée de f .

Nous pouvons maintenant énoncer la procédure pour tracer le graphe d'une fonction.

Méthode 5.1.12

Pour tracer le graphe d'une fonction f , il faut :

1. Trouver les points où f n'est pas définie. Ce sont les points où il peut y avoir une asymptote verticale.
2. Trouver (si possible) les points p où $f(p) = 0$. Ce sont les points où le graphe de f traverse l'axe des x .
3. Trouver les points critiques de f . Ce sont les points où il peut y avoir un maximum ou un minimum local. Pour tracer le graphe de f , il est aussi utile d'évaluer f à ces points (si c'est possible) pour obtenir quelques points importants sur la courbe $y = f(x)$.
4. Trouver les points où f'' n'existe pas et les points p où $f''(p) = 0$ (i.e. les points critiques de f'). Ce sont les points où il peut y avoir des points d'inflexion. Comme pour les points critiques, pour tracer le graphe de f , il est aussi utile d'évaluer f à ces points (si c'est possible) pour obtenir quelques points importants sur la courbe $y = f(x)$.
5. Après avoir ordonné les points trouvés précédemment, déterminer le signe de f , f' et f'' sur chacun des intervalles délimités par ces points. Le signe de f détermine si f est positive ou négative. Le signe de f' détermine si f est strictement croissante ou décroissante. Le signe de f'' détermine si f est convexe ou concave.
6. Trouver les asymptotes horizontales (lorsque x converge vers plus ou moins l'infini) et les asymptotes verticales (lorsque $f(x)$ converge vers plus ou moins l'infini si x converge vers un point qui n'est pas dans le domaine de f).
7. Tracer le graphe de f intervalle par intervalle en utilisant toute l'information trouvée ci-dessus.

Exemple 5.1.13

Traçons le graphe de $f(x) = 1/(xe^x) = x^{-1}e^{-x}$.

Nous avons

$$f'(x) = -x^{-2}e^{-x} - x^{-1}e^{-x} = (-x^{-2} - x^{-1})e^{-x} = -x^{-2}(1+x)e^{-x}$$

et

$$f''(x) = (2x^{-3} + x^{-2})e^{-x} - (-x^{-2} - x^{-1})e^{-x} = x^{-3}(2 + 2x + x^2)e^{-x}.$$

Ainsi, la fonction f n'est pas définie au point $x = 0$, elle est positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$.

La fonction f' n'est pas définie au point $x = 0$ et elle est égale à 0 au point $x = -1$. De plus, sauf à $x = 0$ où la dérivée n'existe pas, $f'(x)$ est négatif pour $x > -1$ et positif pour $x < -1$. Nous avons que $f(-1) = -e = -2.71828182845905\dots$

La fonction f'' n'est pas définie au point $x = 0$ et n'est jamais égale à 0 car le polynôme $2 + 2x + x^2$ n'a pas de racines réelles ; dans le cas présent, $2 + 2x + x^2 > 0$ pour tout x . Nous avons que $f''(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 0$.

Puisque xe^x est une fonction qui croît sans borne supérieure lorsque x augmente, nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} = 0.$$

La droite $y = 0$ est donc une asymptote horizontale lorsque x tend vers plus l'infini. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty.$$

Nous pouvons vérifier numériquement cette dernière limite à l'aide de suites $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tendent vers moins l'infini (e.g. prenez la suite où $x_n = -n$). Nous allons voir plus tard un résultat (i.e. la Règle de l'Hospital) qui nous permettra facilement de calculer ce genre de limites.

Puisque $xe^x < 0$ tend vers 0 lorsque $x < 0$ tend vers 0, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{xe^x} = -\infty.$$

De même, puisque $xe^x > 0$ tend vers 0 lorsque $x > 0$ tend vers 0, nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xe^x} = +\infty.$$

La droite $x = 0$ (avec $y > 0$) est donc une asymptote verticale lorsque x approche l'origine par la droite et la droite $x = 0$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche l'origine par la gauche.

Résumons l'information que nous venons d'obtenir dans le tableau suivant.

x	$-\infty$	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$x > 0$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-$	$-e$	$-$	N.D.	$+$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	N.D.	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-e$	$-$	N.D.	$+$	
		I	II	III	IV	V	VI

I : négative, croissante et concave

IV : asymptote verticale $x = 0$

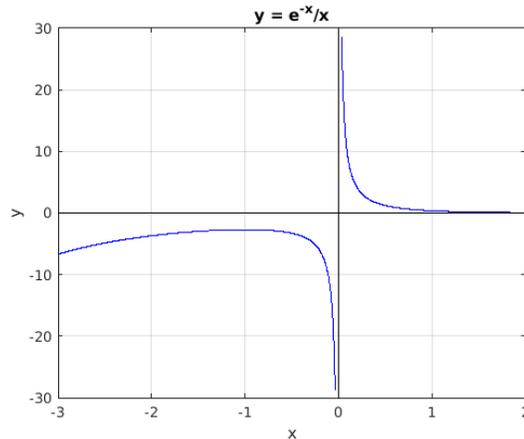
II : maximum local

V : positive, décroissante et convexe

III : négative, décroissante et concave

VI : asymptote horizontale $y = 0$

Le graphe de f est donné ci-dessous.



Exemple 5.1.14

Traçons le graphe de $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

Nous avons

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{6x^2-18x+14}{(x-1)^3(x-2)^3}.$$

La fonction f n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$, elle est positive pour $x < 1$ et $x > 2$, et négative pour $1 < x < 2$.

La fonction f' n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$. Elle est égale à 0 au point $x = 3/2$. De plus, sauf aux points $x = 1$ et $x = 2$ où la dérivée n'existe pas, $f'(x)$ est négatif pour $x > 3/2$ et positif pour $x < 3/2$. Nous avons $f(3/2) = -4$.

La fonction f'' n'est pas définie aux points $x = 1$ et $x = 2$, et n'est jamais égale à 0 car $6x^2 - 18x + 14$ n'a pas de racines réelles; en fait, $6x^2 - 18x + 14 > 0$ pour tout x .

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

l'axe des x est une asymptote horizontale lorsque x tend vers moins l'infini. De même,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

et l'axe des x est une asymptote horizontale lorsque x tend vers plus l'infini.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty.$$

La droite $x = 1$ (avec $y > 0$) est donc une asymptote verticale lorsque x approche 1 par la gauche, la droite $x = 1$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 1 par la droite, la droite $x = 2$ (avec $y < 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 2 par

la gauche, et la droite $x = 2$ (avec $y > 0$) est une asymptote verticale lorsque x approche 2 par la droite.

Résumons l'information que nous venons d'obtenir dans le tableau suivant.

x	$-\infty$	$x < 1$	1	$1 < x < 3/2$	$3/2$	$3/2 < x < 2$	2	$x > 2$	$+\infty$
$f(x)$	0	+	N.D.	-	-4	-	N.D.	+	0
$f'(x)$		+	N.D.	+	0	-	N.D.	-	
$f''(x)$		+	N.D.	-	-	-	N.D.	+	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

I : asymptote horizontale $y = 0$

II : positive, croissante, convexe

III : asymptote verticale $x = 1$

IV : négative, croissante, concave

V : maximum local

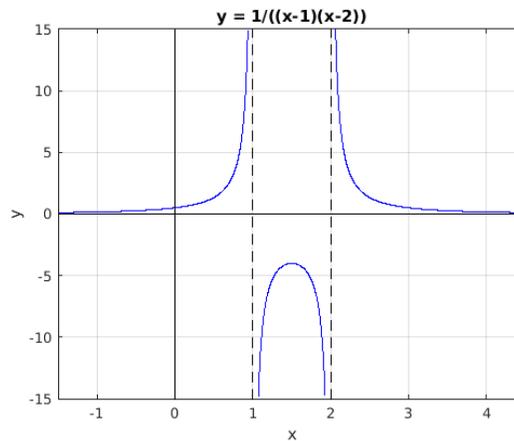
VI : négative, décroissante, concave

VII : asymptote verticale $x = 2$

VIII : positive, décroissante, convexe

IX : asymptote horizontale $y = 0$

Le graphe de f est donné ci-dessous.



Exemple 5.1.15

La relation entre le signe de la dérivée d'une fonction et la croissance ou décroissance de la fonction peut être très utile pour déterminer la convergence de certaines séries. Déterminons si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}$$

converge ou diverge.

Montrons que cette série converge en montrant qu'elle satisfait les trois conditions du test des séries alternées (théorème 2.2.42). Cette série est de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ avec

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} > 0$$

pour tout n . De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ grâce au théorème des gendarmes. En effet,

$$0 < a_n = \frac{n^{1/2}}{n^{2/3} + 1} < \frac{n^{1/2}}{n^{2/3}} = \frac{1}{n^{1/6}}$$

pour tout n et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/6}} = 0$.

Finalement, pour démontrer que $a_{n+1} < a_n$ pour tout $n > 6$, nous posons

$$f(x) = \frac{x^{1/2}}{x^{2/3} + 1}.$$

Puisque,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(x^{2/3} + 1) - x^{1/2}(\frac{2}{3}x^{-1/3})}{(x^{2/3} + 1)^2} = \frac{-\frac{1}{6}x^{1/6} + \frac{1}{2}x^{-1/2}}{(x^{2/3} + 1)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(1 - \frac{1}{3}x^{2/3})}{(x^{2/3} + 1)^2} < 0$$

pour $x > 3^{3/2} = 5.196\dots$, f est strictement décroissante pour $x > 3^{3/2}$ et ainsi

$$a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n$$

pour tout $n > 5$.

Grâce au test des série alternée, la série

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}$$

converge et il en est de même de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}.$$

En effet, puisque

$$\sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3} + 1} + \frac{2}{4^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3} + 1} + \sum_{n=6}^k \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}$$

pour tout $k > 5$, nous avons que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3} + 1} + \frac{2}{4^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3} + 1} + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=6}^k \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3} + 1} + \frac{2}{4^{2/3} + 1} - \frac{\sqrt{5}}{5^{2/3} + 1} + \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^{2/3} + 1}. \end{aligned}$$



5.2 Optimisation

Définition 5.2.1

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Le **supremum** de f sur X est le plus petit nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in X$. L'**infimum** de f sur X est le plus grand nombre réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in X$.

Une fonction ne possède pas toujours un supremum ou un infimum. La fonction $f(x) = 1/x$ pour $x > 0$ n'a pas de supremum car $1/x$ peut être aussi grand que nous le voulons lorsque x approche l'origine. Par contre 0 est l'infimum de $f(x)$ pour $x > 0$. Nous avons bien que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Il n'existe pas de nombre $m > 0$ qui satisfasse aussi $1/x > m$ pour tout $x > 0$ car $1/x$ peut être aussi petit que nous le voulons lorsque x devient de plus en plus grand.

Nous avons défini à la définition 4.1.3 le maximum absolu et le minimum absolu d'une fonction sur un intervalle. Une fonction définie sur un intervalle peut ne pas avoir de maximum absolu ou de minimum absolu même si elle possède un supremum ou un infimum. Par exemple, la fonction $f(x) = 1/x$ n'a pas de minimum absolu sur l'intervalle $]0, \infty[$ car il n'existe pas de point $c \in]0, \infty[$ tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout $x \in]0, \infty[$. Par contre, comme nous avons vu précédemment, la fonction f a 0 comme infimum. $f(x)$ peut être aussi près de 0 que l'on veut en prenant x de plus en plus grand. Malheureusement, il n'y a pas de valeur x pour laquelle $f(x) = 0$.

Nous pouvons par contre imposer des conditions sur la fonction et son domaine pour garantir l'existence du maximum absolu et minimum absolu.

Théorème 5.2.2 (Théorème des valeurs extrêmes)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle **fermé** $[a, b]$. Alors ils existent c_m et c_M dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c_m) \leq f(x) \leq f(c_M)$ pour tout $x \in [a, b]$. Donc, M est le maximum absolu de f sur l'intervalle $[a, b]$ et m est le minimum absolu de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Le théorème précédent demande que f soit continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Ces contraintes imposées sur f et son domaine permettent de garantir l'existence d'un maximum absolu à au moins un point de l'intervalle ainsi que d'un minimum absolu à au moins un point de l'intervalle (figure 5.6).

Si nous considérons la fonction f qui est définie sur l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$ et dont le graphe est donné à la figure 5.7, l'intervalle est ouvert au point $x = a$ et $x = a$ est une asymptote verticale pour f . La fonction f n'a donc pas de maximum absolu sur l'intervalle $]a, b]$.

Si nous considérons la fonction f qui est définie sur l'intervalle $[a, b]$ et dont le graphe est donné à la figure 5.8, l'intervalle est bien fermé mais la fonction n'est pas continue au point $x = c$. La valeur de f au point c est inférieure à M qui est la limite de f lorsque x approche c . M est le supremum de f sur l'intervalle $[a, b]$ mais il n'y a pas de point $c_M \in [a, b]$ et $f(c_M) = M$. En d'autres mots, f n'a pas de maximum absolu sur l'intervalle $[a, b]$.

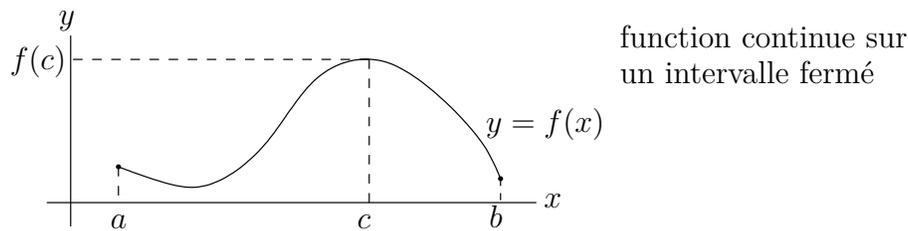


FIGURE 5.6 – La fonction a un maximum global au point $x = c$ car la fonction est bien continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$

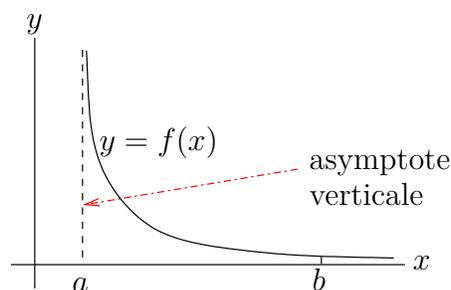


FIGURE 5.7 – La fonction n'admet pas de maximum global dans l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$

Méthode 5.2.3

Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction f continue sur l'intervalle fermée $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il suffit de trouver tous les points critiques de f sur l'intervalle $]a, b[$ et de comparer les valeurs de f à ces points et aux points a et b . La plus grande valeur est le maximum absolu et la plus petite valeur est le minimum absolu.

Exemple 5.2.4

Le nombre de saumons qui remontent une rivière de la Colombie-Britannique en fonction de la température $x^\circ\text{C}$ de l'eau est $S(x) = -x^3 + 3x^2 + 360x + 5000$ saumons. Si la température de l'eau varie de 6°C à 20°C , pour quelle température avons-nous le plus grand nombre de saumons qui remontent la rivière ?

Puisque $S'(x) = -3x^2 + 6x + 360 = -3(x - 12)(x + 10)$, le seul point critique dans l'intervalle $[6, 20]$ est 12.

Puisque $S(6) = 7052$, $S(12) = 8024$ et $S(20) = 5400$ saumons, le plus grand nombre de saumons qui remontent la rivière est 8024 saumons lorsque la température de l'eau est de 12°C . ♣

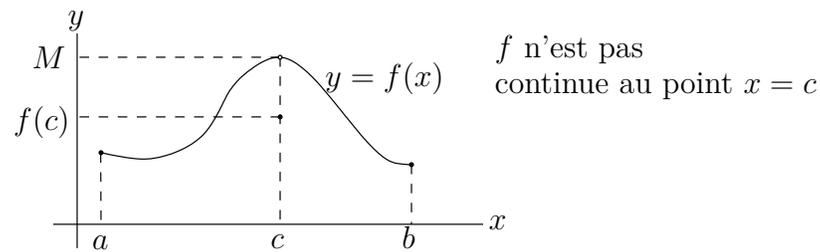


FIGURE 5.8 – La fonction n'a pas de maximum global dans l'intervalle fermé $[a, b]$

Exemple 5.2.5

Déterminons les points de l'ellipse $x^2 + 3y^2 = 9$ qui sont le plus près du point $(1, 0)$?

Il faut trouver les points (x, y) de l'ellipse dont la distance euclidienne $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ au point $(1, 0)$ est minimale. Ceci revient à trouver les points (x, y) qui minimisent $(x-1)^2 + y^2$ et satisfont $x^2 + 3y^2 = 9$.

De l'équation de l'ellipse, nous obtenons que $y^2 = (9 - x^2)/3$ pour $-3 \leq x \leq 3$. Il faut donc trouver x dans l'intervalle $[-3, 3]$ qui minimise $g(x) = (x-1)^2 + (9 - x^2)/3$.

Le seul point critique de g est $x = 3/2$ car $g'(x) = 2(x-1) - 2x/3 = 4x/3 - 2$. Puisque $g(-3) = 16$, $g(3) = 4$ et $g(3/2) = 5/2$, la distance minimale entre l'ellipse et le point $(1, 0)$ est $\sqrt{5/2}$ lorsque $x = 3/2$. Il y a deux points (x, y) sur l'ellipse qui sont associés à $x = 3/2$; ils sont donnés par $y^2 = (9 - x^2)/2$. Nous trouvons $(3/2, 3/2)$ et $(3/2, -3/2)$ ♣

Exemple 5.2.6 🌲

Un pigeon voyageur est libéré de sa cage qui se trouve sur un bateau pour livrer un message à son propriétaire qui demeure sur le bord de la côte. Supposons que la côte soit linéaire. La distance entre le bateau et le point de la côte qui est le plus près du bateau est de 2 kilomètres, et la distance entre ce point et la demeure du propriétaire est de 3 kilomètres (figure 5.9).

En raison de la baisse de pression atmosphérique au dessus de grandes étendues d'eau, il est plus difficile pour les oiseaux de voler au-dessus de l'eau que de voler au-dessus de la terre ferme. Si le pigeon dépense 40% plus d'énergie pour voler au-dessus de l'eau qu'il en dépense pour voler au-dessus de la terre ferme, quel trajet doit suivre le pigeon pour minimiser la dépense d'énergie ? Doit-il se diriger vers le point de la côte qui est le plus près du bateau et ensuite longer la côte jusqu'à la demeure de son propriétaire ? Doit-il voler directement vers la demeure de son propriétaire ? Doit-il choisir un trajet entre ces deux extrêmes ?

S'il faut une unité d'énergie par kilomètre pour voler au-dessus de la terre ferme alors il faut 1.4 unités d'énergie par kilomètre pour voler au dessus de l'eau. La quantité d'énergie dépensée par le pigeon pour se rendre du bateau à la demeure de son propriétaire est

$$E(x) = 1.4\sqrt{2^2 + x^2} + |3 - x| = \frac{7}{5}\sqrt{4 + x^2} + |3 - x|$$

où x est la distance (en kilomètres) entre le point de la côte qui est le plus près du bateau et le point où le pigeon atteint la côte. Nous pouvons supposer que $0 \leq x \leq 3$ car, pour des valeurs de x à l'extérieur de cet intervalle, le pigeon allongerait son trajet inutilement.

Les points critiques de E sont les solutions de

$$E'(x) = \frac{7x}{5\sqrt{4+x^2}} - 1 = 0.$$

Le seul point critique entre 0 et 3 est $x = 5/\sqrt{6} = 2.04\dots$ kilomètres.

Puisque $E(0) = 5.8$, $E(3) = 5.04777\dots$ et $E(5/\sqrt{6}) = 4.95959\dots$. L'énergie est minimale pour $x = 5/\sqrt{6}$.

Le pigeon devrait donc voler en ligne droite au-dessus de l'eau jusqu'au point de la côte qui est à une distance de 2.04... kilomètres du point de la côte qui est le plus près du bateau, et de ce point voler en ligne droite jusqu'à la demeure de son propriétaire. ♣

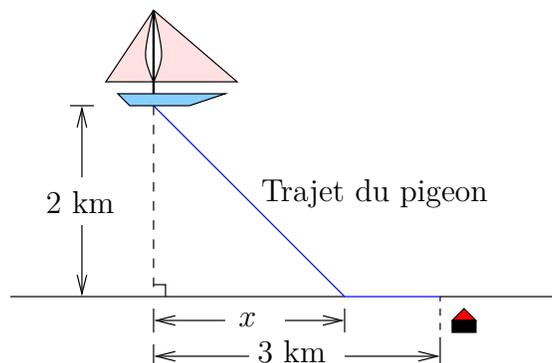


FIGURE 5.9 – Trajet du pigeon entre le bateau et la demeure de son propriétaire

Exemple 5.2.7 🔧

Déterminons les dimensions du triangle isocèle (deux côtés égaux) d'aire maximale inscrit dans un cercle de rayon r (figure 5.10).

La hauteur du triangle est $h = r + x$ avec $-r \leq x \leq r$. L'aire du triangle est $A = hb/2 = (r+x)b/2$. Il faut écrire b en fonction de x et r . Il découle du théorème de Pythagore que $r^2 = x^2 + (b/2)^2$. Ainsi, $b = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.

L'aire du triangle est donc $A(x) = (r+x)\sqrt{r^2 - x^2}$ pour $-r \leq x \leq r$. La fonction A a un seul point critique entre $-r$ et r car $A'(x) = (-2x^2 - xr + r^2)/\sqrt{r^2 - x^2} = 0$ avec $-r < x < r$ implique que $-2x^2 - xr + r^2 = 0$. C'est un polynôme de degré deux en x (car r est une constante) dont les racines sont

$$\frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} = -r \quad \text{ou} \quad \frac{r}{2}.$$

Ainsi, entre $-r$ et r , le seul point critique de la fonction A est $x = r/2$.

Puisque $A(r) = A(-r) = 0$ et $A(r/2) = 3\sqrt{3}r^2/4$, l'aire maximale est $3\sqrt{3}r^2/4$ pour $x = r/2$. Ainsi, le triangle isocèle a les dimensions suivantes : $h = r + x = 3r/2$, $b = 2\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{3}r$ et $a = \sqrt{h^2 + (b/2)^2} = \sqrt{3}r$. En fait, nous avons un triangle équilatéral (trois côtés égaux) car $a = b$. ♣

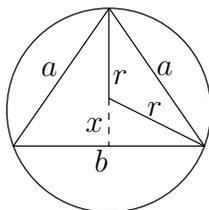


FIGURE 5.10 – Un triangle isocèle inscrit dans un cercle de rayon r

Exemple 5.2.8 🔧

Nous formons un gobelet conique à partir d'un secteur de cercle de rayon R en joignant les deux rayons qui délimitent le secteur de cercle (figure 5.11). Quelle est la capacité maximale d'un tel gobelet ?

Le problème est de trouver l'angle θ qui détermine le secteur de cercle (figure 5.11) pour obtenir le cône de volume maximal.

Le volume d'un cône est donné par la formule $V = \pi r^2 h/3$. Nous allons exprimer le volume en termes du rayon r de la base du cône et du rayon R . Puisque $r^2 + h^2 = R^2$, nous obtenons que $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ pour $0 \leq r \leq R$. Donc $V(r) = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}/3$.

Le seul point critique de V entre 0 et R est $r = \sqrt{2/3}R$. En effet,

$$V'(r) = \frac{2\pi r \sqrt{R^2 - r^2}}{3} - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\pi r(2R^2 - 3r^2)}{3\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Donc $V'(r) = 0$ avec $0 < r < R$ seulement pour $r = \sqrt{2/3}R$.

Puisque $V(0) = V(R) = 0$ et $V(\sqrt{2/3}R) = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$, le volume maximal du cône est $2\pi R^3/(9\sqrt{3})$ pour $r = \sqrt{2/3}R$.

Remarquons que la circonférence de la base du cône est la longueur de l'arc de cercle défini par le secteur de cercle utilisé pour construire le cône. Donc $\theta R = 2\pi r = 2\pi \sqrt{2/3}R$ et nous trouvons $\theta = 2\pi \sqrt{2/3}$ radians. ♣

Malheureusement, nous ne pouvons pas toujours utiliser la méthode 5.2.3 pour trouver le maximum et minimum absolu d'une fonction. Quand c'est le cas, il faut tracer grossièrement le graphe de la fonction pour laquelle nous cherchons le maximum ou minimum absolu. C'est la situation qui se présente dans les exemples suivants.

Exemple 5.2.9 🌲

Cet exemple provient de [1].

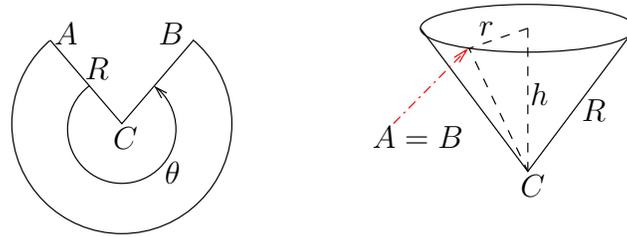


FIGURE 5.11 – Un gobelet conique fait à partir d’un secteur de cercle de rayon R

Les abeilles butinent (récoltent le nectar des fleurs) dans le but de produire du miel. Lorsqu’une abeille butine, elle aspire le nectar des fleurs dans son jabot. La vitesse à laquelle elle aspire le nectar d’une fleur (i.e. le taux instantané de changement de la quantité de nectar dans le jabot de l’abeille) diminue avec le temps en raison de la diminution de nectar dans la fleur, ce qui rend le travail d’aspirer le nectar plus difficile pour l’abeille.

Dans le but de maximiser la quantité de nectar qu’elle peut récolter durant une journée d’ouvrage, l’abeille n’aspire pas tout le nectar de chaque fleur qu’elle visite mais quitte cette fleur pour une autre fleur avant d’avoir aspiré tout le nectar. L’abeille quitte une fleur lorsque la vitesse à laquelle elle aspire le nectar est assez faible pour justifier le voyage à une autre fleur. Par contre, quand l’abeille voyage d’une fleur à une autre fleur, elle ne récolte pas de nectar.

Combien de temps l’abeille doit-elle demeurer sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu’elle peut récolter durant une journée d’ouvrage ?

Si nous supposons que les fleurs sont uniformément distribuées dans le champ, nous pouvons assumer que le temps que prend l’abeille pour se rendre d’une fleur à une autre fleur est constant, disons τ minutes.

Supposons que la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une même fleur soit

$$F(t) = \frac{\beta t}{t + \alpha}$$

où β est la quantité de nectar que possède une fleur et α est un coefficient de difficulté pour aspirer le nectar. La quantité $F(t)$ récoltée après t minutes diminue lorsque α augmente (figure 5.12). Normalement, les constantes α et β varient selon l’espèce de fleurs, et parfois α et β vont varier entre deux fleurs de même espèce. Pour simplifier le problème, nous supposerons que toutes les fleurs sont identiques et donc que α et β ne varient pas d’une fleur à l’autre.

En comptant le temps pour se rendre d’une fleur à l’autre, la vitesse moyenne à laquelle l’abeille aspire le nectar d’une fleur sur laquelle elle demeure pendant t minutes (i.e. le taux de variation moyen de la quantité de nectar dans le jabot de l’abeille durant les t premières minutes sur la fleur plus les τ minutes pour se rendre à la fleur) est

$$R(t) = \frac{F(t)}{t + \tau}.$$

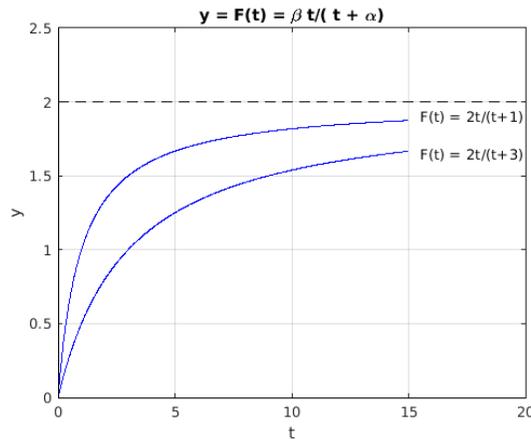


FIGURE 5.12 – Le graphe de $F(t) = \beta t/(t + \alpha)$, la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une fleur.

Si nous supposons que le nombre d'heures de travail d'une abeille dans une journée est fixe (les abeilles sont syndiquées et elles travaillent 8 heures par jour), le problème mathématique que l'abeille a « à résoudre » est de trouver la valeur de t pour maximiser $R(t)$.

Puisque

$$R(t) = \frac{\beta t}{(t + \tau)(t + \alpha)}.$$

nous trouvons

$$R'(t) = \frac{\beta(\alpha\tau - t^2)}{(t + \alpha)^2(t + \tau)^2}.$$

Le point $T = \sqrt{\alpha\tau}$ est le seul point critique positif de R (vérifier cet énoncé).

Nous obtenons donc

t	0	$0 < t < T$	T	$T < t < +\infty$	$+\infty$
$R(t)$	0	+	$\beta T/((T + \alpha)(T + \tau))$	+	0
$R'(t)$	$\beta/(\alpha\tau)$	+	0	-	0
			max. local		asymptote horizontale

Puisque $R(t) < R(T)$ pour tout $t \geq 0$ et $t \neq T$, la fonction R a donc un maximum absolu à $T = \sqrt{\alpha\tau}$ minutes (figure 5.13).

Nous pouvons donner un sens biologique / physique au choix de t qui maximise $R(t)$. Si nous dérivons $R(t) = F(t)/(t - \tau)$ sans substituer l'expression algébrique pour $F(t)$, nous trouvons

$$R'(t) = \frac{F'(t)(t + \tau) - F(t)}{(t + \tau)^2}.$$

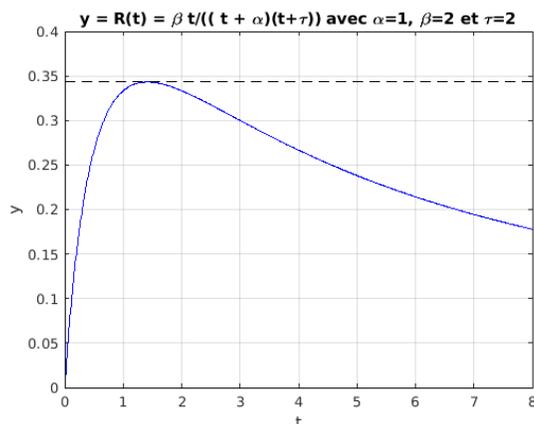


FIGURE 5.13 – Le graphe de la vitesse moyenne $R(t)$ à laquelle une abeille aspire le nectar d’une fleur en fonction du temps t depuis son arrivée sur la fleur

Ainsi, $R'(t) = 0$ si et seulement si

$$F'(t) = \frac{F(t)}{t + \tau} = R(t) .$$

Une abeille arrête donc de butiner une fleur au temps $t = T$ lorsque la vitesse (instantanée) à laquelle elle aspire le nectar égale la vitesse moyenne $R(t)$ (figure 5.14). Ce principe est appelé la **règle des valeurs marginales**.

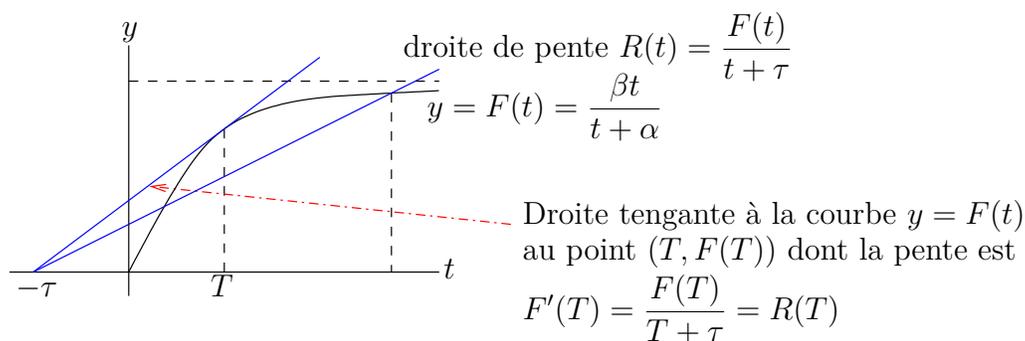


FIGURE 5.14 – La vitesse moyenne $R(t)$ à laquelle une abeille a aspiré le nectar d’une fleur pendant les t premières minutes sur la fleur plus les τ minutes pour se rendre à la fleur est la pente de la droite entre $(-\tau, 0)$ et $(t, F(t))$. Nous cherchons la valeur T de t pour que cette droite soit tangente à la courbe $y = F(t)$ au point $t = T$.

Cet exemples soulève plusieurs questions. En voici quelques-unes. Qu’arrive-t-il au temps t où R atteint son maximum lorsque le temps τ pour voyager d’une fleur à l’autre varie ?

Lorsque le niveau de difficulté α pour récolter le nectar augmente ? Sommes-nous en mesure de traiter le problème où α et β change d'une fleur à l'autre ? ♣

Exemple 5.2.10

Cet exemple provient de [11] et [14]

Les mâles d'une espèce de grenouille du Porto-Rico (i.e. *Eleutherodactylus coqui*) protègent les oeufs pondus par les femelles. S'ils ne protègent pas les oeufs, ceux-ci risquent d'être détruits. Par contre, quand les mâles protègent les oeufs, ils ne cherchent pas de partenaires pour se reproduire et donc ne participent pas à la reproduction de l'espèce.

La proportion $w(t)$ d'oeufs pondus qui éclosent (qui produisent une nouvelle grenouille) en fonction du temps t passé par les mâles pour protéger les oeufs est

$$w(t) = \frac{p(t)}{t + C}$$

où $p(t)$ est la probabilité que les mâles passent le temps t à protéger les oeufs et C est une constante qui représente le niveau de difficulté à trouver un partenaire.

Si $p(t) = \frac{t}{1+t}$ et $C = 3$, pour quelle valeur de t aurons-nous la plus grande proportion $w(t)$ d'oeufs pondus qui éclosent ?

Nous obtenons de $w(t) = \frac{t}{(t+1)(t+3)}$ que

$$\ln(w(t)) = \ln(t) - \ln(t+1) - \ln(t+3) .$$

Si nous dérivons cet expression par rapport à t , alors

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3} .$$

Ainsi,

$$w'(t) = \left(\frac{(t+1)(t+3) - t(t+3) - t(t+1)}{t(t+1)(t+3)} \right) \left(\frac{t}{(t+1)(t+3)} \right) = \frac{-t^2 + 3}{(t+1)^2(t+3)^2} = 0$$

pour $t = \sqrt{3}$. Puisque $w'(t) < 0$ pour $t > \sqrt{3}$ et $w'(t) > 0$ pour $0 \leq t < \sqrt{3}$, nous obtenons que $t = \sqrt{3}$ est le temps qui maximise $w(t)$.

Si nous dérivons $w(t) = \frac{p(t)}{t+C}$ par rapport à t , nous trouvons que

$$w'(t) = \frac{p'(t)(t+C) - p(t)}{(t+C)^2} = 0$$

lorsque

$$p'(t) = \frac{p(t)}{t+C} = w(t) .$$

Nous avons une **règle des valeurs marginales** comme à l'exemple 5.2.9 pour les abeilles. La proportion maximale d'oeufs pondus qui éclosent est atteinte à $t = T$ lorsque le taux de

variation instantané de la probabilité des mâles de protéger les oeufs pendant un temps t est égale à la proportion d'oeufs pondus qui éclosent si les mâles passent un temps t à protéger les oeufs. ♣

Exemple 5.2.11 🔧

Quelles sont les dimensions du triangle isocèle d'aire minimale qui contiendra un cercle de rayon R ?

L'aire du triangle que nous retrouvons à la figure 5.15 est donnée par la formule $A = b(R+x)/2$. Il faut exprimer b en terme de x et R . Remarquons que le triangle $\triangle ABC$ est semblable au triangle $\triangle DOC$. Donc

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{CD}|}.$$

Il découle du théorème de Pythagore que $|\overline{CD}| = \sqrt{x^2 - R^2}$. Ainsi,

$$\frac{b/2}{R+x} = \frac{R}{\sqrt{x^2 - R^2}}$$

pour $x > R$. Ce qui donne $b = 2R(x+R)/\sqrt{x^2 - R^2}$. L'aire du triangle contenant le cercle de rayon R est donc

$$A(x) = \frac{R(x+R)^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}.$$

Cherchons les points critiques de A . Nous avons

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{2R(x+R)\sqrt{x^2 - R^2} - Rx(x+R)^2/\sqrt{x^2 - R^2}}{x^2 - R^2} \\ &= \frac{2R(x+R)(x^2 - R^2) - Rx(x+R)^2}{(x^2 - R^2)\sqrt{x^2 - R^2}} = \frac{R(x-2R)(x+R)^2}{(x^2 - R^2)\sqrt{x^2 - R^2}}. \end{aligned}$$

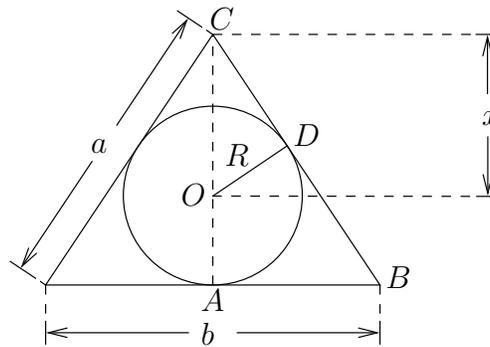
Ainsi, $A'(x) = 0$ avec $x > R$ si $x = 2R$. Nous résumons l'information que nous avons au sujet de A dans le tableau suivant.

x	R	$R < x < 2R$	$2R$	$x > R$	∞
$A(x)$	$+\infty$	$+$	$3\sqrt{3}R^2$	$+$	$+\infty$
$A'(x)$		$-$	0	$+$	
			min. local		

L'aire minimale du triangle contenant le cercle de rayon R est $3\sqrt{3}R^2$ lorsque $x = 2R$. Pour $x = 2R$, nous avons que $b = 2R(2R+R)/\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 2\sqrt{3}R$ et

$$a = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2} = \sqrt{(b/2)^2 + (x+R)^2} = 2\sqrt{3}R.$$

Nous trouvons donc un triangle équilatéral avec des côtés de longueur $2\sqrt{3}R$. ♣

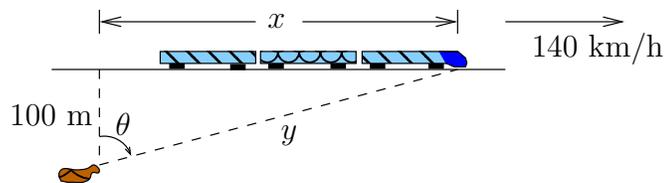
FIGURE 5.15 – Un cercle de rayon R inscrit à l'intérieur d'un triangle

5.3 Taux liés

Nous considérons les problèmes où deux variables dépendantes du temps (ou de tout autre paramètre) sont reliées par une relation mathématique, et nous cherchons à déterminer le taux de variation instantané d'une variable en fonction du taux de variation instantané de l'autre variable. Comme les exemples suivants vont démontrer, nous avons tous les outils nécessaires pour résoudre ce genre de problèmes.

Exemple 5.3.1

Une vache regarde le train passer. Si la vache est à 100 m de la voie ferrée et le train se déplace à 140 km/h, à quelle vitesse (angulaire) la vache doit-elle tourner la tête pour suivre le (devant du) train lorsque celui-ci est à 500 m de la vache ?



Nous allons résoudre le problème avec les kilomètres comme unités de distance. Nous avons

$$\tan(\theta(t)) = \frac{x(t)}{0.1} = 10x(t)$$

où θ et x dépendent du temps t . En dérivant chaque côté de cette équation par rapport à t , nous obtenons

$$\sec^2(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt}(t) = 10 \frac{dx}{dt}(t) .$$

Donc

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = 10 \frac{dx}{dt}(t) \cos^2(\theta(t)) .$$

Comme la vitesse du train est constante, nous avons $\frac{dx}{dt}(t) = 140$ km/h pour tout t . Si le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache lorsque $t = \tau$, alors

$$\cos(\theta(\tau)) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 .$$

Donc, lorsque le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache, nous avons

$$\frac{d\theta}{dt}(\tau) = 10 \frac{dx}{dt}(\tau) \cos^2(\theta(\tau)) . = 10 \times 140 \times 0.2^2 = 56 \text{ radians/h} .$$

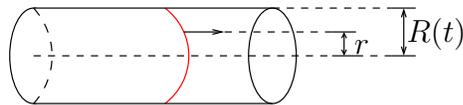
Le temps τ lorsque le (devant du) train est à $y = 0.5$ km de la vache n'est pas connu. Pour le déterminer, il faudrait connaître la position initiale du train. Comme nous venons de voir, nous n'avons pas besoin de connaître τ pour déterminer la vitesse à laquelle la vache doit tourner la tête lorsqu'elle est à 0.5 km du (devant du) train. ♣

Exemple 5.3.2

Le flot dans un vaisseau sanguin est déterminé par la lois de Poiseuille.

$$v(t) = k(R^2(t) - r^2)$$

où $v(t)$ est la vitesse du sang en millimètres par minute à une distance r du centre du vaisseau au temps t en minutes.



$R(t)$ est le rayon en millimètres du vaisseau sanguin au temps t en minutes et $k = 375$ est une constante associée au sang. Si le froid fait contracter le vaisseau sanguin à la vitesse de 0.01 mm/m, quel est le taux de variation de la vitesse sanguin (l'accélération) lorsque le rayon du vaisseau sanguin est de 0.08 mm ?

Nous avons que $\frac{dR}{dt}(t) = -0.01$ mm/m pour tout t . Le signe négatif indique que le vaisseau contracte. Si nous dérivons la lois de Poiseuille par rapport à t , nous obtenons

$$\frac{dv}{dt}(t) = 2kR(t) \frac{dR}{dt}(t) .$$

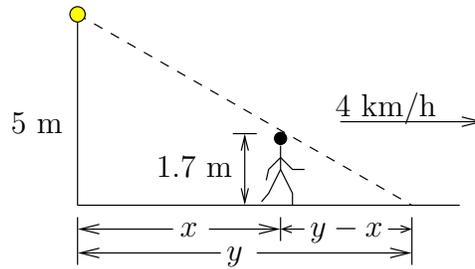
Ainsi, au temps $t = \tau$ où $R(\tau) = 0.08$ mm, nous avons

$$\frac{dv}{dt}(\tau) = 2kR(\tau) \frac{dR}{dt}(\tau) = 2 \times 375 \times 0.08 \times (-0.01) = -0.6 \text{ mm/m} .$$

La vitesse du sang diminue. ♣

Exemple 5.3.3

Un réverbère a une hauteur de 5 m. Une personne mesurant 1.7 m s'éloigne en ligne droite de ce réverbère à une vitesse de 4 km/h. Quelle sera la vitesse de la point de l'ombre de cette personne lorsque la personne se trouve à 15 m du réverbère.



Nous allons résoudre le problème avec les mètres comme unités de distance. Par similarité des triangles, nous avons

$$\frac{y(t)}{5} = \frac{y(t) - x(t)}{1.7}$$

Si nous résolvons pour $y(t)$, nous trouvons

$$y(t) = \frac{5}{3.3} x(t) .$$

Ainsi, si nous dérivons par rapport à t , nous obtenons

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{5}{3.3} \frac{dx}{dt}(t) .$$

Puisque $\frac{dx}{dt}(t) = 4000$ m/h pour tout t , nous avons

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{5}{3.3} \times 4000 = 6060.\overline{60} \text{ m/h} .$$

La pointe de l'ombre se déplace donc à une vitesse constante de $6.0\overline{60}$ km/h. Cette réponse est indépendante de la position de la personne. ♣

5.4 Dérivées implicites 🔧

Il n'y a pas de nouveaux concepts à introduire pour expliquer la dérivée implicite. La dérivée implicite est une façon différente d'aborder certains problèmes avec les outils que nous avons développés jusqu'à présent.

Exemple 5.4.1

Quelle est la pente de la tangente au cercle unité au point $(1/2, \sqrt{3}/2)$ (figure 5.16) ?

1^{er} méthode : Pour la partie supérieure du cercle unité, nous avons $y = \sqrt{1 - x^2}$ avec $-1 \leq x \leq 1$. Ainsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - x^2)^{1/2} = -x(1 - x^2)^{-1/2}$$

et

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2} \right) = - \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right)^{-1/2} = - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2^e méthode : Nous pouvons calculer $\frac{dy}{dx}$ en un point sans avoir à exprimer explicitement y en fonction de x . Il suffit de dériver par rapport à x de chaque côté de l'équation $x^2 + y^2 = 1$ en tenant bien compte du fait que y est une fonction de x . Nous avons

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Au point $(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$, nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2} \right) = - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

La deuxième méthode est valide pour la partie supérieure et la partie inférieure du cercle unité. 

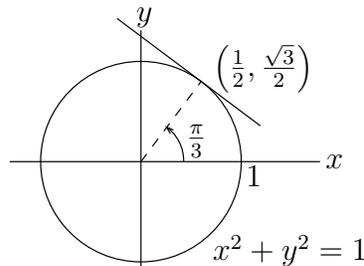


FIGURE 5.16 – Droite tangente au cercle unité au point $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Exemple 5.4.2

Trouvons l'équation de la droite tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ au point $(1, 2)$.

Pour obtenir la pente de la droite tangente à la courbe

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1,$$

il suffit de dériver des deux côtés de l'égalité précédente en gardant en tête que y est une fonction de x . Nous obtenons

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y}.$$

La pente de la tangente à l'ellipse au point $(x, y) = (1, 2)$ est donc

$$\frac{dy}{dx}(1) = \frac{-2 \times 1}{2} = -1.$$

L'équation de la droite tangente (sous la forme point-pente) est

$$(y - 2) = -(x - 1) .$$



Exemple 5.4.3

Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe $(x + y)^3 + xe^y = 2$ au point $(1, 0)$ sur cette courbe ?

Comme nous ne pouvons pas isoler y en fonction de x , nous procédons donc de la façon suivante. Nous dérivons par rapport à x chaque côté de l'équation $(x + y)^3 + xe^y = 2$, en tenant compte du fait que y est une fonction de x , pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((x + y)^3 + xe^y) &= \frac{d}{dx}(2) \Rightarrow 3(x + y)^2 \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + e^y + xe^y \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow \left(3(x + y)^2 + xe^y\right) \frac{dy}{dx} = -3(x + y)^2 - e^y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3(x + y)^2 - e^y}{3(x + y)^2 + xe^y} \end{aligned}$$

Ainsi, au point $(x, y) = (1, 0)$, nous obtenons

$$\frac{dy}{dx}(1) = \frac{-3 - 1}{3 + 1} = -1 .$$

L'équation de la droite tangente dans la forme point-pente est $y - 1 = -1(x - 1)$. Ce qui donne $y = -x + 1$ dans la forme standard. Nous retrouvons à la figure 5.17 le dessin de la courbe ainsi que sa tangente au point $(1, 0)$.

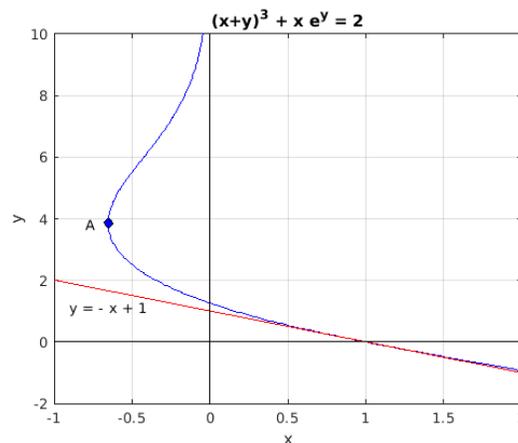


FIGURE 5.17 – Une partie de la courbe décrite par $(x + y)^3 + xe^y = 2$ ainsi que la droite tangente à cette courbe au point $(1, 0)$ sur la courbe.

Remarque 5.4.4

Dans les trois exemples précédent, nous avons considéré des équations en x et y . Il faut noter que la méthode de dérivée implicite pour calculer la dérivée de y en fonction de x échoue lorsque que nous ne pouvons pas (en théorie) exprimer y en fonction de x . Pour le cercle unité que l'on retrouve à la figure 5.16, cela se produit aux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. Pour la courbe que nous retrouvons à la figure 5.17, cela se produit au point A . Dans tous ces cas, la pente de la droite tangente à la courbe est verticale. Il faut alors considérer x en fonction de y si cela est possible. ♠

5.5 Approximation locale des fonctions

Une conséquence du théorème de la moyenne, théorème 4.4.6, est que pour chaque valeur x près de c , nous pouvons trouver une valeur $\xi = \xi(c, x)$ entre c et x telle que

$$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c) .$$

Le théorème affirme l'existence de la valeur ξ mais ne donne pas de formule pour la trouver.

En dépit de sa simplicité, le théorème de la moyenne nous permettra de trouver des fonctions polynomiales de la forme

$$p_k(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_k(x - c)^k$$

qui donneront de très bonnes approximations de $f(x)$ pour x près de c .

Définissons la fonction constante

$$p_0(x) = f(c) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} .$$

Il découle de la continuité de f au point c que $p_0(x) \approx f(x)$ pour x très près de c . Ainsi, p_0 est une fonction constante qui fournit une approximation de $f(x)$ pour x très près de c .

Nous avons déjà introduit à la section 4.3 une meilleure méthode pour estimer la valeur d'une fonction près d'un point. Si f est une fonction différentiable au point c , nous pouvons définir la fonction

$$p_1(x) \equiv f(c) + f'(c)(x - c) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} .$$

Nous avons que $p_1(x) \approx f(x)$ pour x suffisamment près de c . La fonction polynomiale p_1 est une **approximation linéaire** de f pour x près de c (figure 4.6). Nous estimons la valeur de $f(x)$ au point $x = b$ près de c par la valeur de $p_1(b)$. Le point $(x, y) = (b, p_1(b))$ est sur la droite tangente $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ à la courbe $y = f(x)$ au point $x = c$.

Exemple 5.5.1

Estimons la valeur de la racine cubique de 8.02 (sans utiliser de calculatrice).

Le problème peut être reformulé de la façon suivante. Estimons la valeur de $f(x) = x^{1/3}$ au point $x = 8.02$. Puisque $f'(x) = 1/(3x^{2/3})$, nous avons

$$f(x) \approx p_1(x) = f(8) + f'(8)(x - 8) = 2 + \frac{1}{12}(x - 8)$$

pour x près de 8. Ainsi, $f(8.02) \approx p_1(8.02) = 2 + (1/12)(8.02 - 8) = 2.001\bar{6}$. La valeur exacte de $\sqrt[3]{8.02}$ est $2.00166528\dots$. Notre approximation est très bonne. ♣

La fonction polynomiale p_1 satisfait les deux relations suivantes : $p_1(c) = f(c)$ et $p_1'(c) = f'(c)$.

Serait-il possible de choisir les coefficients A , B et C de la fonction polynomiale

$$p_2(x) = A + B(x - c) + C(x - c)^2$$

de degré 2 de telle sorte que

$$p_2(c) = f(c) \quad , \quad p_2'(c) = f'(c) \quad \text{et} \quad p_2''(c) = f''(c)$$

soient satisfaits ? Ainsi, la courbe $y = p_2(x)$ aurait la même pente et la même courbure que f au point c . Nous serions alors en droit de croire que la courbe $y = p_2(x)$ fournit une meilleure approximation du graphe de f que la droite $y = p_1(x)$ pour x très près de c .

Puisque

$$\begin{aligned} p_2(c) = f(c) &\Rightarrow A = f(c) \quad , \\ p_2'(c) = f'(c) &\Rightarrow B = f'(c) \end{aligned}$$

et

$$p_2''(c) = f''(c) \Rightarrow 2C = f''(c) \quad ,$$

nous obtenons

$$p_2(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 \quad .$$

Nous avons vu à la proposition 4.3.5 que $p_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ donne une bonne approximation de $f(x)$ pour x très près de c . Pouvons-nous en dire autant de $p_2(x)$? Si oui, est-ce que $p_2(x)$ donne une meilleure approximation de $f(x)$ que $p_1(x)$ pour x très près de c ? Les réponses à ces questions sont données par le théorème suivant qui lui-même est une généralisation (et découle) du théorème de la moyenne, théorème 4.4.6.

Théorème 5.5.2 (Théorème de Taylor)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $(k + 1)$ fois différentiables sur $]a, b[$ où $k \geq 0$. Quel que soit x et c dans l'intervalle $]a, b[$, il existe $\xi = \xi(k, c, x)$ entre x et c tel que

$$f(x) = p_k(x) + r_k(x)$$

où

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - c)^n \\ &= f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!} f''(c)(x - c)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(c)(x - c)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - c)^k$$

et

$$r_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x - c)^{k+1} .$$

Le polynôme p_k est appelé le **polynôme de Taylor de degré k de f pour x près de c** et r_k est **l'erreur de troncature**.

Au théorème précédent, nous insistons sur le fait que ξ dépend de l'ordre k du polynôme de Taylor, de c et de x ; d'où la notation $\xi = \xi(k, x, c)$. Donc ξ varie si k , c et x changent.

p_1 est une **approximation linéaire** de f pour x près de c alors que p_2 est une **approximation quadratique** de f pour x près de c .

Exemple 5.5.3

Quel est le polynôme de Taylor de degré 3 de $f(x) = e^{2(x-1)}$ pour x près de 1? Utilisez ce polynôme pour estimer $f(1.01)$ et sa formule pour l'erreur de troncature pour estimer l'erreur $|f(1.01) - p_3(1.01)|$.

Puisque $f(x) = e^{2(x-1)}$, $f'(x) = 2e^{2(x-1)}$, $f''(x) = 2^2 e^{2(x-1)}$ et $f'''(x) = 2^3 e^{2(x-1)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2!} f''(1)(x - 1)^2 + \frac{1}{3!} f'''(1)(x - 1)^3 \\ &= 1 + 2(x - 1) + 2(x - 1)^2 + \frac{4}{3}(x - 1)^3 . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(1.01) \approx p_3(1.01) = 1 + 2 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-4} + 1.\bar{3} \times 10^{-6} = 1.020201\bar{3} .$$

Puisque $f^{(4)}(x) = 2^4 e^{2(x-1)}$, la formule pour l'erreur de troncature est

$$r_3(x) = \frac{2^4}{4!} e^{2(\xi-1)}(x - 1)^4$$

où ξ est un nombre entre 1 et x que nous ne connaissons pas. Pour $x = 1.01$, nous avons que ξ est inférieur à 1.01. Ainsi,

$$|r_3(1.01)| \leq \frac{2^4 e^{0.02}}{4!} (1.01 - 1)^4 = \frac{2e^{0.02}}{3} 10^{-8} < 0.68014 \times 10^{-8} . \quad (5.5.1)$$

Donc $f(1.01) \approx 1.020201\bar{3}$ avec une erreur d'au plus 0.68014×10^{-8} .

En fait la valeur exacte de $f(1.01) = 2^{0.02}$ est 1.0202013400267558102... Donc $p_3(1.01)$ est une très bonne approximation de $f(1.01)$. De plus, nous avons $|f(1.01) - p_3(1.01)| = 0.669... \times 10^{-8}$. La formule en (5.5.1) nous donne une très bonne approximation de l'erreur.



Exemple 5.5.4

Trouvons les polynômes de Taylor de degré 1, 2, 3, 4 et 5 de $f(x) = \sin(x)$ pour x près de l'origine, et traçons sur un même système de coordonnées le graphe de chacun de ces polynômes ainsi que celui de f . Que pouvons-nous conclure de cette figure ?

Puisque

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & f'(x) &= \cos(x), & f''(x) &= -\sin(x), & f^{(3)}(x) &= -\cos(x), \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) = f(x) & \text{et} & & f^{(5)}(x) &= \cos(x) = f'(x), \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) = x, \\ p_2(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 = x, \\ p_3(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}, \\ p_4(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)(x-0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)(x-0)^4 \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_5(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)(x-0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)(x-0)^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!}f^{(5)}(0)(x-0)^5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \end{aligned}$$

Remarquons que $p_{2n} = p_{2n-1}$ pour tout $n \geq 1$ car $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x)$ et donc $f^{(2n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

À la figure 5.18, nous retrouvons sur un même système de coordonnées le graphe de chacun des polynômes de Taylor p_1 , p_2 , p_3 , p_4 et p_5 , ainsi que le graphe de f . Nous en déduisons que l'approximation de $\sin(x)$ fournie par $p_k(x)$ pour x près de l'origine est de plus en plus bonne lorsque l'ordre k du polynôme de Taylor $p_k(x)$ de $\sin(x)$ près de l'origine augmente.

Puisque $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x)$ et $f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1} \cos(x)$ pour tout $n \geq 1$, nous avons que $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier positif n . Nous trouvons la borne suivante pour l'erreur de troncature.

$$|r_k(x)| = \frac{1}{(k+1)!} |f^{(k+1)}(\xi)| |x|^{k+1} \leq \frac{1}{(k+1)!} |x|^{k+1} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

Pour x près de l'origine, l'erreur sera donc petite. ♣

Exemple 5.5.5 🔧

Cherchons un (petit) entier k tel que $p_k(0.01)$ soit une approximation de $\sin(0.01)$ avec une

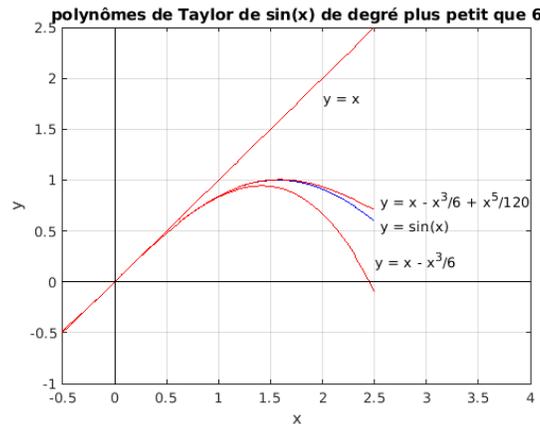


FIGURE 5.18 – Graphes des polynômes de Taylor de $\sin(x)$ de degré inférieur à 6 pour x près de l'origine. Le graphe de $\sin(x)$ est aussi inclus pour comparaison.

erreur de troncature inférieure à 10^{-8} , où p_k est le polynôme de Taylor de degré k de $\sin(x)$ près de l'origine. Nous voulons aussi la valeur de cette approximation.

Il faut trouver un petit entier k tel que

$$|\sin(0.01) - p_k(0.01)| = |r_k(0.01)| < 10^{-8}.$$

Nous avons montré à l'exemple précédent que

$$|r_k(x)| \leq \frac{1}{(k+1)!} |x|^{k+1} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$|r_k(0.01)| \leq \frac{1}{(k+1)!} 0.01^{k+1}.$$

Nous choisissons le plus petit entier k tel que

$$\frac{1}{(k+1)!} 0.01^{k+1} < 10^{-8}$$

soit satisfaite. Pour $k = 2$, nous avons que

$$|r_2(0.01)| \leq \frac{1}{3!} 0.01^3 = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \not< 10^{-8}.$$

Par contre, pour $k = 3$, nous avons que

$$|r_3(0.01)| \leq \frac{1}{4!} 0.01^4 = 0.41\bar{6} \times 10^{-9} < 10^{-8}.$$

Donc $k = 3$ est le degré cherché. L'approximation est donnée par

$$\sin(0.01) \approx p_3(0.01) = 0.01 - \frac{0.01^3}{3!} \approx 0.0099998333.$$

La valeur exacte est $\sin(0.01) = 0.009999833334\dots$. Nous obtenons plus de précision qu'il a été demandé. Cela est généralement dû au fait que notre borne supérieure sur l'erreur de troncature est une grossière sur-estimation de la valeur réelle de l'erreur de troncature. ♣

Exemple 5.5.6 🔧

Cherchons le degré d'un polynôme de Taylor de $f(x) = \sin(x/3)$ près de l'origine qui donnera toujours une approximation de f avec une erreur de troncature inférieure à 10^{-3} quel que soit le point $x \in]-4, 4[$ considéré.

Pour déterminer le degré d'un tel polynôme de Taylor, il faut trouver k tel que

$$|r_k(x)| = \left| \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) x^{k+1} \right| < 10^{-3}$$

pour $|x| < 4$ où $\xi = \xi(k, x, 0)$ est un nombre entre 0 et x . Or

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{3^2} \sin\left(\frac{x}{3}\right) \quad , \quad f^{(3)}(x) = -\frac{1}{3^3} \cos\left(\frac{x}{3}\right) \quad , \\ f^{(4)}(x) &= \frac{1}{3^4} \sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3^4} f(x) \quad , \quad \dots \end{aligned}$$

Par induction, nous obtenons

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{3^n} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \quad \text{et } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ainsi,

$$|r_k(x)| \leq \frac{1}{3^{k+1}(k+1)!} |x|^{k+1} < \frac{4^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)!}$$

pour $|x| < 4$. Puisque

$$|r_6(x)| < \frac{4^7}{3^7 7!} \approx 0.0014864 \not< 10^{-3} \quad \text{pour } |x| < 4$$

et

$$|r_7(x)| < \frac{4^8}{3^8 8!} \approx 0.0002477 < 10^{-3} \quad \text{pour } |x| < 4 ,$$

nous choisissons $k = 7$. Pour satisfaire la précision demandée dans la question, nous utilisons le polynôme de Taylor de degré 7 qui comprend quatre termes ; c'est-à-dire,

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) \approx p_7(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3^3 3!}x^3 + \frac{1}{3^5 5!}x^5 - \frac{1}{3^7 7!}x^7 \quad \text{pour } |x| < 4 .$$

Nous avons donc que

$$|f(x) - p_7(x)| < 10^{-3} \quad \text{pour } |x| < 4 .$$

Ce genre d'approximation qui est valable pour tout x dans un ensemble donné X est appelée approximation uniforme sur X . Dans le cas présent $X = \{x : |x| < 4\}$. ♣

Soit p_1 et p_2 les polynômes de Taylor d'ordre 1 et 2 respectivement d'une fonction f . Nous parlons ici de polynômes de Taylor près d'un point c . Sans être une démonstration

rigoureuse, le raisonnement qui suit supporte l'idée que le polynôme de Taylor p_2 fournit généralement une meilleure approximation de f près du point c que le polynôme de Taylor p_1 . Les polynômes p_1 et p_2 satisfont

$$f(x) = p_1(x) + \frac{1}{2}f''(\xi(1, c, x))(x - c)^2$$

$$f(x) = p_2(x) + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi(2, c, x))(x - c)^3$$

où $\xi(1, c, x)$ et $\xi(2, c, x)$ sont des nombres entre x et c . Si nous supposons que $f''(\xi(1, c, x)) \approx f''(c)$ et $f^{(3)}(\xi(2, c, x)) \approx f^{(3)}(c)$ pour x près de c , nous obtenons que l'erreur pour l'approximation linéaire $p_1(x)$ de $f(x)$ est proportionnel à $(x - c)^2$ et celle pour l'approximation quadratique $p_2(x)$ de $f(x)$ est proportionnel à $(x - c)^3$. Puisque $(x - c)^3$ approche 0 plus rapidement que $(x - c)^2$ lorsque x approche c , nous avons que $p_2(x)$ donne une meilleure approximation de $f(x)$ que $p_1(x)$ pour x très près de c .

Remarque 5.5.7

L'idée d'augmenter l'ordre du polynôme de Taylor pour améliorer notre approximation d'une fonction comme nous l'avons fait dans les exemples précédents est généralement vrai quel que soit la fonction f qui possède des dérivées d'ordre suffisamment grand. C'est-à-dire que, généralement, plus l'ordre k du polynôme de Taylor de f près du point c est grand, meilleure sera l'approximation de $f(x)$ fournies par $p_k(x)$ pour x très près de c .

Nous insistons sur le mot généralement utilisé au paragraphe précédent ainsi que sur la contrainte que x doit être très près de l'origine. Il y a des exceptions. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

possède des dérivées de toute ordre au point $x = 0$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k > 0$. Les polynômes de Taylor p_k de f près de l'origine satisfont donc $p_k(x) = 0$ pour tout x quel que soit l'ordre k du polynôme. Ainsi, $p_k(x) < f(x)$ pour tout $x > 0$ et augmenter l'ordre du polynôme de Taylor ne donne pas de meilleures approximations de $f(x)$ pour x près de l'origine.

De plus, dans certain cas, l'intervalle I contenant c sur lequel le polynôme de Taylor p_k de degré k de f près de c donne une bonne approximation de f devient de plus en plus petit lorsque k augmente. À la « limite », lorsque k devient de plus en plus grand, l'intervalle I «tend» vers l'ensemble $\{c\}$ qui contient seulement le point c . 

5.5.1 Calcul de limites

Nous pouvons utiliser les polynômes de Taylor pour évaluer les limites de la forme $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ où $\lim_{n \rightarrow a} f(x) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow a} g(x) = 0$.

Exemple 5.5.8

Calculons les limites suivantes.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{1 + x - e^x}$$

a) Le polynôme de Taylor de degré trois de $\sin(x)$ à l'origine est

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + r_3(x)$$

où

$$|r_3(x)| = \left| \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) x^4 \right| = \left| \frac{1}{4!} \sin(\xi) x^4 \right| \leq \frac{1}{4!} |x|^4$$

avec ξ entre 0 et x . Ainsi,

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} = \frac{x}{3!} - \frac{r_3(x)}{x^2}.$$

Puisque

$$\frac{x}{3!} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \left| \frac{r_3(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{4!} |x|^2 \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow 0$, nous obtenons

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} = \frac{x}{3!} - \frac{r_3(x)}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

b) Le polynôme de Taylor de degré deux de $\cos(2x)$ à l'origine est

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + r_2(x)$$

où

$$r_2(x) = \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi) x^3 = \frac{8}{3!} \sin(\xi) x^3$$

avec ξ entre 0 et x . De plus, le polynôme de Taylor de degré deux de e^x à l'origine est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \hat{r}_2(x)$$

où

$$\hat{r}_2(x) = \frac{1}{3!} g^{(3)}(\hat{\xi}) x^3 = \frac{1}{3!} e^{\hat{\xi}} x^3$$

avec $\hat{\xi}$ entre 0 et x . Donc

$$\frac{1 - \cos(2x)}{1 + x - e^x} = \frac{2x^2 - r_2(2x)}{-\frac{x^2}{2!} - \hat{r}_2(x)} = \frac{2 - \frac{r_2(2x)}{x^2}}{-\frac{1}{2} - \frac{\hat{r}_2(x)}{x^2}}.$$

Puisque

$$0 \leq \left| \frac{r_2(2x)}{x^2} \right| \leq \frac{8}{3!} |x| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \left| \frac{\hat{r}_2(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{3!} e^x |x| \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow 0$, nous obtenons

$$\frac{1 - \cos(2x)}{1 + x - e^x} = \frac{2 - \frac{r_2(2x)}{x^2}}{-\frac{1}{2} - \frac{\hat{r}_2(x)}{x^2}} \rightarrow \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$



5.6 Comportement asymptotique 🌲 🔧

Lorsque que nous étudions l'interaction entre deux espèces animales, une espèce étant les prédateurs et l'autre les proies, nous cherchons souvent à déterminer s'il se créera dans le futur un équilibre entre le nombre de prédateurs et le nombre de proies. Mathématiquement, il faut évaluer une limite de la forme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} \quad (5.6.1)$$

où $f(t)$ est le nombre de prédateurs et $g(t)$ est le nombre de proies au temps t . Si $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers les nombres réels $A \neq 0$ et $B \neq 0$ respectivement lorsque t tend vers l'infini, alors l'analyse du comportement à long terme des deux populations est simple car la valeur de la limite (5.6.1) est A/B . Pour t très grand, nous avons $f(t) \approx (A/B)g(t)$; le nombre de prédateurs est presque proportionnel au nombre de proies avec A/B comme constante de proportionnalité.

Bien souvent, l'analyse devient plus délicate car $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers 0 ou $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers plus l'infini lorsque t tend vers plus l'infini. C'est le genre de situations que nous allons présentement analyser.

Définition 5.6.1

Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty .$$

Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 ,$$

nous disons que $f(x)$ **croît plus lentement** que $g(x)$ et que $g(x)$ **croît plus rapidement** que $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

S'il existe un nombre réel positif L tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L ,$$

nous disons que $f(x)$ et $g(x)$ ont **asymptotiquement le même type de croissance** lorsque x tend vers l'infini.

La définition précédente n'est pas limitée au cas où x tend vers ∞ . Nous obtenons la définition suivante.

Définition 5.6.2

Une limite de la forme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

est appelée une limite du **type** ∞/∞ . la variable a peut être un nombre réel ou $\pm\infty$.

Exemple 5.6.3

Soit $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$. Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/5} = +\infty .$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une limite du type ∞/∞ . Laquelle des deux fonctions croît le plus rapidement ?

Si nous traçons les graphes de $\ln(x)$ et $x^{1/5}$ sur un même système de coordonnées (figure 5.19), il semble que $\ln(x)$ croît plus rapidement que $x^{1/5}$. Mais, est-ce vrai ?

Le tableau suivant donne la valeur de $\ln(x)/x^{1/5}$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $x_n = 10^n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. La suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers plus l'infini.

x	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\ln(x)/x^{1/5}$	0.8716997...	0.6416729...	0.4627065...	0.3284416...	0.2302585...
...	...	10^{13}	...	10^{17}	...
	...	0.0751898...	...	0.0155834...	...

La suite $\left\{ \frac{\ln(x_n)}{x_n^{1/5}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ semble bien tendre vers 0. Nous pourrions montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers plus l'infini. Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^{1/5}} = 0$$

et nous concluons que $x^{1/5}$ croît plus rapidement que $\ln(x)$. Ce n'est pas ce que le graphe de $\ln(x)$ et $x^{1/5}$ entre 1 et 1000 semblait suggérer. ♣

Remarque 5.6.4

Dans l'exemple précédent, nous avons choisit les fonctions f et g (i.e. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$) de telle sorte que les graphes de f et g entre 0 et 5000 indiquent que f croît plus rapidement que g alors qu'en réalité c'est g qui croît plus rapidement que f . Il serait possible de construire des fonctions f et g telles que les graphes de f et g à l'intérieur des limites de calcul d'un ordinateur indiquent que f croît plus rapidement que g alors qu'en réalité c'est g qui croît plus rapidement que f . Les ordinateurs ont des limites que la théorie n'a pas. ♠

Noter que nous sommes libre de choisir le rapport f/g ou g/f pour déterminer la fonction qui croît le plus rapidement et celle qui croît le plus lentement. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

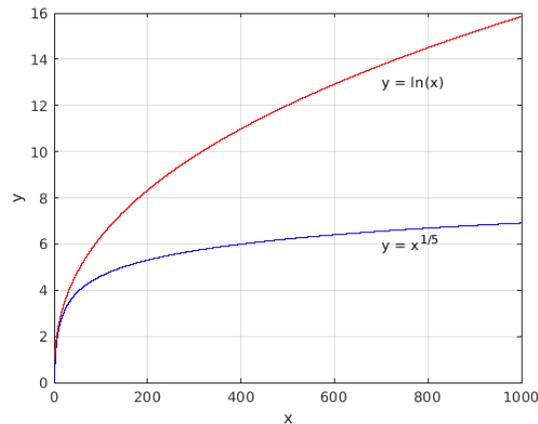


FIGURE 5.19 – Les graphes de $\ln(x)$ et de $x^{1/5}$. Lequel croît le plus rapidement ?

si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

lorsque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty ,$$

nous avons $f(x)$ qui croît plus rapidement que $g(x)$ et $g(x)$ qui croît plus lentement que $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

Définition 5.6.5

Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 .$$

Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 ,$$

nous disons que $f(x)$ **converge (ou tend) vers l'origine plus rapidement** que $g(x)$ et que $g(x)$ **converge (ou tend) vers l'origine plus lentement** que $f(x)$ lorsque x converge vers l'infini.

S'il existe un nombre réel non nul L tel que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L ,$$

nous disons que $f(x)$ et $g(x)$ ont **asymptotiquement le même type de convergence vers l'origine** lorsque x converge vers l'infini.

Comme pour la définition 5.6.1, La définition précédente n'est pas limitée au cas où x tend vers ∞ . Nous obtenons la définition suivante.

Définition 5.6.6

Une limite de la forme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

est appelée une limite du **type** 0/0. La variable a peut être un nombre réel ou $\pm\infty$.

Exemple 5.6.7

Soit $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = 10/x^5$. Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x^5} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une limite du type 0/0. Laquelle des deux fonctions tend le plus rapidement vers 0?

Si nous traçons le graphe de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $3 \leq x \leq 10$ sur un même système de coordonnées (figure 5.20), il semble que $10/x^5$ tend vers 0 plus rapidement que e^{-x} . Par contre, le graphe de ces deux fonctions pour $30 \leq x \leq 40$ (figure 5.20) montre que c'est en fait e^{-x} qui tend vers 0 plus rapidement que $10/x^5$.

Le tableau suivant donne la valeur de $e^{-x}/(10/x^5)$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $x_n = 10n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Cette suite tend vers plus l'infini.

x	10	20	30	...
$e^{-x}/(10/x^5)$	0.453999...	$6.595691 \dots \times 10^{-4}$	$2.273902 \dots \times e^{-7}$...
...		100	...	
		$3.720075 \dots \times 10^{-35}$...	

La suite $\left\{ \frac{e^{-x_n}}{10/x_n^5} \right\}_{n=0}^{\infty}$ semble tendre très rapidement vers 0. Nous pourrions montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers l'infini. Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{10/x^5} = 0$$

et nous concluons que e^{-x} tend vers 0 plus rapidement que $10/x^5$. ♣

Exemple 5.6.8

Considérons les fonctions $f(x) = x^5$ et $g(x) = e^x - 1$. Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

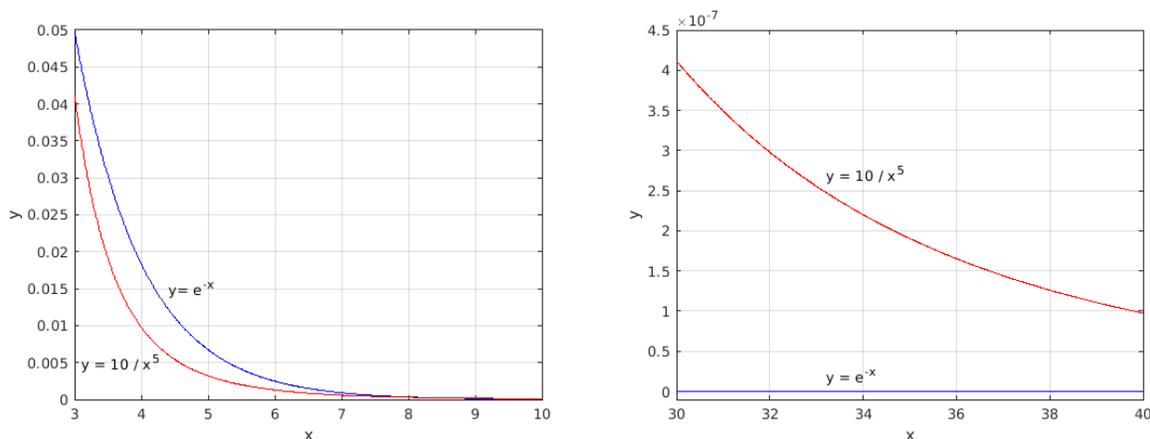


FIGURE 5.20 – Les graphes de e^{-x} et de $10/x^5$ pour $3 \leq x \leq 10$ (à gauche) et pour $30 \leq x \leq 40$ (à droite)

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (5.6.2)$$

est une limite du type $0/0$.

Le graphe de $e^x - 1$ et de x^5 pour $-2 \leq x \leq 2$ que nous retrouvons à la figure 5.21 semble indiquer que x^5 tend vers 0 légèrement plus rapidement que $e^x - 1$ lorsque x tend vers 0. Est-ce vrai ?

Pour répondre à cette question, il nous faut donc calculer la limite (5.6.2). Le tableau suivant donne la valeur de $x^5/(e^x - 1)$ évaluée à certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $x_n = 1/n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Cette suite tend vers l'origine.

x	1	1/4	1/9	1/25	...
$x^5/(e^x - 1)$	0.58197...	0.00343...	$1.44105 \dots \times 10^{-4}$	$2.50914 \dots \times 10^{-6}$...

La suite $\left\{ \frac{x_n^5}{e^{x_n} - 1} \right\}_{n=0}^{\infty}$ semble tendre vers 0. Nous pourrions montrer que c'est le cas pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers l'origine (même si certains des termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sont négatifs). Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0$$

et nous concluons que x^5 tend effectivement plus rapidement vers 0 que $e^x - 1$ lorsque x tend vers 0. 

Dans tous les exemples précédents, nous avons dû calculer numériquement des limites du type $0/0$ ou ∞/∞ pour pouvoir comparer la « vitesse » de convergence de deux fonctions. Dans le but d'éviter le calcul numérique de limite du type ∞/∞ ou $0/0$, nous pouvons utiliser le résultat suivant.

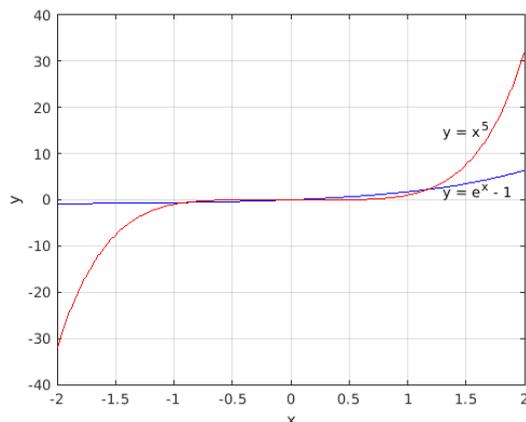


FIGURE 5.21 – Les graphes de $e^x - 1$ et de x^5 pour $-2 \leq x \leq 2$

Théorème 5.6.9 (Règle de l'Hospital)

Soit f et g deux fonctions différentiables sur l'intervalle $]a, b[$. De plus, supposons que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty,$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Le théorème est aussi vrai si nous remplaçons $x \rightarrow a^+$ par $x \rightarrow b^-$ ou par $x \rightarrow c \in]a, b[$. De plus, le théorème reste valide pour $a = +\infty$ et $b = -\infty$.

Remarque 5.6.10

Pour calculer les limites du type $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$, il faut souvent calculer $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Si ces deux limites sont égales, alors

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$



Sans être une démonstration rigoureuse de la Règle de l'Hospital, le raisonnement suivant peut quand même motiver cette règle. Supposons que $f(c) = g(c) = 0$, f et g sont différen-

tiables en $x = c$ (donc f et g sont continue en $x = c$), f' et g' sont continue en $x = c$, et $g'(c) \neq 0$. L'approximation linéaire de f et g près de c nous permet d'écrire

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c) = f'(c)(x - c) \quad \text{et} \quad g(x) \approx g(c) + g'(c)(x - c) = g'(c)(x - c)$$

pour x très près de c . Ainsi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

pour x très près de c . Il est donc plausible que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pour démontrer la Règle de l'Hospital, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.6.11 (Théorème de la moyenne de Cauchy)

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiables sur l'intervalle $]a, b[$, et si de plus $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors il existe $\xi = \xi(a, b)$ entre a et b tel que

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Démonstration

Ce lemme est une conséquence du théorème de la moyenne. Posons

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

pour $x \in [a, b]$. Notons que $g(a) \neq g(b)$ car $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors la fonction g est soit strictement croissante ou décroissante.

La fonction h est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiable sur l'intervalle $]a, b[$ car c'est le cas pour f et g . Puisque $h(a) = h(b) = 0$, il découle du théorème des valeurs moyenne qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $h'(\xi) = 0$. C'est-à-dire,

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0.$$

D'où

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Notons que $g'(\xi) \neq 0$ car $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. ■

Démonstration (Règle de l'Hospital)

Nous démontrons la Règle de l'Hospital seulement dans le cas où

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0. \quad (5.6.3)$$

La démonstration dans les autres cas est semblable.

Soit $\epsilon > 0$, nous cherchons $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R},$$

il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. Posons

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

et

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}.$$

Il découle de (5.6.3) que F et G sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b[$. De plus, F et G sont différentiable sur $]a, b[$ et $G'(x) = g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Nous pouvons donc utiliser le théorème de la moyenne de Cauchy sur $[a, x]$ où $a < x < b$ pour trouver ξ entre x et a tel que

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)},$$

en d'autres mots

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$ alors $|\xi - a| < \delta$ car ξ est entre a et x . Donc

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \epsilon$$

si $|x - a| < \delta$ et $x \in]a, b[$. ■

Exemple 5.6.12

Pour $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{1/5}$ de l'exemple 5.6.3, puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/5} = \infty,$$

nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital. Nous avons $f'(x) = 1/x$ et $g'(x) = 1/(5x^{4/5})$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/(5x^{4/5})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^{1/5}} = 0.$$



Exemple 5.6.13

À l'exemple 5.6.8, nous avons calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où $f(x) = x^5$ et $g(x) = e^x - 1$. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^5 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0,$$

nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital. Nous avons $f'(x) = 5x^4$ et $g'(x) = e^x$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4}{e^x} = \frac{0}{1} = 0.$$



Exemple 5.6.14

À l'exemple 5.6.7, nous avons $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = 10x^{-5}$. Remarquons que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{-x}}{10x^{-5}} = \frac{x^5}{10e^x}.$$

Si nous posons $F(x) = x^5$ et $G(x) = 10e^x$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)}.$$

C'est cette dernière limite que nous évaluerons. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 10e^x = \infty,$$

nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital. Nous avons $F'(x) = 5x^4$ et $G'(x) = 10e^x$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{10e^x}.$$

Nous avons encore une limite du type ∞/∞ . Nous pouvons maintenant utiliser la Règle de l'Hospital avec F' et G' pour obtenir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F''(x)}{G''(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{10e^x}.$$

Nous obtenons encore une limite du type ∞/∞ que nous pouvons évaluer à l'aide de la Règle de l'Hospital. Nous pouvons répéter cette procédure jusqu'à ce que nous ayons une limite qui ne satisfasse plus la Règle de l'Hospital et que nous pouvons évaluer facilement. Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{10 e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 x^4}{10 e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20 x^3}{10 e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60 x^2}{10 e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120 x}{10 e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120}{10 e^x} = 0.\end{aligned}$$

Sauf pour la dernière limite, toutes les autres limites de l'expression précédente sont du type ∞/∞ . Nous avons donc démontré que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = 0.$$



Exemple 5.6.15

Montrons que $e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ domine (i.e. croît plus rapidement que) x^3 lorsque x tend vers plus l'infini.

Nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 x^2}{\alpha e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 x}{\alpha^2 e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\alpha^3 e^{\alpha x}} = 0$$

car $\alpha > 0$. Chacune des égalités est une conséquence de la Règle de l'Hospital. Dans le premier cas, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\alpha x} = \infty$, dans le deuxième cas $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha e^{\alpha x} = \infty$, et dans le troisième cas $\lim_{x \rightarrow \infty} 6x = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^2 e^{\alpha x} = \infty$.

Remarque 5.6.16

En fait, nous pouvons montrer que $e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ tend vers plus l'infini plus rapidement que x^β lorsque x tend vers plus l'infini quel que soit $\beta > 0$. En effet,

$$\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = \frac{e^{\beta \ln(x)}}{e^{\alpha x}} = e^{\beta \ln(x) - \alpha x} = e^{\beta(\ln(x)/x - \alpha)x}.$$

Or, nous pouvons montrer (le cas $\sigma = 1$ et $\epsilon = \alpha/2$ de la remarque 5.6.17 qui suit) que pour x assez grand $\ln(x)/x - \alpha/2 < 0$. Ainsi, pour x assez grand,

$$\beta(\ln(x)/x - \alpha)x = \beta(\ln(x)/x - \alpha/2 - \alpha/2)x < \beta(-\alpha/2)x = -\beta\alpha x/2.$$

Il en découle que

$$0 \leq \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = e^{\beta(\ln(x)/x - \alpha)x} \leq e^{-\beta\alpha x/2}$$

pour x suffisamment grand. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\beta\alpha x/2} = 0$$

car $-\beta\alpha < 0$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$$

grâce au théorème des gendarmes. 

Remarque 5.6.17 

Montrons que x^σ avec $\sigma > 0$ quelconque domine $\ln(x)$ lorsque x tend vers plus l'infini.

Grâce à la Règle de l'Hospital, nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\sigma} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\sigma x^{\sigma-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma x^\sigma} = 0$$

car $\sigma > 0$. La définition 3.4.14 nous permet de dire que quel que soit $\epsilon > 0$ petit, nous pouvons toujours trouver un nombre $M > 0$ assez grand tel que $\ln(x)/x^\sigma < \epsilon$ pour $x > M$. Plus ϵ sera petit, plus M devra être grand. 

Exemple 5.6.18 

Évaluons la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

Nous avons a une limite du type 0/0 pour laquelle nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} .$$

Nous obtenons une limite du type 0/0 pour laquelle nous pouvons encore utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} = -\sin(0) = 0 .$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$. 

Exemple 5.6.19 

Il n'y a pas seulement que les limites du type 0/0 ou ∞/∞ que nous puissions traiter avec la Règle de l'Hospital. Calculons la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} .$$

Nous obtenons une limite du type 0^0 . Avec quelques opérations algébriques, nous pouvons amener le problème à une limite du type ∞/∞ . Puisque

$$(\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\ln((\sin(x))^{\tan(x)})} = e^{\tan(x) \ln(\sin(x))}$$

et la fonction exponentielle est une fonction continue, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x))} .$$

Il suffit donc de calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x)) .$$

Ce n'est pas encore une limite du type ∞/∞ mais plutôt une limite du type $0 \cdot \infty$. Cependant,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)}$$

et cette dernière limite est du type ∞/∞ . Si nous utilisons la Règle de l'Hospital, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) / (-\csc^2(x)) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) \sin(x) = -\cos(0) \sin(0) = 0 . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(x) \ln(\sin(x))} = e^0 = 1 .$$



Exemple 5.6.20

Calculons la limite

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec(x) - \tan(x)) .$$

Nous obtenons une limite du type $\infty - \infty$. Avec quelques opérations algébriques, nous pouvons amener le problème à une limite du type $0/0$ pour laquelle nous pourrions utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec(x) - \tan(x)) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0 , \end{aligned}$$

où la troisième limite est une limite du type $0/0$ pour laquelle nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital. 

Exemple 5.6.21

Évaluons les limites suivantes si elles existent.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x}$$

a) Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

où chaque égalité (sauf la dernière) est une conséquence de la Règle de l'Hospital pour une limite du type ∞/∞ .

b) Nous avons

$$(e^x + x)^{1/x} = e^{\ln((e^x + x)^{1/x})} = e^{\ln(e^x + x)/x}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^x + x)/x} = e^1 = e$$

grâce à notre résultat en (a). 

Exemple 5.6.22

Évaluons la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Nous avons une limite du type $0 \cdot \infty$. Par contre

$$(x - 1) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \left(\frac{x - 1}{\cos(\pi x/2)}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

où

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

car $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est une fonction continue. Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)}{\cos(\pi x/2)}$ est une limite du type $0/0$, nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)}{\cos(\pi x/2)}\right) \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-(\pi/2) \sin(\pi x/2)} = \frac{1}{-(\pi/2) \sin(\pi/2)} = -\frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$



Exemple 5.6.23

Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = a \tag{5.6.4}$$

pour $a > 0$. Nous allons utiliser ce résultat pour montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

(5.6.4) n'est pas une limite du type ∞/∞ ou $0/0$. Nous ne pouvons donc pas utiliser la Règle de l'Hospital directement. Par contre,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{(1/x)}.$$

Cette dernière limite est du type $0/0$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)}{(1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x} \right)^{-1} \left(-\frac{a}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} a \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{-1} = a \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} \right)^{-1} = a \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$. La seconde égalité est une conséquence de la Règle de l'Hospital.

Puisque $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont des fonctions continues, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\ln(1 + \frac{a}{x}))^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(x \ln(1 + \frac{a}{x}))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{a}{x})} = e^a. \end{aligned}$$

Remarquons que (5.6.4) est aussi vrai pour $a < 0$ si nous assumons que la limite est pour $x > |a|$. Finalement, (5.6.4) est évidemment satisfait si $a = 0$. ♣

Exemple 5.6.24

Montrons que la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge.

Nous avons une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ où $a_n = \ln(n)/n$. Nous démontrons que cette série satisfait les trois hypothèses du test des séries alternées, théorème 2.2.42.

1. Nous avons $a_n > 0$ pour $n \geq 2$ et $a_1 = 0$ (nous pouvons donc ignorer le premier terme de la série).
2. Grâce à la Règle de l'Hospital, nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

3. Puisque que la dérivée de $f(x) = \ln(x)/x$ satisfait $f'(x) = (1 - \ln(x))/x^2 < 0$ pour $x > e$, la fonction f est une fonction décroissante pour $x > e$ et donc que

$$a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} = f(n+1) \leq f(n) = \frac{\ln(n)}{n} = a_n$$

pour tout $n \geq 3$.

Nous pouvons donc conclure du test des séries alternées que la série $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge.

Puisque

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{n=3}^k (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

pour tout $k > 2$, nous avons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \\ &= 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}. \end{aligned}$$



5.7 Méthode de Newton 🌲 🛠️

Exemple 5.7.1 🌲

Supposons qu'à l'exemple 5.2.9 la quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une même fleur soit $F(t) = \beta(1 - e^{-t/\alpha})$ où β est la quantité de nectar que possède une fleur et $\alpha > 0$ est un coefficient de difficulté pour aspirer le nectar.

Nous avons montré que la solution T de l'équation

$$F'(T) = \frac{F(T)}{T + \tau}$$

donnait le temps T en minutes que l'abeille devait rester sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage.

Donc T est la solution de

$$\frac{\beta}{\alpha} e^{-t/\alpha} = \frac{\beta(1 - e^{-t/\alpha})}{t + \tau}.$$

Quelques manipulations algébriques montrent que cette dernière équation est équivalente à

$$\alpha + \tau + t = \alpha e^{t/\alpha}.$$

Si nous supposons que $\alpha = 3$, $\beta = 2$ et $\tau = 1$, la valeur T qui maximise la récolte de nectar pour une journée est la solution de l'équation

$$4 + t = 3e^{t/3}.$$

Il est malheureusement impossible d'isoler t . Comment peut-on trouver T ?



L'exemple précédent nous amène à considérer les méthodes numériques pour estimer les solutions d'équations de la forme

$$f(x) = 0 \tag{5.7.1}$$

où f est une fonction à valeurs réelles dont le domaine est un intervalle de la droite réelle. Une solution de (5.7.1) est appelée une **racine** ou un **zéro** de f .

Nous présentons qu'une seule méthode numérique pour estimer les racines d'une équation de la forme (5.7.1). Cette méthode est connue sous le nom de **méthode de Newton**. Cette méthode permet de construire une suite de nombres $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers une racine de f .

Méthode 5.7.2 (Méthodes de Newton)

1. Choisissez une valeur x_0 près de la racine p de f que vous voulez estimer.
2. Connaissant x_n , le terme suivant x_{n+1} est donné par la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5.7.2)$$

si $f'(x_n) \neq 0$. Si $f'(x_n) = 0$, il faut choisir une nouvelle valeur pour x_0 et reprendre en (1).

3. Répétez (2) jusqu'à ce que vous ayez une approximation x_n de la racine p qui satisfait la précision désirée.

Justifions graphiquement la méthode de Newton. Supposons que x_n soit une approximation d'une racine p de f qui provient de la méthode de Newton. Alors x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des x (figure 5.22). L'équation de cette droite tangente est $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Ainsi, x_{n+1} est la solution de $0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Si $f'(x_n) \neq 0$, nous trouvons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

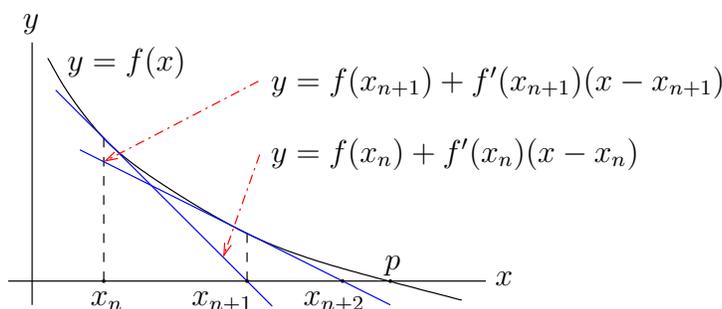


FIGURE 5.22 – La suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est produite avec la méthode de Newton et tend vers une racine p de la fonction f

Théorème 5.7.3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont la deuxième dérivée est une fonction continue. Si p est une racine de f telle que $f'(p) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ produite par la méthode de Newton converge vers p si la distance entre p et x_0 est plus petite que δ ; c'est-à-dire, si $|x_0 - p| < \delta$.

Remarque 5.7.4

En d'autres mots, le théorème dit que si $f'(p) \neq 0$ et si x_0 est suffisamment près de p , alors la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ produite avec la méthode de Newton tend vers p .

La méthode de Newton est une méthode du point fixe (voir la section 5.8 sur les systèmes dynamiques discrets) de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ où $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Si p est un point fixe de g , alors $p = p - f(p)/f'(p)$ et nous obtenons $f(p) = 0$. 

Exemple 5.7.5

Trouvons une approximation de $\sqrt{2}$ avec la méthode de Newton. Nous allons arrêter lorsque la différence entre deux termes consécutifs de la suite produite par la méthode de Newton est plus petite que 10^{-4} .

Le but est de trouver la racine positive de la fonction $f(x) = x^2 - 2$. Nous avons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nous donnons dans le tableau suivant les premiers termes de la suite produite par la méthode de Newton avec $x_0 = 2$.

n	x_n	$\approx x_{n-1} - x_n $
0	2	
1	1.5	0.5
2	1.416667...	0.083333
3	1.414216...	0.002451
4	1.414214...	0.000002

Nous arrêtons à x_4 car $|x_4 - x_3| \approx 0.000002 < 10^{-4}$. Nous pouvons donc dire que $\sqrt{2} \approx x_4 = 1.414214$. La valeur exacte de $\sqrt{2}$ est 1.41421356237310... 

Exemple 5.7.6

Utilisons 6 itérations de la méthode de Newton pour estimer une des racines du polynôme $g(x) = -10 + 4x^2 + x^3$.

Nous avons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{-10 + 4x_n^2 + x_n^3}{8x_n + 3x_n^2} = \frac{2(5 + 2x_n^2 + x_n^3)}{8x_n + 3x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nous retrouvons dans le tableau suivant les 6 premières itérations de la méthode de Newton avec $x_0 = 1.5$.

n	x_n	$\approx x_{n-1} - x_n $
0	1.5	
1	1.37333333333333...	0.126667
2	1.3652620148746...	0.00807132
3	1.3652300139161...	0.00003200
4	1.3652300134141...	5.0205×10^{-10}
5	1.3652300134141...	2.22045×10^{-16}
6	1.3652300134141...	2.22045×10^{-16}

Une des racines de g est donc approximativement 1.3652300134141.

Comme le polynôme g n'a qu'une seule racine réelle (le lecteur est invité à tracer le graphe de g ou à factoriser le polynôme $g(x)$ pour démontrer cela), nous avons en fait trouver une

approximation de cette racine. Tout autre choix pour x_0 va donner une approximation de cette racine mais un bon choix pour x_0 peut grandement réduire le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une bonne approximation. ♣

Exemple 5.7.7 🔧

Utilisons la méthode de Newton pour estimer l'inverse multiplicatif d'un nombre a . Ce n'est naturellement pas une façon efficace de trouver l'inverse d'un nombre mais cela permet d'illustrer la méthode de Newton. L'inverse multiplicatif de a est la racine de $f(x) = a - 1/x$. Si nous utilisons la Méthode de Newton pour estimer cette racine, nous trouvons

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{a - 1/x_n}{1/x_n^2} = 2x_n - ax_n^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nous pouvons utiliser cette formule pour estimer l'inverse multiplicatif de $a = 13478$. Nous avons

$$x_{n+1} = 2x_n - 13478x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Le tableau suivant donne les premiers termes de la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ produite à l'aide de la méthode de Newton avec $x_0 = 0.0001$.

n	x_n
0	0.0001
1	0.00006522
2	0.00007310932686...
3	0.00007417909852...
4	0.00007419498098...
5	0.00007419498445...

Nous obtenons que $1/13478 \approx 0.7419498445 \times 10^{-4}$. L'inverse multiplicatif de 13478 est $0.741949844190533 \dots \times 10^{-4}$. ♣

Exemple 5.7.8 🌲

Utilisons la méthode de Newton pour compléter l'exemple 5.7.1.

Il faut trouver une valeur de t pour laquelle l'équation

$$4 + t = 3e^{t/3} \tag{5.7.3}$$

sera satisfaite. La première question à se poser est « existe-t-il une telle valeur de t ? » L'intersection de la droite $y = 4 + t$ et de la courbe $y = 3e^{t/3}$ que nous avons tracées à la figure 5.23 confirme qu'il existe en fait une valeur positive T de t pour laquelle (5.7.3) est satisfaite.

Considérons la fonction $f(t) = 3e^{t/3} - t - 4$. Si t satisfait $f(t) = 0$ alors t satisfait (5.7.3). Nous choisissons une valeur t_0 près de T . Soit $t_0 = 2$. La formule pour la méthode de Newton est

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \frac{3e^{t_n/3} - t_n - 4}{e^{t_n/3} - 1} = \frac{(t_n - 3)e^{t_n/3} + 4}{e^{t_n/3} - 1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nous donnons dans le tableau suivant les premiers termes de la série $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ générée par la méthode de Newton.

n	t_n	$\approx t_{n-1} - t_n $
0	2	
1	2.16544501942917...	0.165445
2	2.15689134808212...	0.00855367
3	2.15686752051758...	2.382756×10^{-5}
4	2.15686752033303...	1.845497×10^{-10}
5	2.15686752033302...	1.0×10^{-14}

L'abeille doit donc demeurer approximativement 2.1569 minutes sur une fleur pour maximiser la quantité de nectar qu'elle peut récolter durant une journée d'ouvrage. ♣

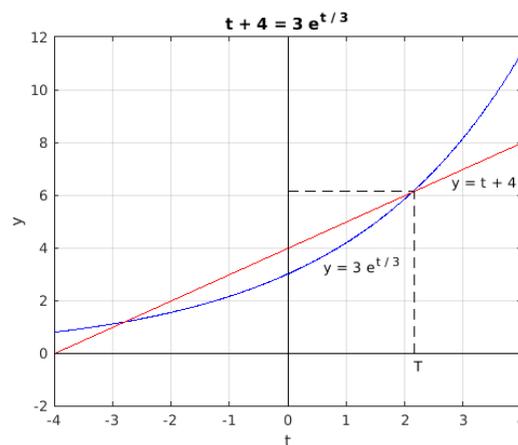


FIGURE 5.23 – La courbe $y = 3e^{t/3}$ et la droite $y = t + 4$ se coupent en un seul point $t = T > 0$ près de $t = 2$.

Il y a deux problèmes majeurs qui peuvent faire échouer la méthode de Newton.

Problème 1

Il faut faire un bon choix pour x_0 . Si la fonction f a plusieurs racines, il peut s'avérer difficile de trouver x_0 pour obtenir une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ générée par la méthode de Newton qui tend vers la racine p que nous cherchons. Il faut choisir x_0 assez près de cette racine p . Mais comment pouvons-nous choisir x_0 près de p si nous ne connaissons pas p ? Le Théorème des valeurs intermédiaires, théorème 3.3.5, nous fournit une méthode pour choisir x_0 .

Si nous avons $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)$, alors le théorème 3.3.5 avec $m = 0$ nous confirme qu'il existe une racine de f entre a et b . L'algorithme suivant, connu sous le nom de **méthode de bisection**, nous permet de trouver un intervalle aussi petit que nous voulons et qui contient une racine de f . Si nous prenons x_0 dans un tel intervalle, la méthode

de Newton a de bonnes chances de nous donner une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tend vers la racine dans ce petit intervalle.

Méthode 5.7.9 (Méthode de bisection)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$; c'est-à-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé.

1. Prenez $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
2. Étant donné a_n et b_n , posez $m = (a_n + b_n)/2$. Le point m est le point milieu de l'intervalle $[a_n, b_n]$.
3. Si $f(m) = 0$ alors m est une racine de f et vous pouvez arrêter.
4. Si $f(m)f(a_n) < 0$, posez $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$. Autrement, posez $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.
5. Répétez (2), (3) et (4) pour obtenir une suite d'intervalles emboîtés

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

qui contiennent une racine de f .

L'item 4 mérite une attention toute particulière. Par construction, nous avons toujours $f(a_n)f(b_n) < 0$. $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont donc de signe opposé. Ce qui implique que la fonction f change de signe dans l'intervalle $[a_n, b_n]$. De plus, $f(m) \neq 0$ suite à l'item 3. Donc, soit que $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de même signe (et donc $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé) ou $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (et donc $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de même signe).

Si $f(a_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (i.e. $f(a_n)f(m) < 0$), alors il découle du théorème des valeurs intermédiaires que f a une racine dans l'intervalle $[a_n, m]$. L'intervalle $[a_n, m]$ devient l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ qui suit.

Si $f(b_n)$ et $f(m)$ sont de signe opposé (i.e. $f(a_n)f(m) > 0$ car $f(a_n)$ et $f(m)$ sont alors de même signe), alors il découle du théorème des valeurs intermédiaires que f a une racine dans l'intervalle $[m, b_n]$. L'intervalle $[m, b_n]$ devient l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ qui suit.

Exemple 5.7.10

Pour trouver une solution positive de l'équation $e^x = x + 4$, nous posons $f(x) = e^x - x - 4$. Puisque $f(0) = -3 < 0$ et $f(3) = 13.08\dots > 0$, il y a une racine de f entre 0 et 3. nous pouvons utiliser la méthode de bisection pour trouver un petit intervalle contenant cette racine.

Nous résumons dans le tableau suivant les calculs nécessaires pour la méthode de bisection.

n	a_n	b_n	m	$f(a_n)$	$f(m)$
0	0	3	1.5	-3	-1.018310...
1	1.5	3	2.25	-1.018310...	3.237735...
2	1.5	2.25	1.875	-1.018310...	0.645819...
3	1.5	1.875	1.6875	-1.018310...	-0.281551...
4	1.6875	1.875

Ainsi, il y a une racine de f entre 1.6875 et 1.875. Les chances sont donc bonnes pour que la méthode de Newton produise une suite qui converge vers cette racine si nous prenons x_0 pour la méthode de Newton entre 1.6875 et 1.875.

Puisque $f'(x) = e^x - 1$, la formule pour la méthode de Newton est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n - 4}{e^{x_n} - 1} = \frac{(x_n - 1)e^{x_n} + 4}{e^{x_n} - 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Avec $x_0 = 1.7$, nous obtenons la suite suivante.

n	x_n	$\approx x_{n-1} - x_n $
0	1.7	
1	1.75052643414869...	0.0505264
2	1.74903273782687...	0.0014936
3	1.74903138601381...	1.3518130×10^{-6}
4	1.74903138601270...	$1.1100009 \times 10^{-12}$

Une solution positive de l'équation $e^x = x + 4$ est approximativement 1.7490313860127.

En fait, il n'y a qu'une seule solution positive car $f'(x) = e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$. Donc f est une fonction croissante avec $f(x) > 0$ pour $x > 1.7490313860\dots$ et $f(x) < 0$ pour $0 < x < 1.7490313860\dots$ 

Problème 2

L'autre problème qui peut faire échouer la méthode de Newton est si $f'(x_n)$ est très près de zéro. Si $f'(x_n)$ est très près de zéro, alors la droite $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ est presque horizontale. Ainsi, x_{n+1} qui est l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des x peut être très grand ou très petit, et donc très loin de la racine de f que nous cherchons à estimer. Si $f'(x_n)$ devient très près de zéro dans la méthode de Newton, il faut arrêter et recommencer avec une autre valeur de x_0 . Il est parfois impossible d'éviter ce problème. Il faut alors avoir recours à une autre méthode numérique pour estimer les racines.

5.8 Systèmes dynamiques discrets

Exemple 5.8.1

Une population de bactéries dans un milieu donné a un taux de croissance de 10% par heure. Si p_0 est le nombre de bactéries par cm^3 (en moyenne) initialement, alors $p_1 = 1.1p_0$ est le nombre de bactéries une heure plus tard, $p_2 = 1.1p_1$ est le nombre de bactéries par cm^3 deux heures plus tard, $p_3 = 1.1p_2$ est le nombre de bactéries par cm^3 trois heures plus tard, etc. La relation

$$p_{n+1} = 1.1p_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

définit un système dynamique discret qui nous permet de calculer le nombre de bactéries par cm^3 à toutes les heures à partir du nombre de bactéries par cm^3 initialement présent. Si

initialement nous avons $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 , alors nous aurons $p_1 = 1.1p_0 = 1.1 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après une heure, nous aurons $p_2 = 1.1p_1 = 1.1^2p_0 = 1.1^2 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après deux heures, et ainsi de suite.

Nous obtenons que $p_n = 1.1^n p_0 = 1.1^n \times 10^7$ bactéries par cm^3 . Ainsi, après 10 heures, nous aurons $p_{10} = 1.1^{10} \times 10^7$ bactéries par cm^3 si initialement nous avons $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 . Nous avons que p_n tend vers plus l'infini lorsque n augmente ; c'est-à-dire que le nombre de bactéries croît sans borne supérieure. ♣

Définition 5.8.2

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Une équation de la forme

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8.1)$$

est appelée un **système dynamique discret**. La valeur donnée à p_0 est la **condition initiale**. La fonction f est appelée la **fonction itérative** ou **fonction génératrice** du système dynamique discret.

Une **solution** du système dynamique discret (5.8.1) qui satisfait la condition initiale p_0 est une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $p_n = g(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ satisfait (5.8.1) et $g(0) = p_0$.

Remarque 5.8.3

Les systèmes dynamiques discrets sont très fréquents en biologie. Ils sont utilisés pour décrire mathématiquement le comportement de quantités qui sont mesurées à une fréquence régulière. Pour étudier le comportement des systèmes dynamiques discrets, nous aurons besoin du calcul différentiel et intégral.

Inversement, les systèmes dynamiques discrets sont très utiles pour résoudre numériquement les problèmes de calcul différentiel et intégral. Les systèmes dynamiques discrets sont utilisés pour résoudre des équations quand aucune méthode exacte de résolution n'existe (c'est se que nous avons fait avec la méthode de Newton), pour résoudre des équations différentielles pour lesquelles les méthodes algébriques d'intégration échouent (c'est ce que nous allons faire avec la méthode d'Euler que nous présenterons lors de l'étude des équations différentielles), etc. ♠

Exemple 5.8.4

À l'exemple précédent, la fonction itérative du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 1.1p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

est $f(x) = 1.1x$ et la solution de ce système avec la condition initiale p_0 est

$$p_n = 1.1^n p_0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Le graphe de cette solution avec $p_0 = 10^7$ est donné à la figure 5.24. ♣

Exemple 5.8.5

Reprenons notre exemple d'une population de bactéries dans un milieu donné. Supposons

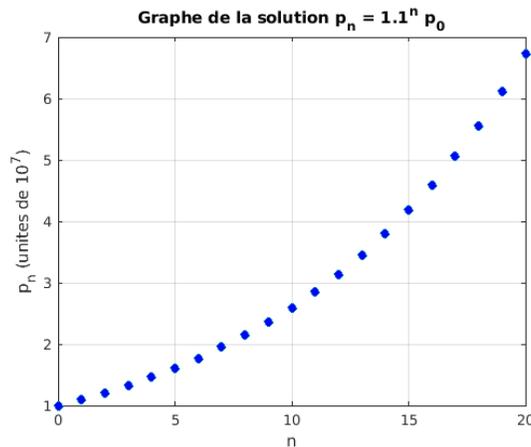


FIGURE 5.24 – Graphe de la solution $p_n = 1.1^n p_0$ avec $p_0 = 10^7$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 1.1p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Les points que nous retrouvons dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

maintenant que le taux de croissance soit de -20% par heure. Si p_0 est le nombre de bactéries par cm^3 initialement, alors $p_1 = 0.8p_0$ est le nombre de bactéries par cm^3 une heure plus tard, $p_2 = 0.8p_1$ est le nombre de bactéries par cm^3 deux heures plus tard, $p_3 = 0.8p_2$ est le nombre de bactéries par cm^3 trois heures plus tard, etc. L'équation

$$p_{n+1} = 0.8p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

définit un système dynamique discret qui nous permet de calculer le nombre de bactéries par cm^3 à toutes les heures à partir du nombre de bactéries initialement présent. Si initialement nous avons $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 , alors nous aurons $p_1 = 0.8p_0 = 0.8 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après une heure, nous aurons $p_2 = 0.8p_1 = 0.8^2 p_0 = 0.8^2 \times 10^7$ bactéries par cm^3 après deux heures, et ainsi de suite.

La solution est donc $p_n = 0.8^n p_0 = 0.8^n \times 10^7$ bactéries par cm^3 . Après 10 heures, nous aurons $p_{10} = 0.8^{10} \times 10^7 = 1.073742 \times 10^6$ bactéries par cm^3 si initialement nous avons $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 . Après 24 heures, nous aurons $p_{24} = 0.8^{24} \times 10^7 = 47,224$ bactéries par cm^3 . Nous avons que p_n tend vers 0 lorsque n augmente. Le graphe de la solution avec la condition initiale $p_0 = 10^7$ bactéries par cm^3 est donné à la figure 5.25. ♣

Exemple 5.8.6

Comme à l'exemple précédent, soit p_n le nombre de bactéries par cm^3 n heures après le début d'une expérience. De plus, supposons que la population de bactéries est décrite par le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Combien d'heures au minimum faut-il pour que le nombre de bactéries par cm^3 soit réduit d'au moins la moitié ?

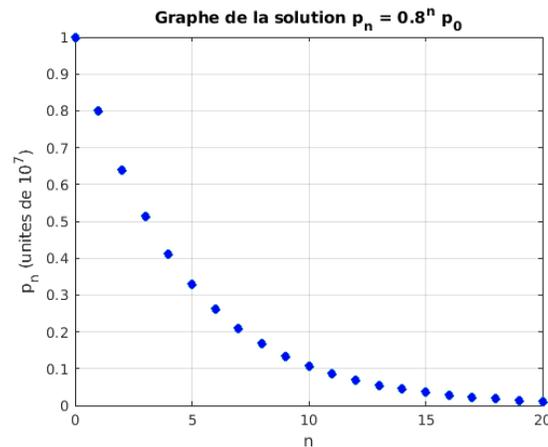


FIGURE 5.25 – Graphe de la solution $p_n = 0.8^n p_0$ avec $p_0 = 10^7$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Les points tracés dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

La solution du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ est $p_n = 0.8^n p_0$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. Il faut trouver la plus petite valeur de n telle que $p_n \leq p_0/2$. Considérons

$$0.8^n p_0 \leq \frac{p_0}{2}.$$

Si nous divisons par p_0 des deux côtés de l'égalité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0.8^n \leq 2^{-1} &\Rightarrow n \ln(0.8) = \ln(0.8^n) \leq \ln(2^{-1}) = -\ln(2) \\ &\Rightarrow n \geq -\frac{\ln(2)}{\ln(0.8)} = -\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} = -\frac{\ln(2)}{\ln(4) - \ln(5)} = 3.106283\dots \end{aligned}$$

Après trois heures nous aurons un peu plus $p_0/2$ bactéries par cm^3 et après quatre heures nous en aurons moins que $p_0/2$. Nous prenons donc $n = 4$ heures. Remarquons que la réponse est indépendante du nombre initial de bactéries.

Pouvons-nous dire qu'après 3.106... heures la population de bactéries par cm^3 est exactement la moitié du nombre initial de bactéries par cm^3 ? En général non, puisque $p_n = 0.8^n p_0$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ est la solution d'un système dynamique discret, il n'y a rien qui dit que $0.8^t p_0$ pour $t \in \mathbb{R}$ décrit le comportement de la population entre deux échantillons. Nous étudierons au chapitre 9 l'équation différentielle qui adressera le même problème de population en temps continu. La solution de cet équation sera de la forme $p_0 e^{rt}$ pour $t \in \mathbb{R}$ où p_0 est le nombre initial d'individus et r est le taux de croissance relatif. ♣

Nous sommes intéressé au comportement de la suite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ lorsque n devient de plus en plus grand. Est-ce que p_n tend vers une valeur quelconque lorsque n tend vers plus l'infini? Est-ce que p_n croît sans borne supérieure comme c'est le cas pour notre population de bactéries de l'exemple 5.8.1?

Définition 5.8.7

Soit

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

un système dynamique discret. L'**orbite** (positive) de p_0 est la suite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ où $p_1 = f(p_0)$, $p_2 = f(p_1)$, $p_3 = f(p_2)$, ...

Remarque 5.8.8

Considérons un système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si la condition initiale p_0 est donnée, alors

$$\begin{aligned} p_1 &= f(p_0) \ , \\ p_2 &= f(p_1) = f(f(p_0)) = (f \circ f)(p_0) \ , \\ p_3 &= f(p_2) = f(f(f(p_0))) = (f \circ f \circ f)(p_0) \ , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nous disons que p_1 est obtenue de p_0 par une **itération** de f , p_2 est obtenue de p_0 par deux **itérations** de f , etc.

Dans certains livres, ils utilisent la notation f^2 pour désigner $f \circ f$, f^3 pour désigner $f \circ f \circ f$, etc. C'est une autre tradition mathématique qui peut conduire à confusion. Que veut dire $f^2(p_0)$? Est-ce $f(f(p_0))$ ou $(f(p_0))^2$? Seul le contexte peut le dire. Nous n'utiliserons pas f^2 , f^3 , ... pour désigner la composition de fonctions mais le produit de fonctions comme nous avons toujours fait. ♠

Comment pouvons-nous représenter graphiquement les orbites du système dynamique

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Deux méthodes sont fréquemment utilisées.

Portrait de phases

La première méthode est de tracer le **portrait de phase** du système. Par exemple, à la figure 5.26, nous avons tracé le portrait de phase du système dynamique discret $p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ de l'exemple 5.8.1. Les flèches sont interprétées de la façon suivante. Pour toute condition initiale $p_0 > 0$, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de p_0 tend vers 0 lorsque n devient de plus en plus grand. Nous pourrions aussi vérifier que, pour toute condition initiale $p_0 < 0$, l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de p_0 tend aussi vers 0 lorsque n augmente. Mais, naturellement, quelle interprétation biologique pouvons-nous donner à un nombre négatif de bactéries?



FIGURE 5.26 – Portrait de phase du système dynamique discret $p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Graphe en forme de toile d'araignée

La deuxième méthode consiste à tracer le **graphe en forme de toile d'araignée** d'une orbite du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ce graphe donne plus d'information sur la façon dont les orbites convergent (si elles convergent). Nous retrouvons à la figure 5.27 le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) = 0.8p_n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

de l'exemple précédent pour la condition initiale $p_0 = 10^7$.

Pour tracer un tel graphe, nous commençons au point $(p_0, 0) = (10^7, 0)$ correspondant à la condition initiale.

1. Nous traçons une droite verticale à partir de $(p_0, 0)$ qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_0, p_1) où $p_1 = 0.8p_0$.
2. À partir de (p_0, p_1) , nous traçons une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (p_1, p_1) .
3. À partir de (p_1, p_1) , nous traçons une droite verticale qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_1, p_2) où $p_2 = 0.8p_1$.
4. À partir de (p_1, p_2) , nous traçons une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (p_2, p_2) .
5. À partir de (p_2, p_2) , nous traçons une droite verticale qui coupe le graphe de $y = f(x) = 0.8x$ au point (p_2, p_3) où $p_3 = 0.8p_2$.
6. Ainsi de suite.

Les points (p_n, p_n) sur la droite $y = x$ peuvent être identifiés aux points $(p_n, 0)$ et décrivent donc une orbite du système dynamique discret.

Exemple 5.8.9

Soit p_n le nombre d'unités de mille bactéries par cm^3 qui se trouvent dans un milieu n heures après le début d'une expérience. Nous observons que p_n satisfait le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En plus d'un taux de croissance de -20% , il y a 3,000 bactéries par cm^3 de plus par heure qui proviennent de l'extérieur du milieu. Le milieu expérimental est contaminé.

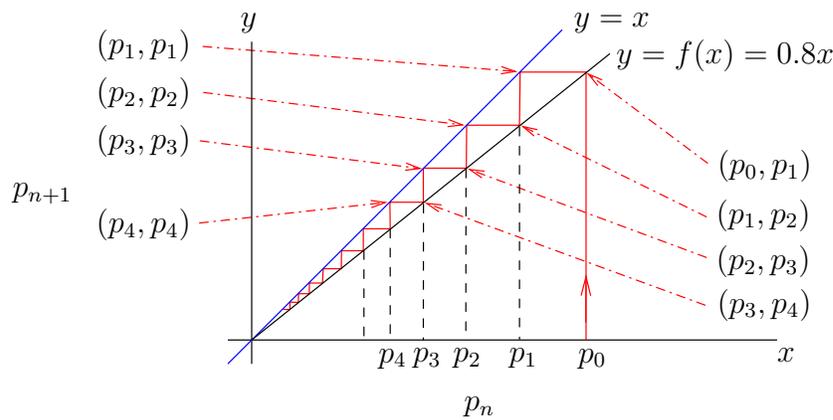


FIGURE 5.27 – Graphe en forme de toile d’araignée pour le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ avec la condition initiale $p_0 = 10^7$

La fonction itérative pour ce système dynamique discret est $f(x) = 0.8x + 3$.

Les premières valeurs de p_n sont

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.8p_0 + 3, \\ p_2 &= 0.8p_1 + 3 = 0.8(0.8p_0 + 3) + 3 = 0.8^2p_0 + 0.8 \times 3 + 3, \\ p_3 &= 0.8p_2 + 3 = 0.8(0.8^2p_0 + 0.8 \times 3 + 3) + 3 = 0.8^3p_0 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3, \\ p_4 &= 0.8p_3 + 3 = 0.8(0.8^3p_0 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3) + 3 \\ &= 0.8^4p_0 + 0.8^3 \times 3 + 0.8^2 \times 3 + 0.8 \times 3 + 3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par induction, nous trouvons

$$\begin{aligned} p_n &= 0.8^n p_0 + 3 \sum_{k=0}^{n-1} 0.8^k = 0.8^n p_0 + 3 \left(\frac{1 - 0.8^n}{1 - 0.8} \right) \\ &= 0.8^n (p_0 - 15) + 15. \end{aligned}$$

Puisque 0.8^n approche 0 lorsque n devient de plus en plus grand, nous avons que p_n approche 15 lorsque n devient de plus en plus grand.

Au tableau 5.1, nous avons calculé deux orbites, une avec la condition initiale $p_0 = 3$ et l’autre avec la condition initiale $p_0 = 25$. Les deux orbites tendent vers 15.

Le graphe de la solution $p_n = 0.8^n(p_0 - 15) + 15$ du système dynamique discret avec $p_0 = 3$ est donné à la figure 5.28.

Le graphe en forme de toile d’araignée est donné à la figure 5.29. Il confirme que toutes les orbites tendent vers 15.

Remarquons que l’orbite $\{p_n\}_{i=0}^{\infty}$ de $p_0 = 15$ pour le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

n	p_n	n	p_n
0	3	0	25
1	5.4	1	23
2	7.32	2	21.4
3	8.856	3	20.12
4	10.0848	4	19.096
5	11.06784	5	18.2768
6	11.854272	6	17.62144
7	12.4834176	7	17.097152
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
18	14.78382721789...	18	15.18014398509...
19	14.82706177431...	19	15.14411518808...
20	14.86164941945...	20	15.11529215046...
21	14.88931953556...	21	15.09223372037...
22	14.91145562845...	22	15.07378697629...
23	14.92916450276...	23	15.05902958104...
24	14.94333160221...	24	15.04722366483...

TABLE 5.1 – Deux orbites du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$. Dans le tableau de gauche, la condition initiale est $p_0 = 3$ alors que dans le tableau de droite, la condition initiale est $p_0 = 25$. Ne pas oublier que p_n est le nombre d'unités de mille bactéries par cm^3 en moyenne. Nous ne pouvons donc pas simplement ignorer les chiffres décimaux après le troisième chiffre.

est donnée par $p_n = 15$ pour tout n . Le point $p = 15$ est invariant pour la fonction itérative $y = f(x) = 0.8x + 3$ du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

C'est-à-dire, $f(15) = 15$. Les points qui satisfont cette propriété sont très importants et nous leur donnons un nom. ♣

Définition 5.8.10

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Un point p tel que $f(p) = p$ est appelé un **point fixe**, un **point d'équilibre** ou un **état d'équilibre** du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les points d'équilibre d'un système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

sont les solutions de $x = f(x)$; ce sont donc les points d'intersection de la droite $y = x$ avec le graphe de la fonction itérative f du système dynamique discret (figure 5.29).

Exemple 5.8.11

À l'exemple 5.8.9, nous pouvons montrer que pour toute condition initiale p_0 , l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

tend vers 15. C'est-à-dire que le point d'équilibre $p = 15$ possède la propriété ci-dessous. ♣

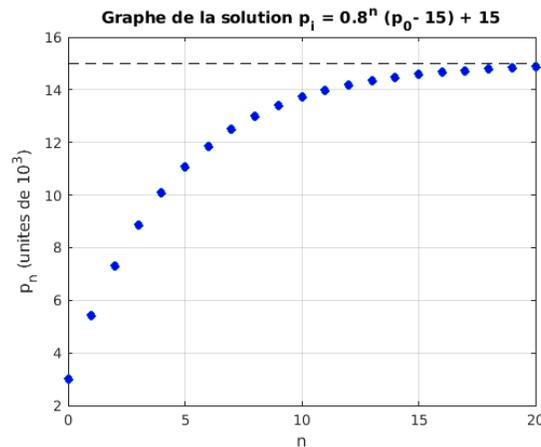


FIGURE 5.28 – Graphe de la solution $p_n = 0.8^n (p_0 - 15) + 15$ du système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ dont la condition initiale est $p_0 = 3$. Les points que nous retrouvons dans le système de coordonnées sont les points (n, p_n) pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Définition 5.8.12

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Un point d'équilibre p du système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

est **asymptotiquement stable**¹ si, quelle que soit la condition initiale p_0 près de p , l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers p .

Un point d'équilibre p du système dynamique discret est **instable** si, pour toute condition initiale p_0 assez près de p , l'orbite $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ « s'éloigne » de p .

Remarque 5.8.13

Par la suite, nous substituerons à l'occasion l'expression « asymptotiquement stable » par le mot « stable » seulement. Cela simplifie l'écriture mais entre en conflit avec la littérature spécialisée sur le sujet des systèmes dynamiques. En effet, dans la littérature spécialisée, nous disons qu'un point d'équilibre p est stable si les orbites $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ avec la condition initiale p_0 suffisamment près de p « ne s'éloignent pas » de p . Il est possible que ces orbites n'approchent pas p mais seulement demeurent dans le voisinage de p . ♠

Considérons un système dynamique discret

$$p_{n+1} = f(p_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

1. La définition de stabilité asymptotique que nous donnons n'est pas exactement la définition de stabilité asymptotique que nous retrouvons dans les ouvrages spécialisés sur ce sujet mais elle sera suffisante pour les problèmes que nous étudierons.

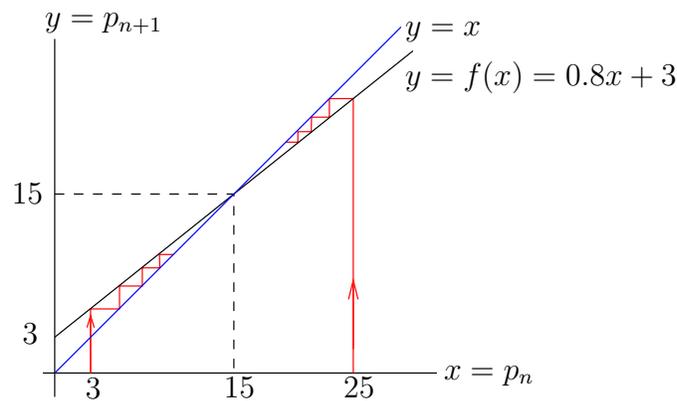


FIGURE 5.29 – Le graphe en forme de toile d’araignée pour le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.8p_n + 3$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

où la fonction itérative f est une fonction affine

$$y = f(x) = \alpha x + \beta .$$

L’existence d’un point fixe p pour ce système dynamique discret nous fournit une autre méthode pour trouver la solution du système dynamique discret.

Puisque $f(p) = p$, nous avons

$$p_{n+1} - p = f(p_n) - f(p) = (\alpha p_n + \beta) - (\alpha p + \beta) = \alpha(p_n - p)$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$ Ainsi,

$$\begin{aligned} p_1 - p &= \alpha(p_0 - p) , \\ p_2 - p &= \alpha(p_1 - p) = \alpha^2(p_0 - p) , \\ p_3 - p &= \alpha(p_2 - p) = \alpha^3(p_0 - p) , \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ p_n - p &= \alpha^n(p_0 - p) , \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le résultat suivant.

Proposition 5.8.14

La **solution générale** du système dynamique discret

$$p_{n+1} = \alpha p_n + \beta \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

est $p_n = \alpha^n(p_0 - p) + p$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, où p est le point d’équilibre du système.

Si le système dynamique discret n'a pas de point d'équilibre (i.e. $\alpha = 1$), la solution est $p_n = p_0 + n\beta$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Exemple 5.8.15

Puisque $p = 15$ est un point fixe du système dynamique discret

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 3 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

la solution générale est $p_n = 0.8^n(p_0 - 15) + 15$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ comme nous avons trouvée précédemment. ♣

Exemple 5.8.16

Supposons que le nombre de bactéries dans un milieu donné satisfasse un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = \alpha p_n + \beta$ et que le nombre initial de bactéries est de 2,500 bactéries par cm^3 . Si le nombre de bactéries après une heure est de 2,750 bactéries par cm^3 et qu'il est de 3,125 bactéries par cm^3 après deux heures, déterminons α et β . Trouvons les points d'équilibre du système dynamique discret que vous avez obtenu s'il y en a et déterminons leur stabilité. Finalement, donnons la solution générale.

Nous cherchons un système dynamique discret de la forme

$$p_{n+1} = \alpha p_n + \beta \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nous déduisons le système d'équations linéaires suivant pour α et β à partir de $p_0 = 2,500$, $p_1 = 2,750$ et $p_2 = 3,125$.

$$\begin{aligned} p_1 = \alpha p_0 + \beta &\Rightarrow 2,750 = \alpha 2,500 + \beta \\ p_2 = \alpha p_1 + \beta &\Rightarrow 3,125 = \alpha 2,750 + \beta \end{aligned}$$

Si nous soustrayons la première équation de la deuxième équation, nous trouvons

$$\alpha = \frac{3,125 - 2,750}{2,750 - 2,500} = 1.5 .$$

Si nous remplaçons α par 1.5 dans la première équation, nous trouvons

$$\beta = 2,750 - 1.5 \times 2,500 = -1,000 .$$

Le système dynamique discret cherché est donc

$$p_{n+1} = 1.5p_n - 1,000 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les points d'équilibre p sont les solutions de $p = 1.5p - 1,000$. Nous trouvons $p = 2,000$ bactéries par cm^3 . La solution générale est $p_n = 1.5^n(p_0 - 2,000) + 2,000$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dans le cas présent, $p_0 = 2,500$ bactéries par cm^3 . La solution particulière est donc $p_n = 500 \times 1.5^n + 2,000$. Du point de vue mathématique et biologique, il y a un point fixe qui est instable (vérifier avec un graphe en forme de toile d'araignée). Indépendamment de la condition initiale $p_0 > 2,000$, la population va croître sans borne supérieure. Pour $p_0 < 2,000$, nous pouvons considérer que la population de bactéries va disparaître. ♣

5.8.1 Équation logistique

Dans les exemples précédents, nous avons supposé que les populations de bactéries étaient décrites par un système dynamique discret de la forme

$$p_{n+1} = f(p_n) = rp_n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8.2)$$

où r était le taux de croissance relative de la population (on ignore les systèmes de la forme $p_{n+1} = rp_n + q$ qui peuvent être considérés comme des perturbations du systèmes de la forme $p_{n+1} = rp_n$). Nous avons vu que $p_n = r^n p_0$ et donc que le nombre de bactéries tend vers plus l'infini si $r > 1$ et vers 0 si $0 < r < 1$. Cela n'est naturellement pas toujours réaliste.

Modifions le système dynamique discret en (5.8.2) pour mieux décrire la croissance du nombre de bactéries. Pour ce faire, supposons qu'un milieu borné puisse supporter au plus M bactéries (une limite imposée par la quantité de nourriture présente, l'espace occupé, ...). Le taux de croissance doit donc diminuer avec le temps pour garder le nombre de bactéries en deçà de M .

Considérons le système dynamique discret

$$p_{n+1} = r p_n \left(1 - \frac{p_n}{M}\right) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8.3)$$

où le facteur $\left(1 - \frac{p_n}{M}\right)$ devient de plus en plus petit lorsque le nombre de bactérie $p_n < M$ approche le nombre maximal de bactéries M que le milieu peut supporter.

Dans la littérature, ce n'est pas le nombre total de bactéries dans le milieu qui est considéré mais la fraction p_n/M représentant le nombre de bactéries présent par rapport au nombre maximal de bactéries que le milieu peut supporter. Si nous divisons les deux côtés de (5.8.3) par M , nous obtenons

$$\frac{p_{n+1}}{M} = r \frac{p_n}{M} \left(1 - \frac{p_n}{M}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si nous posons $x_n = p_n/M$ pour tout n , nous obtenons l'équation suivante.

Définition 5.8.17

L'équation logistique est le système dynamique discret de la forme

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8.4)$$

Pour l'équation logistique, la fonction itérative est $f(x) = rx(1 - x)$.

Nous donnons aux tableaux 5.2 plusieurs valeurs de x_n lorsque $r = 1.1$. La fraction initiale de bactéries est $x_0 = 0.4$ pour le tableau de gauche et $x_0 = 0.9$ pour le tableau de droite.

Dans les deux cas, la fraction de la population maximale tend lentement vers $0.\overline{09} = 1/11$. Pour l'équation logistique $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f(x) = rx(1 - x)$ avec $r = 1.1$, le point $p = 1/11$

n	x_n	n	x_n
0	0.4000000000...	0	0.9000000000...
1	0.2640000000...	1	0.0990000000...
2	0.2137344000...	2	0.0981189000...
3	0.18485720688...	3	0.09734073961...
4	0.16575352194...	4	0.09665207202...
5	0.15210722110...	5	0.09604149390...
6	0.14186767582...	6	0.09549927788...
7	0.13391536222...	7	0.09501708239...
⋮	⋮	⋮	⋮
49	0.09124508294...	49	0.09095594351...
50	0.09121135955...	50	0.09095125583...
⋮	⋮	⋮	⋮
199	0.090909090955...	99	0.09090933224...
200	0.090909090950...	100	0.09090930811...
⋮	⋮	⋮	⋮
1999	0.09090909091...	1999	0.09090909091...
2000	0.09090909091...	2000	0.09090909091...
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE 5.2 – Deux orbites de l'équation logistique où $r = 1.1$. Dans le tableau de gauche, la condition initiale est $x_0 = 0.4$ alors que dans le tableau de droite, la condition initiale est $x_0 = 0.9$.

est un point d'équilibre car $f(p) = p$. Ainsi, si la fraction de la population maximale est $1/11$, cette fraction sera encore $1/11$ après une heure, deux heures, etc. La fraction de la population maximale ne changera pas. La population a atteint un état d'équilibre.

La population de bactéries ne disparaît pas mais approche un état d'équilibre de $1/11$ de la population maximale que le milieu peut supporter. Nous pourrions choisir d'autres valeurs initiales pour x_0 mais, dans tous les cas, la suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tendra vers l'état d'équilibre $1/11$ qui représente la fraction de la population maximale que le milieu peut supporter.

Comment pouvons-nous expliquer ce phénomène? Qu'arrivera-t-il si nous changeons la valeur du paramètre r représentant le taux de croissance relative sans contraintes du milieu?

Avant de répondre à ces questions, et à bien d'autres qui seront soulevées plus loin, il est utile de revoir les deux façons que nous avons de représenter les orbites d'un système dynamique discret.

Portrait de phases

Pour décrire le comportement du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1.1x_n(1 - x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

nous utilisons le portrait de phase donné à la figure 5.30. Les flèches sont interprétées de la façon suivante. Pour une condition initiale x_0 entre 0 et $p = 1/11$, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend vers p . De même, pour une condition initiale x_0 entre $p = 1/11$ et 1, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tend aussi vers p .



FIGURE 5.30 – Portrait de phase du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n) = 1.1x_n(1 - x_n)$.

Nous déduisons du portrait de phase que le point d'équilibre $p = 1/11$ est asymptotiquement stable.

Graphe en forme de toile d'araignée

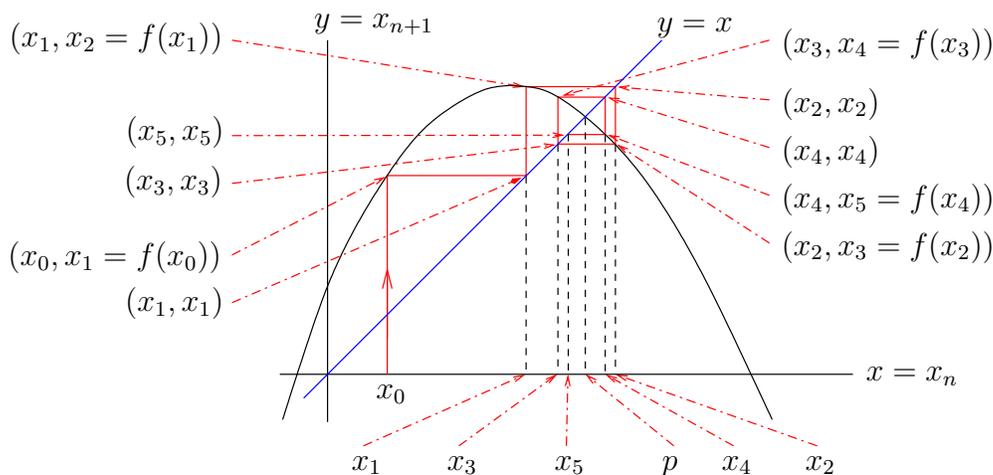


FIGURE 5.31 – Graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$ avec $r = 2.3$. p est un point fixe.

Une autre façon de représenter les orbites du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1.1x_n(1 - x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

est avec le graphe en forme de toile d'araignée que nous retrouvons à la figure 5.31. Pour tracer un tel graphe, nous commençons au point $(x_0, 0)$ correspondant à la condition initiale.

1. Nous traçons une droite verticale à partir de $(x_0, 0)$ qui coupe le graphe de f au point (x_0, x_1) où $x_1 = f(x_0)$.
2. À partir de (x_0, x_1) , nous traçons une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (x_1, x_1) .
3. À partir de (x_1, x_1) , nous traçons une droite verticale qui coupe le graphe de f au point (x_1, x_2) où $x_2 = f(x_1)$.

4. À partir de (x_1, x_2) , nous traçons une droite horizontale qui coupe la droite $y = x$ au point (x_2, x_2) .
5. À partir de (x_2, x_2) , nous traçons une droite verticale qui coupe le graphe de f au point (x_2, x_3) où $x_3 = f(x_2)$.
6. Ainsi de suite.

Les points (x_n, x_n) sur la droite $y = x$ peuvent être identifiés aux points $(x_n, 0)$ et décrivent donc une orbite du système dynamique discret.

5.8.2 Étude des points d'équilibre

Les points fixes d'un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

sont les solutions de l'équation $f(x) = x$.

Exemple 5.8.18

À l'aide du graphe en forme de toile d'araignée des systèmes dynamiques discrets, nous pouvons déterminer la stabilité du point d'équilibre du système dynamique

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

où

- (i) $y = f(x) = 0.7x + 0.2$ (figure 5.32a),
- (ii) $y = f(x) = 2x - 0.6$ (figure 5.32b),
- (iii) $y = f(x) = -0.7x + 0.68$ (figure 5.32c) et
- (iv) $y = f(x) = -2x + 1.2$ (figure 5.32d).

Dans le cas (i), le point d'équilibre $p = 2/3$ est asymptotiquement stable. Il en est de même pour le point d'équilibre $p = 2/5$ dans le cas (iii). Par contre, le point d'équilibre $p = 3/5$ dans le cas (ii) et le point d'équilibre $p = 2/5$ dans le cas (iv) ne sont pas asymptotiquement stables.

Dans les cas (i) et (iii), si nous prenons la condition initiale x_0 plus petite que le point d'équilibre p (i.e. à la gauche de p) alors l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ demeure toujours à la gauche du point d'équilibre p . De même, si la condition initiale x_0 est plus grande que p (i.e. à la droite de p), alors l'orbite demeure toujours à la droite de p . Par contre, ce n'est pas se que nous observons pour les cas (ii) et (iv). En fait, que nous prenions x_0 à la droite ou à la gauche de p , l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ alterne entre la gauche et la droite de p . ♣

Les exemples précédents justifient le résultat suivant.

Proposition 5.8.19

Nous considérons le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

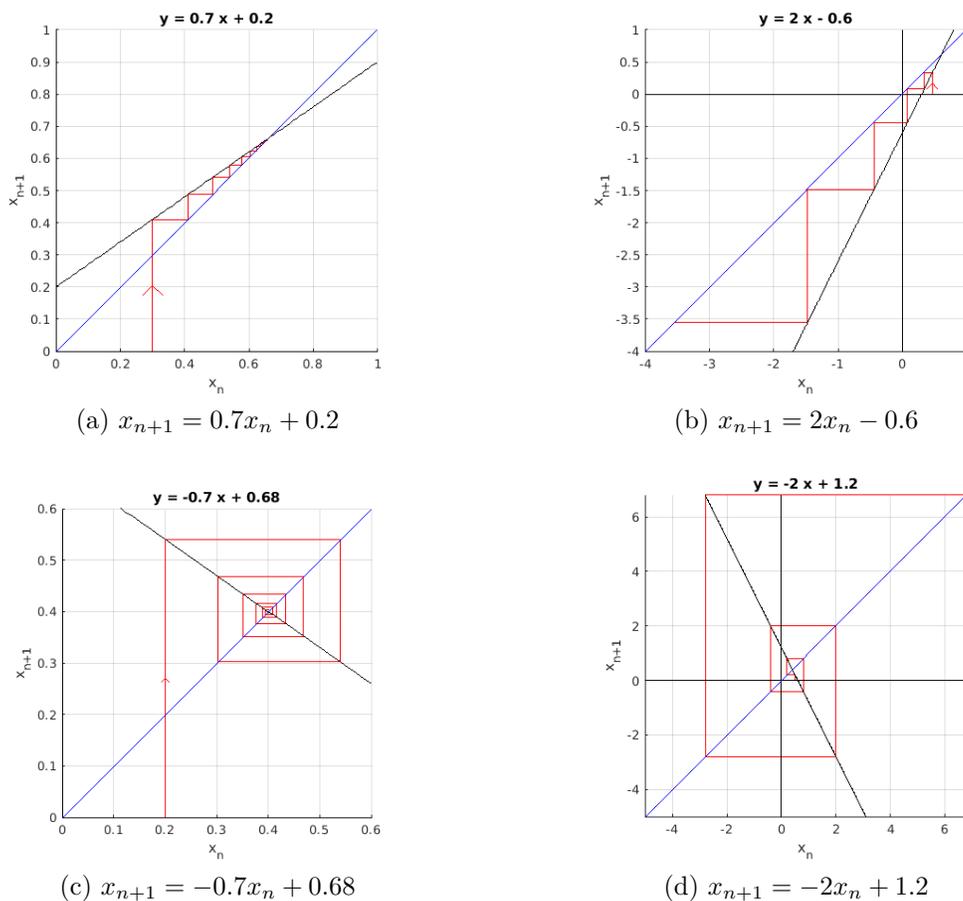


FIGURE 5.32 – (a) Le point d'équilibre $p = 2/3$ est asymptotiquement stable, Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.3$. (b) Le point d'équilibre $p = 3/5$ est instable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.47$. (c) Le point d'équilibre $p = 2/5$ est asymptotiquement stable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.2$. (d) Le point d'équilibre $p = 2/5$ est instable. Le graphique contient l'orbite pour $x_0 = 0.5$.

où la fonction itérative est $y = f(x) = mx + b$. Si p est un point d'équilibre de ce système dynamique discret alors ce point d'équilibre est asymptotiquement stable si $|m| < 1$ et instable si $|m| > 1$.

Comment pouvons-nous déterminer la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre p d'un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où f n'est pas une fonction affine ?

Supposons que p soit un point d'équilibre pour un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

où f est une fonction différentiable quelconque. Nous savons que $f(x) \approx g(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ pour x très près de p . Très près du point p , le système dynamique discret ci-dessus devrait donc se comporter comme le système dynamique discret

$$x_{n+1} = g(x_n) = f(p) + f'(p)(x_n - p) = mx_n + b \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

où $m = f'(p)$ et $b = f(p) - pf'(p)$. En se basant sur le résultat précédent pour les fonctions itératives de la forme $f(x) = mx + b$, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 5.8.20

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue. Soit p un point d'équilibre du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

Le point d'équilibre p est asymptotiquement stable si $|f'(p)| < 1$. Il est instable si $|f'(p)| > 1$. Nous ne pouvons rien conclure lorsque $|f'(p)| = 1$.

La démonstration de ce résultat, que nous donnerons prochainement, est une simple application des résultats du calcul différentiel que nous avons présentés.

Revenons à notre équation logistique

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les points d'équilibre sont les solutions de

$$rx(1 - x) = x .$$

Si $x \neq 0$, nous pouvons diviser des deux cotés de l'égalité par x pour obtenir $r(1 - x) = 1$. Ainsi, $x = 1 - 1/r$. L'équation logistique a donc deux points fixes : $x = 0$ et $x = 1 - 1/r$.

Si, comme à la section précédente, x_n est la fraction de la population maximale, le point fixe $x = 0$ est simplement le fait que s'il n'y a pas de bactéries initialement, il n'y en aura pas dans le futur. Dans le cas $r = 1.1$, nous retrouvons l'état d'équilibre $x = 1/11$ déjà observé.

Il n'est pas toujours possible de trouver algébriquement, comme nous venons de le faire pour l'équation logistique, les points d'équilibres. Nous utilisons alors des méthodes numériques comme la méthode de Newton pour estimer les points d'équilibre.

Exemple 5.8.21

Nous avons vu que $p = 1/11$ est un point d'équilibre pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où $r = 1.1$. Les orbites que nous avons calculées numériquement semblent indiquer que ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Posons $f(x) = rx(1 - x)$. Nous avons que $f'(x) = r(1 - 2x)$. Ainsi, pour $r = 1.1$ et $x = p = 1/11$, nous obtenons

$$f'(p) = 1.1 \left(1 - 2 \frac{1}{11} \right) = -0.9 .$$

Puisque $|f'(p)| < 1$, le point d'équilibre p est asymptotiquement stable. ♣

Remarque 5.8.22

Soit le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les points d'équilibre p où $|f'(p)| = 1$ sont en fait très importants. C'est une des conditions pour obtenir une **bifurcation**. Si nous supposons que f dépend d'un paramètre r (comme c'est le cas pour l'équation logistique) et que pour une valeur r_0 de r il existe un point d'équilibre p tel que $|f'(p)| = 1$, alors le comportement du système dynamique discret pour $r < r_0$ peut être très différent du comportement du système dynamique discret pour $r > r_0$ si certaines conditions génériques sont satisfaites.

Nous invitons le lecteur à tracer le graphe en forme de toile d'araignée de l'équation logistique pour des valeurs de r entre 2 et 3, et une condition initiale entre 0 et 1. Puis, de répéter cette même expérience avec des valeurs de r entre 3 et 3.447... Qu'arrive-t-il lorsque r devient plus grand que 3.447...? Quand $r = 3.839...$?

Lorsque $3 < r < 4$, le point $p = 1 - 1/r$ est toujours un point d'équilibre. Par exemple, pour $r = 13/4 = 3.25$, nous avons le point d'équilibre $p = 9/13 = 0.69230769231$. Pourquoi les orbites ne tendent-elles pas vers ce point d'équilibre?

Nous répondrons à certaines de ces questions à la prochaine section.

Le comportement des orbites de l'équation logistique lorsque r varie est fascinant. Il existe un grand nombre de livres sur ce sujet. ♠

Démonstration (Théorème 5.8.20) 👁

La démonstration qu'un point fixe p pour un système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

est asymptotiquement stable si $|f'(p)| < 1$ et instable si $|f'(p)| > 1$ repose sur le théorème de la moyenne. Nous démontrons seulement que $|f'(p)| < 1$ implique la stabilité asymptotique du point d'équilibre p et laissons aux lecteurs le soin de démontrer que $|f'(p)| > 1$ implique l'instabilité du point d'équilibre p .

Supposons que f soit une fonction différentiable dont la dérivée f' est une fonction continue. Puisque $|f'(p)|$ est strictement plus petit que 1 et f' est continue, nous pouvons trouver une constante K plus grande ou égale à $|f'(p)|$ et plus petite que 1, et une petite valeur δ telle que $|f'(x)| \leq K < 1$ pour tout x dans l'intervalle $I =]p - \delta, p + \delta[$ qui contient p .

i) Si $x_0 \in I$, alors $x_n \in I$ pour tout n .

En effet, supposons que x_n soit dans I , alors $|x_n - p| < \delta$. Grâce au théorème de la moyenne, il existe ζ entre p et x_n tel que $f(x_n) - f(p) = f'(\zeta)(x_n - p)$. Notons que $\zeta \in I$ car ζ est entre x_n et p . Ainsi,

$$|x_{n+1} - p| = |f(x_n) - f(p)| = |f'(\zeta)(x_n - p)| \leq K|x_n - p| < |x_n - p| < \delta$$

car $K < 1$. Il s'en suit que x_{n+1} est aussi dans l'intervalle I . Par induction, $x_n \in I$ pour tout n .

ii) Encore grâce au théorème de la moyenne, ils existent ζ_n entre x_n et p tels que $f(x_n) - f(p) = f'(\zeta_n)(x_n - p)$ avec $\zeta_n \in I$ car ζ_n est entre x_n et p . Nous avons donc $|f'(\zeta_n)| \leq K$ pour tout n . Ainsi,

$$\begin{aligned} |x_n - p| &= |f(x_{n-1}) - f(p)| = |f'(\zeta_{n-1})(x_{n-1} - p)| \\ &\leq K|x_{n-1} - p| = K|f(x_{n-2}) - f(p)| = K|f'(\zeta_{n-2})(x_{n-2} - p)| \\ &\leq K^2|x_{n-2} - p| \\ &\dots \\ &\leq K^n|x_0 - p|. \end{aligned}$$

iii) Nous avons donc que

$$|x_n - p| \leq K^n|x_0 - p| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = 0$$

pour $0 < K < 1$.

Toutes les orbites avec la condition initiale x_0 dans I tendent donc vers p . ■

Exemple 5.8.23

Cet exemple provient de [1].

Le nombre de poissons d'une certaine espèce est gouverné par le système dynamique discret

$$p_{n+1} = rp_n(1 - p_n) - hp_n \quad \text{pour } 0 < h < r - 1 < 2 \quad (5.8.5)$$

où p_n est le nombre de poissons au début de la n^e saison de pêche divisé par le nombre maximal de poissons que le milieu peut supporter, r est un facteur de croissance pour cette espèce de poissons et h est un facteur d'efficacité des pêcheurs. La valeur h est déterminée par le nombre de permis de pêche, l'équipement utilisé par les pêcheurs, etc. Le terme $-hp_n$ dans l'équation (5.8.5) représente la récolte à chaque année et a un effet négatif sur la croissance de la population de poissons.

Lors d'une saison de pêche, si h augmente, alors le nombre de poissons capturés par les pêcheurs augmentera. Si nous permettons une plus grande valeur pour h lors d'une saison de pêche, alors nous augmentons l'effet négatif sur la croissance de la population. Si h est trop grand, nous risquons de provoquer une diminution de la population de poissons à long terme et de mettre ainsi en danger la survie de cette espèce. À long terme, il n'y aurait plus de poissons à capturer.

Le but est donc de choisir h pour maximiser le nombre de poissons capturés lors des futures saisons de pêche. En d'autres mots, nous voulons maximiser la récolte de poissons à long terme. Cette récolte est définie comme étant le produit du facteur d'efficacité h des pêcheurs avec l'état d'équilibre stable p_h de la population de poissons associé à cette valeur h . En termes mathématiques, nous voulons maximiser $R(h) = hp_h$.

La fonction itérative pour le système dynamique discret (5.8.5) est $f(p) = rp(1-p) - hp$. Les points d'équilibre du système dynamique discret (5.8.5) sont donnés par les solutions de $p = f(p)$. Nous trouvons $p_0 = 0$ et $p_h = (r - h - 1)/r$. Le point d'équilibre p_h est positif car nous assumons $h < r - 1$.

Nous utilisons le théorème 5.8.20 pour déterminer si le point d'équilibre p_h est stable. Puisque $f'(p) = r - h - 2rp$, nous obtenons $|f'(p_h)| = |2 + h - r|$. Pour que le point d'équilibre p_h soit stable, nous devons donc exiger que

$$|f'(p_h)| = |2 + h - r| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2 + h - r < 1 \Leftrightarrow -3 + r < h < r - 1 .$$

C'est effectivement le cas pour $0 \leq h < r - 1 < 2$. Notez que $|f'(p_0)| = |r - h| > 1$ pour $h < r - 1$ et donc le point d'équilibre p_0 est instable.

Considérons la récolte à long terme $R(h) = hp_h = h(r - h - 1)/r$. Nous avons $R'(h) = (r - 2h - 1)/r$ et le seul point critique est $h = H \equiv (r - 1)/2$. Nous résumons dans le tableau suivant l'information que nous avons au sujet de la fonction R .

h	0	$0 < h < H$	H	$H < h < r - 1$	$r - 1$
$R(h)$	0	+	$(r - 1)^2/(4r)$	+	0
$R'(h)$	+	+	0	-	-
			max. local		

La récolte $R(h)$ est donc maximale pour $h = H$. L'état d'équilibre de la population de poissons pour $h = H$ est alors $p_H = (r - 1)/(2r)$. Comme nous avons démontré, le point d'équilibre p_H est stable et donc $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers ce point d'équilibre. La récolte maximale de poissons à long terme sera $R(H) = Hp_H = (r - 1)^2/(4r)$. ♣

5.8.3 Étude des orbites périodiques ☹

Exemple 5.8.24

Pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

avec $r = 3.2$, quelle que soit la condition initiale x_0 entre 0 et 1 que nous choisissons, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ne tend pas vers un point d'équilibre comme nous pouvons constater avec les données dans la colonne de gauche du tableau 5.3. Remarquons que

$$x_n = \begin{cases} 0.5130445095 \dots & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0.7994554905 \dots & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

pour n assez grand. L'orbite oscille entre ces deux valeurs. ♣

Exemple 5.8.25

Comme à l'exemple précédent, pour l'équation logistique

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

n	x_n	n	x_n
0	0.4000000000...	0	0.4000000000...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
50001	0.79945549047...	50001	0.83479261718...
50002	0.51304450953...	50002	0.47856124509...
50003	0.79945549047...	50003	0.86590511786...
50004	0.51304450953...	50004	0.40291365318...
50005	0.79945549047...	50005	0.83479261718...
50006	0.51304450953...	50006	0.47856124509...
50007	0.79945549047...	50007	0.86590511786...
50008	0.51304450953...	50008	0.40291365318...
50009	0.79945549047...	50009	0.83479261718...
50010	0.51304450953...	50010	0.47856124509...

TABLE 5.3 – Deux orbites de l'équation logistique avec la condition initiale $x_0 = 0.4$. $r = 3.2$ pour le tableau à gauche et $r = 3.47\dots$ pour le tableau de droite.

avec $r = 3.47$, l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ne tend pas vers un point d'équilibre quelle que soit la condition initiale x_0 entre 0 et 1 que nous choisissons. Cependant, à partir des données dans la colonne de droite du Tableau 5.3, nous pouvons conclure que

$$x_n = \begin{cases} 0.40291365318\dots & \text{si } n = 4k \\ 0.83479261718\dots & \text{si } n = 4k + 1 \\ 0.47856124509\dots & \text{si } n = 4k + 2 \\ 0.86590511786\dots & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

pour k assez grand. L'orbite est la répétition de ces quatre valeurs, toujours dans le même ordre. ♣

Les deux exemples précédents justifient la définition suivante.

Définition 5.8.26

Soit $f : X \rightarrow X$ avec $X \subset \mathbb{R}$. Si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ est une orbite du système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

pour laquelle il existe un entier positif k tel que $x_n = x_{n+k}$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, alors l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ est appelée une **orbite périodique** ou **solution périodique**. Les points de cette orbite sont appelés des **points périodiques** pour f .

Si k est le plus petit entier positif tel que $x_n = x_{n+k}$, alors k est la **période** de l'orbite.

Exemple 5.8.27

À l'exemple 5.8.24, $p = 0.5130445095\dots$ est un point périodique et l'orbite avec la condition initiale $x_0 = p$ est une orbite périodique de période 2 (figure 5.33a).

À l'exemple 5.8.25, $p = 0.40291365318\dots$ est un point périodique et l'orbite avec la condition initiale $x_0 = p$ est une orbite périodique de période 4 (figure 5.33b). ♣

Dans les deux exemples précédents, quelle que soit la condition initiale x_0 , l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ se comporte de plus en plus comme l'orbite périodique (figure 5.34). Nous avons donc une

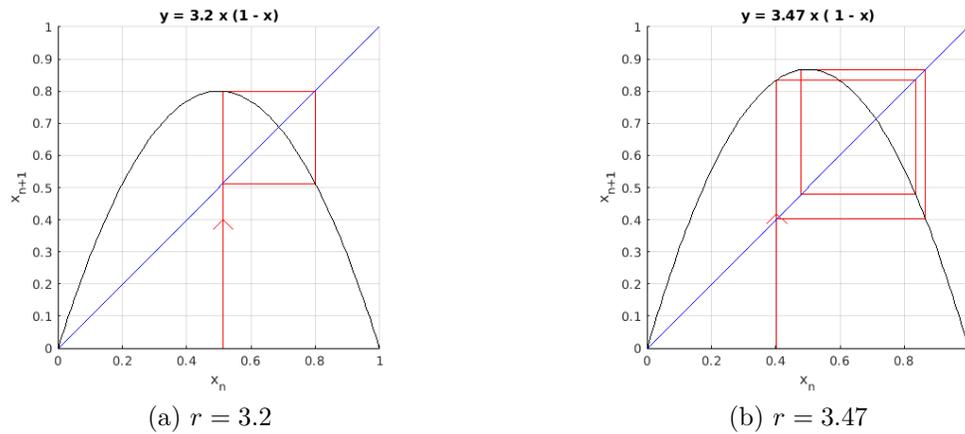


FIGURE 5.33 – (a) Orbite périodique de période 2 pour l'équation logistique avec $r = 3.2$. (b) Orbite périodique de période 4 pour l'équation logistique avec $r = 3.47$.

notion de stabilité asymptotique pour les solutions périodiques.

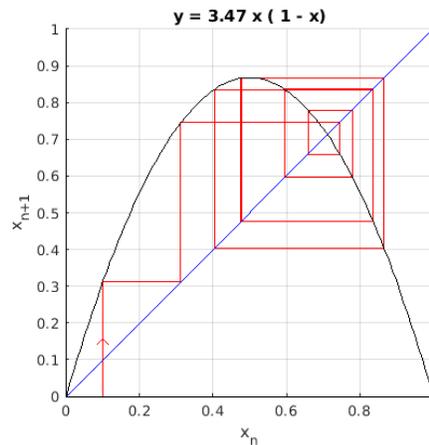


FIGURE 5.34 – Une orbite qui « converge » vers l'orbite périodique de période 4 pour l'équation logistique avec $r = 3.47$. La condition initiale est $x_0 = 0.1$

Définition 5.8.28

Soit $f : X \rightarrow X$ avec $X \subset \mathbb{R}$, et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ une orbite périodique de période k pour le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Cette orbite est **asymptotiquement stable** si p , un point quelconque de l'orbite, est

un point fixe asymptotiquement stable pour la fonction

$$g = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ copies de } f}.$$

Remarque 5.8.29

Nous invitons le lecteur à démontrer que la définition précédente est indépendante du choix du point périodique p de l'orbite. ♠

Le lecteur peut utiliser l'application qui se trouve sur le site https://mysite.science.uottawa.ca/bdionne/math_stat/fractal/fractal3_en.html pour explorer le comportement des orbites de l'équation logistique de la définition 5.8.17 lorsque r varie.

5.9 Exercices

5.9.1 Dérivées d'ordres supérieures

Question 5.1

Calculez la dérivée première et seconde des fonctions suivantes.

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $h(y) = y^{10} - y^9$ | b) $f(x) = \frac{3+x}{2x}$ | c) $f(x) = x^2 e^x$ |
| d) $f(x) = \frac{1+x}{e^x}$ | e) $g(z) = (z+4) \ln(z)$ | f) $F(w) = e^w \ln(w)$ |
| g) $f(x) = \ln(x^7)$ | h) $f(z) = \frac{1+e^{-z}}{1+e^z}$ | i) $F(y) = \frac{\ln(y)}{e^y}$ |
| j) $f(x) = 1 + x^{4/5}$ | k) $f(x) = \frac{2+x^3}{1+x^2}$ | |

Question 5.2 🌲 🔧

Si $H(\theta) = \theta \sin(\theta)$, évaluez $H'(\theta)$ et $H''(\theta)$.

Question 5.3

Nous laissons tomber un objet d'une hauteur de 100 m sur Jupiter. Nous assumons qu'il n'y a pas de friction sur l'objet. L'accélération dû à la gravité de Jupiter est $g = 22.88$ m/s². Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet frappe le sol? À quel vitesse l'objet frappe-t-il le sol?

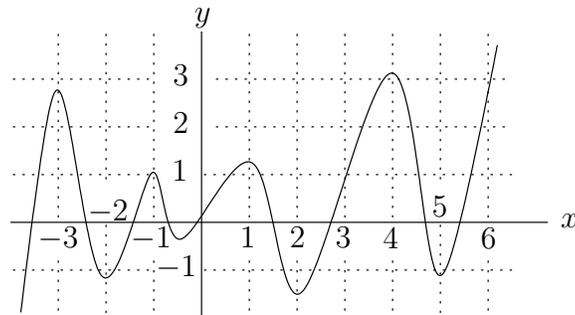
Question 5.4

Sur Jupiter, nous lançons un objet vers le haut à une vitesse de 10 m/s à partir d'une hauteur de 100 m. Nous assumons qu'il n'y a pas de friction sur l'objet. L'accélération dû à la gravité de Jupiter est $g = 22.88$ m/s². Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet atteigne sa plus grande distance du sol? Quelle est la hauteur de l'objet à ce moment? Combien de temps s'écoule-t-il avant que l'objet frappe le sol? À quel vitesse l'objet frappe-t-il le sol?

5.9.2 Graphes de fonctions

Question 5.5

Le graphe d'une fonction f est donné ci-dessous.



- Donnez les point critiques.
- Donnez les valeurs de x où $f'(x) > 0$.
- Donnez les valeurs de x où $f'(x) < 0$.
- Donnez les valeurs de x où $f''(x) > 0$.
- Donnez les valeurs de x où $f''(x) < 0$.

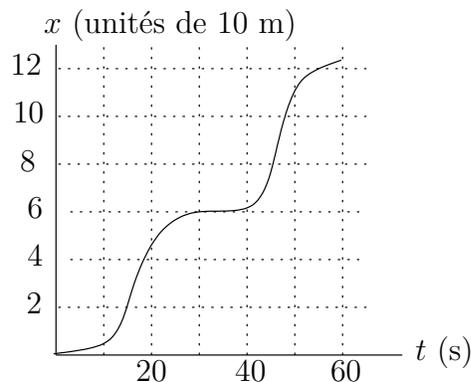
Question 5.6

Dessinez le graphe d'une fonction qui possède les propriétés suivantes :

- Une fonction positive qui possède une dérivée strictement croissante.
- Une fonction avec une dérivée négative et strictement croissante.

Question 5.7

Le graphe suivant représente la position x d'une voiture dans les montagnes russes (i.e. « roller coaster ») en fonction du temps. À quelles moments la voiture se déplace-t-elle le plus rapidement ? À quelles moments la voiture accélère-t-elle le plus rapidement ? À quelles moments la voiture décélère-t-elle le plus rapidement ? Expliquez votre réponse.



Question 5.8

La position vertical d'un objet à partir du sol est décrite par la fonction $p(t) = -5.2t^2 - 2t + 50$. Supposons que la direction positive soit vers le haut. Cette équation n'est pas valide sur la

terre mais sur une planète plus lourde que la terre. La position est donnée en mètres et le temps en secondes.

- Trouvez la vitesse et l'accélération de l'objet en fonction du temps.
- Tracez le graphe de la position en fonction du temps à l'aide des résultats en (a).
- Si l'objet part du haut d'une tour, quelle est la hauteur de la tour ? Dans quelle direction et à quelle vitesse avons-nous lancé (si nous avons lancé) l'objet, vers le haut ou vers le bas ? Quelle est l'accélération dû à la gravité sur cette planète ?

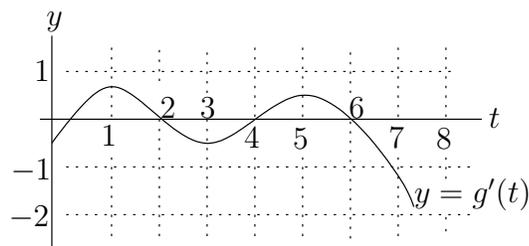
Question 5.9

Dans son nouveau programme d'exploration des objets célestes, la NASA utilise des sondes spatiales inhabitées. Une expérience conduite par une sonde se trouvant à 100 m au dessus de la lune Deimos de mars consistait à lancer vers le haut un objet à une vitesse de 5 m/s pour analyser sa trajectoire. L'accélération dû à la gravité est de $2.15 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ sur cette lune.

- Trouvez la vitesse et la position de l'objet en fonction du temps.
- Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
- Combien de temps faut-il à l'objet pour revenir à la hauteur de départ ? Quelle est la vitesse de l'objet à ce moment ?
- Combien de temps faut-il à l'objet pour atteindre le sol de la lune ? Quelle est la vitesse de l'objet à ce moment ?
- Tracez le graphe de la vitesse et de la position de l'objet en fonction du temps.

Question 5.10

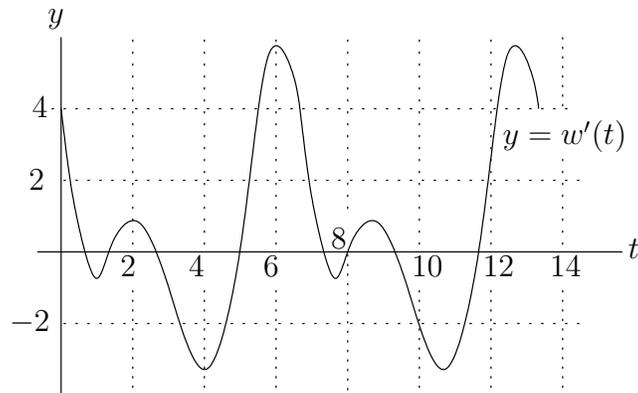
Le graphe de g' est donné ci-dessous.



Si $g(0) = 2$, tracez un graphe possible pour g . Soyez aussi précis que possible.

Question 5.11

Utilisez le graphe du taux de variation instantané de la fonction w qui est donné ci-dessous pour tracer le graphe de la fonction w si $w(0) = 1$.

**Question 5.12** 🌲

Le volume de déchets au temps t produit par deux villes est donnée par $V_a(t) = t^2 - 3t + 16$ pour la ville A et $V_b(t) = 20 + 3t$ pour la ville B . Le volume est mesuré en m^3 et le temps t est mesuré en années. Si les déchets contiennent $\rho(t) = 1.2 - 0.1t$ g/m^3 d'un certain produit toxique au temps t , répondre aux questions suivantes.

- Exprimez la masse du produit toxique en fonction du temps.
- Exprimez le taux de variation de la masse en fonction du temps.
- À l'aide du taux de variation calculé en (b), tracez le graphe de la masse en fonction du temps pour $t \geq 0$. Est-ce que les efforts des deux villes d'éliminer le produit toxique de leurs déchets sont encourageants au départ ?

Question 5.13 🌲

La masse d'une culture en fonction du temps est donnée par $M(t) = 1 + t^2$ et le volume en fonction du temps est donné par $V(t) = 1 + t$. La masse est mesurée en grammes, le volume en cm^3 et le temps en jours.

- Exprimez la densité en fonction du temps.
- Calculez la dérivée de la densité.
- Pour quelles valeurs de t a-t-on que la densité est strictement croissante ?
- À l'aide de la dérivée calculée en (b), tracez le graphe de la densité en fonction du temps.

Question 5.14 🌲

En l'absence d'influences externes, la croissance annuelle d'une population dépend seulement de la production annuelle moyenne par individu. Supposons que la production annuelle moyenne par individu lorsqu'il y a p individus soit donnée par $f(p) = 2 \left(1 - \frac{p}{1000}\right)$.

- Exprimez la taille T de la population (i.e. nombre d'individus) après un an en fonction de la taille de la population au début de l'année.
- Calculez la dérivée de T par rapport à la population initiale p .
- À l'aide de la dérivée calculée en (b), tracez le graphe de T pour $0 < p < 1000$.

Question 5.15

Soit f une fonction continue qui satisfait :

- $f'(x) > 0$ si $-2 < x < 1$,

- b) $f'(x) = 0$ si $x = -2$ ou $x = 1$,
 c) $f'(x) < 0$ si $x > 1$ ou $x < -2$, et
 d) $f(x) > 0$ pour tout x .

Tracez (de façon approximative) le graphe de cette fonction. Expliquez en une phrase le sens graphique des énoncés.

Question 5.16

Trouvez les points où la fonction $f(x) = \frac{e^{2x^2}}{x}$ possède un minimum ou un maximum local.

Question 5.17

Soit $f(x) = x\sqrt{5-x}$ pour $x < 5$. Répondre aux questions suivantes.

- a) Trouvez les intervalles où la fonction f est strictement croissante et décroissante.
 b) Trouvez les points où la fonction f a des maximums et minimums locaux et calculez la valeur de ces maximums et minimums locaux.
 c) Trouvez les intervalles de concavité et les points d'inflexion.
 d) Utilisez l'information obtenue précédemment pour tracer le graphe de f .

Question 5.18

Soit $f(x) = x - 2\sin(x)$ pour $0 < x < 3\pi$. Répondre aux questions suivantes.

- a) Trouvez les intervalles où la fonction f est strictement croissante et décroissante.
 b) Trouvez les points où la fonction f a des maximums et minimums locaux et calculez la valeur de ces maximums et minimums locaux.
 c) Trouvez les intervalles de concavité et les points d'inflexion.
 d) Utilisez l'information obtenue précédemment pour tracer le graphe de f .

Question 5.19

Tracez un graphe de $y = f(x)$ en utilisant les données suivantes.

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < x_4$	x_4	$x > x_4$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-

Question 5.20 4 points

Nous considérons la fonction f qui possède les propriétés suivantes :

- f est une fonction continue sur son domaine ;
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty$;
 - $f(x)$ n'est pas définie en $x = 3$;
 - $f'(x)$ n'est pas définie en $x = 1$;
 - $f'(x) < 0$ pour $x < 1$, $2 < x < 3$ et $3 < x < 4$;
 - $f'(x) > 0$ pour $1 < x < 2$ et $x > 4$;
 - $f''(x) < 0$ pour $x < 3$, $x \neq 1$;
 - $f''(x) > 0$ pour $x > 3$.
- a) Donnez le domaine de f .
 b) Déterminez les intervalles où f est croissante et où f est décroissante.
 c) Déterminez les intervalles où f est convexe et où f est concave.

d) Tracez le graphe de f en prenant soin d'indiquer les points critiques, asymptotes, point d'inflexions, ...

Question 5.21

Pour chacune des fonctions ci-dessous, utilisez l'information fourni par la dérivée première et seconde pour tracer son graphe. Bien indiquer où la fonction est strictement croissante et décroissante, où la fonction est concave et convexe, les maximums et minimums locaux, les points d'inflexions, les asymptotes horizontales et verticales, etc.

a) $h(x) = x^3 - 3x + 3$

c) $f(x) = x + 4/x^2$

e) $g(z) = \frac{e^z}{z^2}$

g) $T(t) = (1 - t^2)e^t, -1 \leq t \leq 1$

i) $f(x) = \frac{x^3}{1 + x^3}$

k) $f(x) = (x + 4)e^{-x}$

m) $f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$

o) $f(x) = x \ln(x)$

b) $h(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 3$

d) $f(x) = (1 - x)e^x$

f) $F(z) = z^3/e^z$

h) $G(x) = \sqrt{x} e^{-x}, x \geq 0$

j) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$

l) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{6}{x^3}$

n) $f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$

Question 5.22 🌲 🔧

Pour chacune des fonctions ci-dessous, utilisez l'information fourni par la dérivée première et seconde pour tracer son graphe. Bien indiquer où la fonction est strictement croissante et décroissante, où la fonction est concave et convexe, les maximums et minimums locaux, les points d'inflexions, les asymptotes horizontales et verticales, etc.

a) $y = \sin^2(x) - 2 \cos(x)$

b) $f(\theta) = \theta + 3 \cos(\theta), 0 \leq \theta \leq 4\pi$

c) $h(t) = e^{-t} \sin(t), 0 \leq t \leq 4\pi$

5.9.3 Optimisation

Question 5.23 🌲

Le nombre de bactéries dans un milieu riche en substances nutritives est décrit par

$$N(t) = 5000 + \frac{30000t}{100 + t^2}$$

où t est le temps. Trouvez le nombre maximal de bactéries que nous pourrions observer (i.e. trouvez le maximum absolu pour $t \geq 0$).

Question 5.24 🌲

Nous considérons une espèce d'oiseaux dont le rapport P du nombre moyen de poussins qui survivent en fonction du nombre x d'oeufs pondus est donné par la fonction $P(x) = 1/(1 + 0.5x^2)$. Le nombre total de poussins qui survivent en fonction du nombre d'oeufs

pondus est donc donné par $S(x) = xP(x)$. Trouvez le nombre de poussins qui survivent si un oiseau de cette espèce pond 5, 10 et 20 oeufs. Tracez le graphe de S . Quelle est la meilleure stratégie pour cette espèce d'oiseaux ? C'est-à-dire, combien d'oeufs devrait pondre un oiseau de cette espèce pour avoir le plus grand nombre possible de poussins qui survivent.

Dans ce problème, il faut comprendre que les valeurs de S sont des moyennes pour l'espèce d'oiseaux. C'est pour cela que S peut être un nombre réel ; S n'est pas obligé d'être un entier. Un oiseau ne peut pas avoir 2.5 poussins mais une population peut avoir en moyenne 2.5 poussins par individu.

Question 5.25

À un prix de \$50.00 l'unité, un jardinier peut vendre 100 pommiers. S'il augmente le prix par unité de \$1.00, il va vendre 4 pommiers de moins. De même, s'il baisse le prix de \$1.00, il va vendre 4 pommiers de plus. Le coût de production d'un pommier est de \$9.00. Calculer le prix par pommier qui maximise le profit du jardinier. **Ne pas oublier** d'expliquer pourquoi votre réponse donne un maximum absolu.

Question 5.26

Les questions suivantes font référence à une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Tracez un graphe pour f si f a un maximum absolu et un minimum absolu entre a et b .
- Tracez un graphe pour f si f est une fonction différentiable qui a un maximum absolu à $x = a$, un minimum absolu à $x = b$ et aucun point critique. Décrire en une phrase cette fonction.
- Tracez un graphe pour f si f a un maximum absolu et un minimum absolu entre a et b , et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ où la dérivée existe.

Question 5.27

Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouvez le maximum absolu et le minimum absolu sur l'intervalle donné.

- $f(x) = 2 + xe^{-x}$, $0.5 \leq x \leq 2$
- $f(x) = x^3 - 3x$, $-2 \leq x \leq 2$
- $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$, $-2 \leq x \leq 0$
- $f(x) = 5x(1 - x)(2 - x) - 1$, $0 \leq x \leq 1$
- $f(x) = x^{1/2}(x - 4)^2$, $0.5 \leq x \leq 6$

Question 5.28

Trouvez le maximum absolu et le minimum absolu de $F(x) = |1 - x|$ pour $-2 \leq x \leq 3$.

Question 5.29

Tracez le graphe de $g(y) = y/(1 + y^2)$ pour $0 \leq y \leq 2$ à l'aide de la dérivée première et de la dérivée deuxième de g .

- Donnez les points où il y a un maximum ou minimum local.
- Donnez les points où il y a un maximum absolu et donnez ce maximum.
- De même, donnez les points où il y a un minimum absolu et donnez ce minimum.

Question 5.30

Trouvez le point de la droite $y = 4x + 7$ qui est le plus près de l'origine.

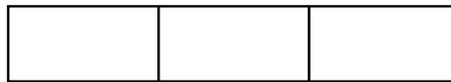
Question 5.31

L'aire d'un rectangle dont les côtés sont de longueurs x et y est $A = xy$. Le périmètre de ce rectangle est $P = 2x + 2y$.

- Minimisez P si A est fixe.
- Maximisez A si P est fixe.

Question 5.32

Nous voulons construire un enclos pour faire l'élevage de faisans. l'enclos doit être rectangulaire et doit être partagé en trois sections de même aire comme dans l'illustration ci-dessous. Si nous avons 3 600 m de clôture pour construire l'enclos. Quelles sont les dimensions du plus grand enclos que nous puissions construire ? Quelle est alors l'aire de chacune des sections ?

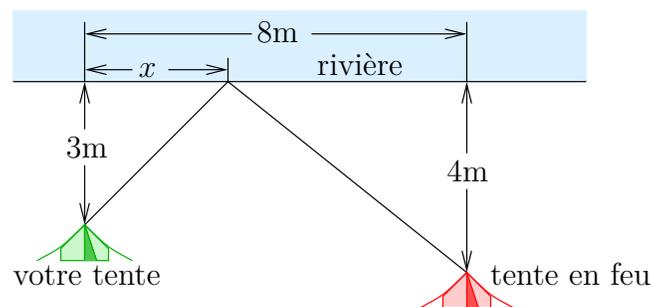
**Question 5.33**

Trouvez les dimensions x et y de la section transversale d'une poutre de bois découpée d'un tronc d'arbre (circulaire) de 30 cm de rayon pour que la section transversale soit d'aire maximale.

Suggestion : cela revient à trouver le rectangle d'aire maximale qui peut être inscrit dans un cercle ayant un diamètre de 30 cm.

Question 5.34

Vous campez à trois mètres de la rive d'une rivière. Vous remarquez qu'une tente à quatre mètres de la rive vient de prendre feu. Immédiatement, vous prenez une chaudière à l'intérieur de votre tente (vous êtes une personne prévoyant qui amène toujours une chaudière en camping), courez à la rivière pour remplir votre chaudière, et allez à la tente pour éteindre le feu. Quelle position x le long de la rivière minimisera la distance à parcourir (et donc minimisera le temps d'intervention) ?

**Question 5.35**

Une clôture de 2 m de haut longe un immeuble à 1 m de celui-ci sur toute sa longueur. Quelle est la longueur minimal de l'échelle qui passe par dessus la clôture et s'appuie contre le mur de cet immeuble ?

Question 5.36 🌲

Pour augmenter leur chance de survie, les animaux tentent de maximiser le rapport entre

la quantité de nourriture qu'ils récoltent et le risque pour acquérir cette nourriture. Par exemple, les fleurs qui produisent une grande quantité de nectar permettent aux abeilles de récolter une grande quantité de nectar mais ces fleurs attirent aussi d'autres animaux qui sont des prédateurs pour les abeilles. Chaque espèce de fleurs produit une quantité (moyenne) q de nectar (en grammes). Si, pour une espèce de fleurs qui produit q g de nectar, $P(q)$ est le nombre de prédateurs pour les abeilles qui sont attirés par ces fleurs, alors les abeilles doivent maximiser $\frac{q}{P(q)}$ pour déterminer quelle espèce de fleurs elles doivent privilégier. Si $P(q) = 1 + q^2$, trouvez la valeur de q qui maximise le rapport $\frac{q}{P(q)}$.

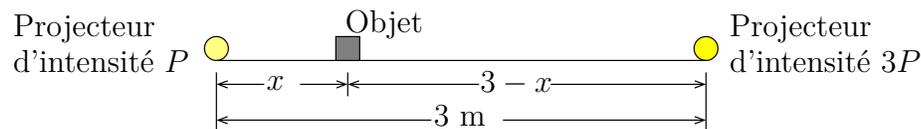
Question 5.37 🔧

Un cylindre circulaire droit est inscrit dans une sphère de rayon r . Trouvez l'aire maximal que peut avoir la surface du cylindre.

Note : Un problème un peu plus facile (que vous devriez résoudre) est de trouver le cylindre de volume maximal qui peut être inscrit dans la sphère de rayon r .

Question 5.38 🔧

Un objet est éclairé par deux projecteurs. La distance entre les projecteurs est de 3 m et l'objet est entre les deux projecteurs. Un des projecteurs est de puissance P W alors que l'autre est trois fois plus puissant.



Déterminez la position de l'objet pour que l'illumination sur l'objet soit maximale.

Il faut savoir que l'illumination d'une source lumineuse sur un objet est proportionnel à la puissance de la source lumineuse divisée par le carré de la distance entre la source lumineuse et l'objet.

Question 5.39 🌳

Considérons le problème des abeilles qui butinent que nous retrouvons à l'exemple 5.2.9. Soit t le temps qu'une abeille passe sur une fleur à aspirer du nectar. Si $F(t) = \frac{t}{0.5 + t}$ et si $t = T = 1$ est le temps optimal pour maximiser la récolte de nectar durant une journée, déterminez le temps τ que prend l'abeille pour se rendre d'une fleur à une autre fleur ? Illustrez τ à l'aide d'un graphe comme celui qui est donné à la figure 5.14 des notes.

Question 5.40 🌳

Considérons le problème des abeilles qui butinent que nous retrouvons à l'exemple 5.2.9. Soit t le temps qu'une abeille passe sur une fleur à aspirer du nectar. Si $F(t) = \frac{t^2}{1 + t^2}$ et $\tau = 1$, déterminez le temps optimal $t = T$ pour maximiser la récolte de nectar. Il faut répéter l'exemple 5.2.9 avec cette nouvelle fonction F pour trouver T . Illustrez la règle des valeurs marginales comme il est fait à la figure 5.14.

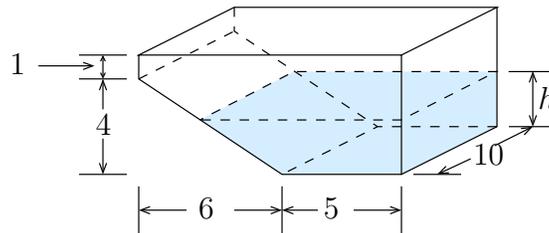
5.9.4 Taux liés

Question 5.41

Nous tirons un bateau vers le quai avec une corde attachée à la proue du bateau et qui passe par une poulie placée au bord du quai. Le quai a 2 m de haut. Si la corde est tirée à une vitesse constante de 0.5 m/s, à quelle vitesse le bateau s'approche-t-il du quai lorsqu'il est à 6 m du quai? Est-ce que la vitesse à laquelle le bateau approche le quai est constante?

Question 5.42

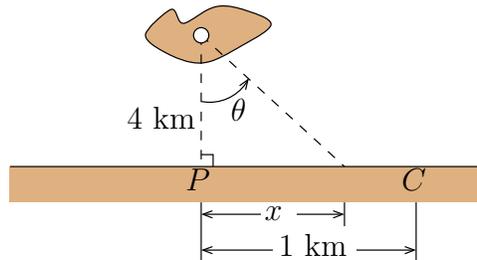
Considérons la piscine suivante.



Les dimensions de la piscine sont en mètres. Nous remplissons cette piscine à l'aide d'une pompe dont le débit est de $0.1 \text{ m}^3/\text{min}$. À quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il lorsque la profondeur de l'eau à l'endroit le plus profond est de 3 m?

Question 5.43

La lampe d'un phare situé sur une petite île fait 5 révolutions par minute. Le point P de la côte qui est le plus près de l'île est à une distance de 4 km de celle-ci.



À quelle vitesse (tangentielle) le rayon lumineux du phare balaye-t-il la côte au point C qui se trouve à 1 km du point P .

5.9.5 Dérivées implicites

Question 5.44

La fonction f satisfait la relation $(f(x))^4 + 6f(x) = x^2 + 6$. Si $f(3) = 1$, quelle est la valeur de $f'(3)$?

Question 5.45

Utilisez la dérivée implicite pour calculer la dérivée de la fonction y qui est définie implicitement dans chacune des équations suivantes.

- a) $x^2y + xy^2 = 3x$ b) $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ c) $xy^4 + x^2y = x + 3y$
 d) $ye^y = x^2e^x$

5.9.6 Approximation locale des fonctions

Question 5.46

Utilisez une approximation linéaire pour estimer chacune des valeurs suivantes.

- a) 1.002^{2001} b) $\sin(0.02)$

Question 5.47

Soit $f(x) = x^2$. Utilisez une approximation linéaire pour estimer la valeur de la fonction au point $x = 1.1$ et au point $x = 0.9$. Tracez le graphe de la fonction et le graphe de l'approximation linéaire considérée. Est-ce que l'approximation linéaire surestime ou sous-estime la valeur exacte ? Expliquez votre réponse à la question précédente à partir des graphes que vous avez tracés.

Question 5.48

Utilisez une approximation linéaire (i.e. un polynôme de Taylor de degré un) pour estimer $\sqrt{1.1}$ et $\sqrt{0.9}$. Comparez avec les valeurs exactes. Pour chaque approximation, déterminez si nous avons une surestimation ou une sous-estimation. Expliquez à l'aide du graphe de $f(x) = \sqrt{x}$ pourquoi nous avons surestimation ou sous-estimation.

Question 5.49

Soit

$$b(t) = \frac{1}{1+t}.$$

- Utilisez une approximation linéaire au point $t = 0$ pour estimer $b(1.1)$.
- Utilisez une approximation linéaire au point $t = 1$ pour estimer $b(1.1)$.
- Utilisez la sécante qui passe par les points $(0, b(0))$ et $(1, b(1))$ pour estimer $b(1.1)$.
- Tracez le graphe des tangentes et de la sécante qui représentent les méthodes d'approximations qui ont été utilisées précédemment.
- Laquelle des méthodes donne la meilleure approximation de $b(1.1)$? Pourquoi ?

Question 5.50

Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

- Trouvez l'approximation linéaire p_1 du numérateur de f au voisinage de $x = 1$.
- Trouvez l'approximation linéaire q_1 du dénominateur de f au voisinage de $x = 1$.
- Montrez que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}.$$

Note : L'idée de remplacer le numérateur et le dénominateur par des polynômes de Taylor est à la base de la Règle de l'Hospital.

Question 5.51 🌲 🔧

Donnez une approximation linéaire de la fonction $y = f(x) = x^{-3}$ au voisinage de $x = 1$.

Il est possible d'utiliser un polynôme de degré deux pour estimer la fonction f au voisinage de $x = 1$. Pour ce faire, nous choisissons $p_2(x) = a + bx + cx^2$ tel que $p_2(1) = f(1)$, $p_2'(1) = f'(1)$ et $p_2''(1) = f''(1)$. Trouvez p_2 .

Dessinez (à l'aide d'un logiciel) le graphe de f , le graphe de l'approximation linéaire et le graphe de p_2 près de $x = 1$. Est-ce que p_2 est une meilleure approximation de f que l'approximation linéaire ?

Question 5.52 🌲 🔧

Utilisez une approximation quadratique (i.e. un polynôme de Taylor de degré 2) pour estimer chacune des valeurs suivantes.

a) 1.002^{2001} b) $\sin(0.02)$ c) $16.2^{3/4}$

Question 5.53 🌲 🔧

Pour chacune des fonctions $f(x)$ ci-dessous, utilisez son polynôme de Taylor de degré trois au point a pour estimer $f(b)$.

- a) $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$ et $b = 1.2$ b) $f(x) = x^{1/4}$, $a = 1$ et $b = 1.4$
 c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $a = 3$ et $b = 3.1$ d) $f(x) = x^{4/3}$, $a = 2$ et $b = 8.1$
 e) $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$, $a = 1$ et $b = 1.1$

Question 5.54 🔧 🌲

Le polynôme de Taylor de degré 4 en $x = 3$ d'une fonction f est

$$p_4(x) = 23 + 10(x - 3) + 2(x - 3)^3 + \frac{1}{3}(x - 3)^4.$$

Quelle est la valeur de $f''(3)$? De $f^{(4)}(3)$?

Question 5.55 🌲 🔧

Donnez le polynôme de Taylor de degré trois de $p(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ au voisinage de $x = 0$. Aucun calcul est nécessaire si vous avez bien compris la théorie. Justifiez votre réponse.

Question 5.56 🌲 🔧

Soit $p(x) = 7x^9 - 8x^6 - 5x^3 + 2x^2 - 8$. Pour quelles valeurs de x avons-nous $\frac{d^9 p}{dx^9}(x) > 0$? Justifiez votre réponse.

Question 5.57 🌲 🔧

Trouvez le polynôme de Taylor p_k de degré k de $\cos(x)$ près de l'origine tel que $p_k(0.5)$ soit une approximation de $\cos(0.5)$ avec une erreur de troncature inférieure à 10^{-6} . Quelle est la valeur de l'approximation donnée par votre polynôme de Taylor ? Comparez avec la valeur exacte.

Question 5.58 🌲 🔧

Donnez le polynôme de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = xe^{x^2-2}$ pour x près de l'origine. Donnez une borne supérieure pour l'erreur de troncature si vous utilisez ce polynôme de Taylor pour estimer $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 0.2]$.

Question 5.59 🌲 🔧

Utilisez un polynôme de Taylor de degré suffisamment grand pour calculer les limites suivantes.

$$\text{a) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} \quad \text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - h - h^2/2}{h^3} \quad \text{c) } \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \theta}{\theta - \pi/2}$$

5.9.7 Comportement asymptotique**Question 5.60** 🌲

Utilisez la Règle de l'Hospital pour déterminer laquelle des fonctions suivantes tend plus rapidement vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par la droite.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Question 5.61 🌲 🔧

Soit $f(t) = \frac{5t}{e^{2t}}$. Utilisez la Règle de l'Hospital pour trouver l'asymptote horizontale pour $t > 0$.

Question 5.62 🌲

Plusieurs fonctions utilisées pour décrire l'absorption d'un produit sont de la forme

$$\alpha(t) = \frac{Ar(t)}{k + r(t)}$$

où

1. A et k sont des constantes positives,
2. $r(0) = 0$,
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$ et
4. $r'(t) > 0$ pour $c > 0$.

Par exemple, considérons la fonction d'absorption

$$\alpha(t) = \frac{At^2}{k + t^2}.$$

- a) Déterminez $r(t)$ dans cette fonction.
- b) Montrez que $\alpha(t)$ est une fonction strictement croissante pour $t > 0$.

c) Utilisez la Règle de l'Hospital pour calculer la limite de $\alpha(t)$ lorsque t tend vers plus l'infini.

Question 5.63 🌲

Dans chacune des situations ci-dessous, déterminez la limite de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers la valeur donnée, et laquelle des deux fonctions approche cette limite le plus rapidement.

a) $f(x) = 0.1x^{0.5}$, $g(x) = 30 \ln(x)$ et $x \rightarrow \infty$.

b) $f(x) = e^{-2x}$, $g(x) = x^{-2}$ et $x \rightarrow \infty$.

c) $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = -\ln(x)$ et $x \rightarrow 0^+$.

Question 5.64 🌲 🔧

Évaluez les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{e^{3x}}$

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1+t}{1+t+t^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1}$

d) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z}{1 + \ln(1+z)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2(x)}{(x - \pi/2)^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x^4)}$

Question 5.65 🌲 🔧

Évaluez les limites suivantes si elles existent.

a) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \csc(5x) \sin(3x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc(x) - \cot(x))$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x))^x$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 7x \cot(3x)$

f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cot^2(x)(x - \pi)^2$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x \right)$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2}$

5.9.8 Méthode de Newton

Question 5.66 🌲 🔧

Utilisez la méthode de Newton pour trouver une approximation de la racine réelle positive de

$$x^4 - 20 = 0.$$

Utilisez $x_0 = 2$ et arrêtez lorsque $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-4}$.

Question 5.67 🌲 🔧

Utilisez la Méthode de Newton pour estimer la valeur de $\sqrt[3]{30}$. Arrêtez après trois itérations. Faites le graphe de f et illustrez la première itération de la Méthode de Newton.

Suggestion : Considérez $f(x) = x^3 - 30 = 0$.

Question 5.68 🌲 🔧

Utilisez la méthode de Newton pour estimer la solution positive de $e^x = x + 2$ s'il y en a une. Pour ce faire vous devez :

- a) vérifiez avec un graphe qu'il y a effectivement une seule solution positive.
 b) Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe une solution entre 1 et 2. Cela va vous permettre de choisir la valeur de x_0 qui sera utilisée par la méthode de Newton.
 c) Faire au moins trois itérations de la méthode de Newton.

Question 5.69 (Méthode de la sécante) 🔧

Dans la formule

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

si nous remplaçons $f'(x_i)$ par $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ (une approximation de $f'(x_i)$ si x_{i-1} est très près de x_i), nous obtenons la méthode de la sécante

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Notez qu'il faut initialement choisir deux points, x_0 et x_1 , pour pouvoir utiliser la méthode de la sécante alors qu'un seul était nécessaire pour la méthode de Newton.

- a) Soit $f(x) = x^2 - 2$ et soit x_i et x_{i+1} deux points à la droite de $\sqrt{2}$. Tracez la sécante qui passe par les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ et montrez que l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe des x donne la formule pour la méthode de la sécante.
 b) Utilisez la méthode de la sécante pour estimer la solution positive de $e^x = x + 2$. L'information obtenu à la question 5.68 pourrait être utile pour choisir les valeurs de x_0 et x_1 .
 Faites au moins trois itérations.

5.9.9 Systèmes dynamiques discrets

Question 5.70 🌲

Le volume (en μm^3) d'un organisme après n heures est donné par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1.5v_n, & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ v_0 &= 1350 \end{aligned}$$

Combien faut-il d'heures pour que l'organisme atteigne un volume d'au moins $3250 \mu\text{m}^3$?

Question 5.71 🌲

Une population de bactéries satisfait le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 2p_n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où p_n est le nombre moyen de bactéries par éprouvette n heures après le début de l'expérience.

- a) Combien devons-nous avoir de bactéries à 9 heures si nous voulons avoir entre 10^8 et 10^9 bactérie à 10 heures ?

b) Combien devons-nous avoir de bactéries initialement si nous voulons avoir entre 10^8 et 10^9 bactérie à 10 heures ?

Question 5.72 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 0.5y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ y_0 &= 1200 \end{aligned}$$

Trouvez la solution de ce système et tracez le graphe de la solution pour $0 \leq i \leq 10$. Tracez le graphe de la fonction itérative. Quelle est la valeur de y_{20} ?

Question 5.73 🌲

Une population est gouvernée par le système dynamique discret $b_{i+1} = 0.7b_i$. Par exemple, b_i est le nombre d'individus après i heures. Si $b_0 = 5.0 \times 10^5$, donnez la formule générale pour la solution b_i du système dynamique discret. Trouvez la valeur de i pour que $b_i \approx 10^5$. Tracez le graphe de b_i .

Question 5.74 🌲

Considérons deux populations animales qui occupent un même territoire. La première population est décrite par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 2.5x_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ x_0 &= 10^2 \end{aligned} \tag{5.9.1}$$

et la deuxième population par le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 2y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ y_0 &= 10^3 \end{aligned} \tag{5.9.2}$$

Déterminez si une des deux populations tend plus rapidement que l'autre vers $+\infty$? Si une des deux populations tend plus rapidement que l'autre vers plus l'infini, dites laquelle ?

Question 5.75 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 4 - x_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Calculez x_1 , x_2 et x_3 . Donnez une formule pour la solution de ce système.

Question 5.76 🌲

Supposons que la hauteur d'un arbre satisfasse le système dynamique discret

$$\begin{aligned} h_{i+1} &= h_i + 1 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ h_0 &= 1 \end{aligned}$$

où h_i est la hauteur de l'arbre en mètres i années après de début des mesures. Trouvez la solution de ce système dynamique discret. Quelle est la hauteur de l'arbre après 20 ans ? Est-ce que ce modèle est réaliste ?

Question 5.77 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 2x_i + 30 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\x_0 &= 10\end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Donnez la solution de ce système.

Question 5.78 🌲

Les données suivantes représentent le nombre moyen de bactéries après 10 minutes.

Nombre de bactéries	
nombre initial	nombre après 10 minutes
1220	1830
1860	2790
1080	1620
1640	2460
1540	2310
1420	?

Si le nombre de bactéries est gouverné par un système dynamique discret de la forme $v_{i+1} = av_i + b$ où v_i est le nombre à tous les 10 minutes, trouvez les valeurs de a et b . Complétez le tableau. Si le nombre initial est $v_0 = 1420$, quel sera le nombre après une heure ? Est-ce que le modèle est réaliste ?

Question 5.79 🌲

Les données suivantes représentent la concentration d'un médicament dans le sang d'un patient n heures après le début du traitement.

n (heure)	concentration (mg/l)
0	20
1	16
2	13
3	10.75

Si la concentration est gouverné par un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = ap_n + b$, trouvez les valeurs de a et b . Tracez le graphe de la solution pour $0 \leq n \leq 10$. Est-ce que le modèle est réaliste ?

Question 5.80 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$M_{i+1} = 0.75M_i + 2 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.9.3)$$

- a) Trouvez la solution générale de ce système dynamique discret.
- b) Trouvez les cinq premières valeurs de l'orbite de $M_0 = 16$.
- c) Tracez la graphe de la solution de ce système pour $M_0 = 16$.

- d) Tracez le graphe de la fonction itérative de ce système.
 e) Sans itérer le système dynamique discret, trouvez la valeur de M_{60} lorsque $M_0 = 10$.

Question 5.81 🌲

Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret

$$b_{i+1} = 2b_i - 5 .$$

Indiquez sur le graphe où se trouve le point d'équilibre. Trouvez ce point d'équilibre. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles le graphe de la fonction itérative est au-dessus de la droite $y = x$ et celles pour lesquelles le graphe est en dessous de la droite $y = x$

Question 5.82 🌲

Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 0.5y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ y_0 &= 1200 \end{aligned}$$

Prenez soin de bien identifier les axes.

Question 5.83 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= -0.5w_i + 3 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ w_0 &= 0.2 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Trouvez le point d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe de la fonction itérative. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.84 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= 0.5z_i + 8 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ z_0 &= 2 \end{aligned}$$

Quelle est la fonction itérative ? Tracez le graphe de la fonction itérative. Trouvez le ou les points d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.85 🌲

Revenons au problème de médication de la question 5.79 où nous vous avons demandé de trouver un système dynamique discret de la forme $p_{n+1} = ap_n + b$ associé aux données du tableau des concentrations d'un médicament dans le sang d'un patient n heures après le début du traitement.

n (heure)	concentration (mg/l)
0	20
1	16
2	13
3	10.75

Trouvez le point ou les points d'équilibre de ce système dynamique discret. Trouvez la solution du système. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.86 🌲

Considérons une population de bactéries qui double à toutes les heures mais à laquelle nous enlevons 10^6 bactéries à la fin de chaque heure. Si initialement nous avons 3×10^6 bactéries, donnez le système dynamique discret associé à ce problème. Trouvez la solution et tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Quel sera le système dynamique discret si nous enlevons 10^6 bactéries au début de chaque heure? Répondre aux mêmes questions que précédemment pour ce nouveau système dynamique. Aurons-nous le même graphe en forme de toile d'araignée que pour le système dynamique discret précédent?

Question 5.87 🌲

Un médicament est administré à un patient à tous les jours. Les doses de ce médicament sont données dans le tableau suivant.

jour	0	1	2	3
Médicament (mg/l)	0	2	3.2	3.92

Si nous savons que le système dynamique discret est donné par une fonction itérative de la forme $x_{i+1} = mx_i + b$, trouvez cette fonction et le système dynamique discret qui s'y rapporte.

Tracez le graphe de la fonction itérative de ce système dynamique discret et tracez le graphe en forme de toile d'araignée associé à la condition initiale donnée dans le tableau ci-dessus. Quelle est le point d'équilibre de ce système?

Question 5.88 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$x_{n+1} = 0.9x_n + 8 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Trouvez le point d'équilibre de ce système et déterminez sa stabilité de deux façons.

- i: Avec le graphe en forme de toile d'araignée.
- ii: Sans le graphe en forme de toile d'araignée.

Question 5.89 🌲

Considérons le système dynamique discret $y_{n+1} = 1 - 1.5(y_n - 1)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

- a) Trouvez les points d'équilibre.
- b) Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret.
- c) Tracez un graphe en forme de toile d'araignée pour une orbite du système dynamique discret.
- d) Déterminez la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre pour les systèmes dynamiques discrets.

Question 5.90 🌲

Un patient reçoit une dose de 50 mg/l d'un médicament à chaque jour. Nous savons que 45% du médicament est éliminé de l'organisme à chaque jour. Si la concentration du médicament

dans l'organisme du patient est mesurée après chaque dose et la première mesure indique une concentration de 42 mg/l, donnez le systèmes dynamiques discrets linéaire qui décrit la concentration x_t du médicament t jours après le début du traitement.

Question 5.91

Dans le but de plaire aux oiseaux dans sa cour arrière, un propriétaire dépose 30 g de graines dans une mangeoire à la fin de chaque semaine.

- Si les oiseaux mangent 75% des graines à chaque semaine, donnez un système dynamique discret pour le poids p_n en grammes des graines dans la mangeoire au début de la n^e semaine.
- Donnez la fonction génératrice de ce système dynamique discret.
- Trouvez le point d'équilibre de ce système dynamique discret s'il y en a un.
- Donnez la solution générale du système dynamique discret lorsque $p_0 = 5$.
- Tracez le graphe de la fonction génératrice et le graphe en forme de toiles d'araignées pour ce système dynamique discret. Faites au moins quatre itérations.
- Déterminez la stabilité du point d'équilibre (s'il y en a un) de deux façons : (1) à partir du théorème de stabilité des point d'équilibre et (2) à l'aide du graphe en forme de toiles d'araignées.

Question 5.92 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \\x_0 &= 1\end{aligned}$$

où $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Calculez les valeurs de x_1, x_2, x_3, \dots . Trouvez la solution générale.

Question 5.93 🌲

Tracez le graphe de la fonction itérative $f(x) = e^{-x}$ pour $0 \leq x \leq 2$ et déterminez s'il y a au moins un point d'équilibre du système dynamique discret associé à cette fonction itérative.

Question 5.94 🌲

Tracez le graphe de la fonction itérative

$$f(y) = y^2 - 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 2 .$$

Indiquez sur le graphe où se trouve le point d'équilibre. Trouvez ce point d'équilibre.

Question 5.95 🌲

Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que le système dynamique discret $x_{i+1} = \cos(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$ a un point d'équilibre.

Question 5.96 🌲

Trouvez si possible les points d'équilibre du système dynamique discret

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{x_i - 1} \quad , \quad x_i > 1 .$$

Notez que la fonction itérative de ce système dynamique discret n'est pas une fonction affine.

Question 5.97 🌲

Considérons le système dynamique discret

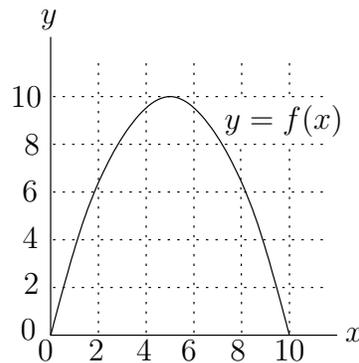
$$x_{i+1} = \frac{x_i}{x_i + 1}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$x_0 = 1$$

Quelle est la fonction itérative ? Tracez le graphe de la fonction itérative. Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour ce système dynamique discret.

Question 5.98 🌲

Le graphe d'une fonction itérative f est donnée ci-dessous.



Donnez les coordonnées du point d'équilibre (s'il y en a un) du système dynamique discret $x_{i+1} = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$. Indiquer sur le graphe de la fonction itérative où se trouve le point d'équilibre ; inclure le graphe de la droite $y = x$ dans votre dessin.

Question 5.99 🌲

Considérons le système dynamique discret

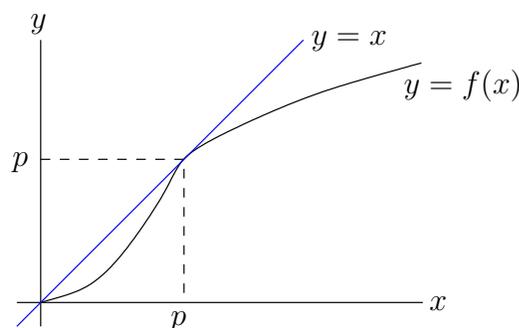
$$x_{i+1} = \frac{\alpha x_i}{1 + x_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Donnez les valeurs de α pour lesquelles :

- le système dynamique discret a un seul point d'équilibre.
- le système dynamique discret a un point d'équilibre négatif.
- le système dynamique discret a un point d'équilibre positif.

Question 5.100 🌲 👁

Le graphe d'une fonction f est donné ci-dessous.



Remarquons que le graphe de la fonction f est tangente à la droite $y = x$ au point d'équilibre p . De plus, le graphe de la fonction f est en dessous de la droite $y = x$ près de p . Ces deux propriétés sont responsables d'un phénomène très important qui se produit lorsque le graphe de f est légèrement déformé. Le comportement du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ change lorsque le graphe de f est déformé. En particulier, le nombre de points d'équilibre change. Ce phénomène est appelé **bifurcation**.

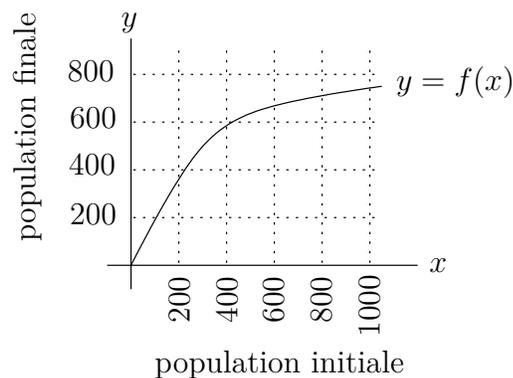
Si nous faisons légèrement pivoter le graphe de f autour de l'origine, le nouveau graphe de f satisfait toujours $f(0) = 0$ car l'origine est fixe pour la rotation.

Dans les trois cas suivants, trouvez les points d'équilibre et leur stabilité, et tracez un graphe en forme de toile d'araignée pour deux orbites du système dynamique discret généré par le nouveau graphe de f .

- Le graphe de f demeure à sa position initiale.
- Le graphe de f est légèrement pivoté dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Le graphe de f est légèrement pivoté dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Question 5.101 🌲

Le graphe suivant représente le graphe d'une fonction itérative f . Trouvez le point d'équilibre non nul et déterminez sa stabilité (sans tracer le graphe en forme de toile d'araignée).



Question 5.102 🌲

Dessinez le graphe d'une fonction itérative f ainsi qu'un graphe en forme de toile d'araignée qui lui est associé dans chacun des cas suivants. Dans les énoncés ci-dessous, nous assumons que p est le point d'équilibre du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

- Le graphe de f est tangent à la droite $y = x$ au point (p, p) , et le graphe de f est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x < p$ et en dessous de la droite $y = x$ pour $x > p$.
- Le graphe de f est tangent à la droite $y = x$ au point (p, p) , et le graphe de f est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x > p$ et en dessous de la droite $y = x$ pour $x < p$.

Dans chacun des cas, quelle est la pente de la droite tangente au graphe de f au point (p, p) ? Est-ce que la théorie peut être utilisé pour déterminer la stabilité du point d'équilibre?

Question 5.103 🌲

Trouvez tous les points d'équilibre du système dynamique discret suivant et déterminez leur stabilité.

$$p_{n+1} = 6p_n e^{-2p_n} - 2p_n$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Question 5.104 🌲

Considérons une population de bactéries dans un milieu donné. Suite à une mutation génétique, une nouvelle famille de bactéries est formée à l'intérieur de notre population initiale. Soit p_i la fraction de la population total de bactéries qui appartient à cette nouvelle famille de bactéries i heures après son apparition. p_i satisfait le système dynamique discret

$$p_{i+1} = \frac{r_1 p_i}{r_1 p_i + r_2 (1 - p_i)} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où r_1 est le taux de reproduction (bactéries par heure) pour la nouvelle famille de bactéries et r_2 est le taux de reproduction (bactéries par heure) pour la famille initiale de bactéries. Si $r_1 = 1.5$ et $r_2 = 2$, utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité des points d'équilibre $p = 0$ et $p = 1$.

Question 5.105 🌲

Considérons l'équation logistique

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

avec $\mu = 2$. Trouvez le point d'équilibre non nul $x = p$ de ce système dynamique discret. Quelle est la pente de la droite tangente au graphe de la fonction itérative au point (p, p) ? Est-ce que le point d'équilibre p est (asymptotiquement) stable? Tracez le graphe en forme de toile d'araignée de ce système. Que pouvons-nous dire au sujet de la vitesse de convergence des orbites vers le point d'équilibre p ?

Question 5.106 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$M_{i+1} = M_i - f(M_i)M_i + 1 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où M_i est la concentration d'un médicament dans le sang i heures après le début du traitement. $f(M_i)$ est la fraction du médicament qui est absorbée par l'organisme à chaque heure et le terme 1 représente une dose du médicament administrée à toutes les heures.

a) Si $f(M) = \frac{M}{2 + M}$, nous remarquons que $M = 2$ est un point d'équilibre pour le système dynamique discret. Utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité du point d'équilibre $M = 2$. Est-ce que les orbites oscillent autour du point d'équilibre?

b) Répondez aux questions en (a) pour la fonction $f(M) = 1.5M^2/(4 + M^2)$.

Question 5.107 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) - 0.75 x_n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où x_n est le rapport entre le nombre d'individus après n année et le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.² Nous supposons que $r \geq 0$.

- Trouvez tous les points d'équilibre de ce système dynamique discret. Au moins un des points d'équilibre va dépendre du paramètre r .
- Déterminez les valeurs de r pour lesquelles les points d'équilibre que vous avez trouvés en (a) ont un sens biologique.
- Déterminez les valeurs de r pour lesquelles les points d'équilibre que vous avez trouvés en (a) sont stable? Instable? Considérez seulement les valeurs de r pour lesquelles les points d'équilibre ont un sens biologique.

Question 5.108 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n^2) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

avec $\mu = 2$.

- Quelle est la fonction itérative?
- Trouvez les points d'équilibre de ce système dynamique discret.
- Déterminez la stabilité des points d'équilibre.

Question 5.109 🌲

Considérons le système dynamique discret

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n^2) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

- Déterminez les valeur de μ pour que le point d'équilibre $x = 0$ soit (asymptotiquement) stable? Instable?
- Déterminez les valeur de μ pour que le point d'équilibre plus grand que 0 soit (asymptotiquement) stable? Instable?

Question 5.110 🌲

Considérons une population dont le taux moyen de reproduction par individu et par heure est donné par $t(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ où x est le nombre d'individus.

- Si $x = x_n$ est le nombre d'individus par cm^2 après n heures, donnez le système dynamique discret satisfait par x_n .
- Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret que vous avez obtenu.
- Dessinez le graphe de la fonction itérative ainsi qu'un graphe en forme de toile d'araignée.
- Déterminez la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre si possible.
- Décrire en une ou deux phrases le comportement de la population.

Question 5.111 🌲

Soit x_n , le nombre d'individus dans un population n semaines après le début de l'étude de cette population. Si le taux de reproduction (nombre de descendants par habitant) à la

². Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion x_n de la population maximale est prête de 1.

n^e semaine est donné par $\frac{2.5x_n}{1+x_n^2}$, donnez un système dynamique discret pour décrire cette population. Pour le système dynamique discret que vous avez trouvé :

- Trouvez les points d'équilibre.
- Tracez le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret.
- Déterminez la stabilité des points d'équilibre.
- Décrivez en quelques mots le comportement de la population selon la condition initiale.

Question 5.112

Considérons le système dynamique discret

$$x_{n+1} = \frac{6x_n^2}{7+x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Quelle est la fonction génératrice ?
- Trouvez algébriquement les trois points d'équilibre de ce système dynamique discret.
- Déterminez la stabilité de chacun des points d'équilibre que vous avez trouvé en (b) à l'aide du Théorème de stabilité des points d'équilibre.
- Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour pour $x_0 = 1$. Identifiez les axes et les points x_1 , x_2 et x_3 .
- Qu'arrivera-t-il à long terme si la densité initiale est $x_0 = 1$?

Question 5.113

Le modèle logistique

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

que nous avons présenté est un système dynamique discret où le taux de reproduction (i.e. le nombre de descendants par individu) est une fonction strictement décroissante de x_n (i.e. le facteur $r(1-x_n)$ dans le modèle logistique). Pour le modèle logistique, le taux de reproduction de la population diminue avec l'augmentation de la population. Il ne faut pas oublier que x_n est le nombre d'individus à la n^e période divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.

Par contre, il y a des modèles où le taux de reproduction augmente avec l'augmentation de la population. Donnez le système dynamique discret associé à la population dont le taux de reproduction est donné par $0.5 + 0.5x_n^2$ où x_n est le nombre d'individus à la n^e période divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.³

- Donnez la fonction itérative du système dynamique discret que vous avez trouvé.
- Trouvez les points d'équilibre avec leur stabilité.
- Tracez le graphe en forme de toile d'araignée de quelques orbites.
- Expliquez en quelques mots ce qui peut arriver à la population selon la condition initiale.

Question 5.114

Considérons une espèce végétale sur un territoire donné. Plus la densité est grande, plus les

3. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion x_n de la population maximale est prêt de 1.

plantes sont petites. Plus une plante est petite, moins grand est le nombre de graines qu'elle produit. Supposons que le nombre moyen N de graines⁴ produites chaque année par une plante de taille moyenne S ⁵ soit $N = S - 1$. Si l'espèce produit N graines, alors la taille moyenne des plantes l'année suivante sera $S = 100/N$.

- Déterminez le nombre de graines produites la deuxième et la troisième année si le nombre de graines produites la première année est $N_0 = 20$.
- Donnez un système dynamique discret qui décrit le nombre de graines N_i après i années.
- Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret que vous avez obtenu en (b).
- Déterminez la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvé en (c) à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.
- Tracez le graphe de la fonction itérative ainsi que le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret que vous avez obtenu en (b).

Question 5.115 🌲

Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = 2N_i(1 - N_i) - hN_i \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.⁶ Le paramètre h représente le facteur d'efficacité des prédateurs.

- Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ avons-nous un point d'équilibre non négatif?
- Exprimez la récolte à long terme en fonction de h .
- Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme?
- Quelle est cette récolte?

Question 5.116 🌲

Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{n+1} = 2.5N_n(1 - N_n) - hN_n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où N_n est le nombre d'individus à la n^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.⁷ le paramètre h représente le facteur d'efficacité des prédateurs.

- Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ avons-nous un point d'équilibre non négatif?
- Exprimez la récolte à long terme en fonction de h .
- Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme?
- Montrez que le point d'équilibre du système dynamique discret associé à la valeur de h

4. Ce modèle n'est pas valable quand N est très grand

5. nous ne spécifions pas les unités de S mais nous pourrions utiliser le volume, la masse, ..., de la plante. Ce n'est pas important pour résoudre le problème

6. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion N_i de la population maximale est prête de 1.

7. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion N_n de la population maximale est prête de 1.

trouvée en (c) est (asymptotiquement) stable à l'aide du théorème de stabilité pour les point d'équilibre.

e) Tracez le graphe de la fonction itérative et un graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique discret associé à la valeur de h trouvée en (c).

Question 5.117

Une population est gouvernée par le système dynamique discret

$$x_{n+1} = 1.5x_n(1 - x_n) - hx_n$$

où x_n est le nombre d'individus après n semaines divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.⁸ le paramètre h représente le facteur d'efficacité des prédateurs.

- Trouvez les points d'équilibre en fonction de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ avons-nous un point d'équilibre non négatif?
- Quelle est la récolte à long terme en fonction de l'état d'équilibre (non nul) de la population?
- Trouvez l'efficacité h qui donnera la récolte maximale à long terme.
- Quelle est la récolte maximale à long terme?
- Déterminez la stabilité de l'état d'équilibre de la population pour l'efficacité trouvée en (c)?

Question 5.118

la proportion d'insectes (par rapport à la population maximale que le milieu peut supporter) autour d'un lac est décrite par le système dynamique discret

$$p_{n+1} = 1.5p_n(1 - p_n^2) - hp_n$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$ où h est le facteur d'efficacité des grenouilles à attraper les insectes.⁹ Pour trouver la valeur de h à laquelle les grenouilles obtiendront la récolte maximale à long terme, exécutez les étapes suivantes.

- Trouvez le point d'équilibre $p > 0$ du système dynamique discret. Ce point va dépendre de h .
- Pour le point d'équilibre p que vous avez trouvé en (a), trouvez la valeur de h pour laquelle la récolte atteindra son maximum global; c'est-à-dire, pour laquelle la fonction $R(h) = hp$ atteindra son maximum global.
- Montrez que le point d'équilibre p associé à la récolte maximal est stable.

Question 5.119

la fraction de la population maximal d'une espèce de grenouilles que le milieu peut supporter est décrit par le système dynamique discret

$$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n^3) - hx_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

8. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion x_n de la population maximale est prête de 1.

9. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion p_n de la population maximale est prête de 1.

où h est le facteur d'efficacité des prédateurs de cette espèce de grenouilles.¹⁰ Pour trouver la valeur de h à laquelle les prédateurs obtiendront la récolte maximale à long terme, répondez aux questions suivantes.

- Trouvez le point d'équilibre $p > 0$ du système dynamique discret (le point d'équilibre dépend de h).
- Pour le point d'équilibre p de (a), trouvez la valeur de h pour laquelle la récolte atteint son maximum global ; c'est à dire, pour laquelle le produit $hp(h)$ atteint son maximum global.
- Démontrez que le point d'équilibre p associé à la récolte maximal est stable.

Question 5.120

Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = \frac{2.5N_i}{1 + N_i} - hN_i \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année divisé par le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.¹¹ h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

- Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ avons-nous un point d'équilibre non négatif ?
- Exprimez la récolte à long terme en fonction de h .
- Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme ?
- Déterminez la stabilité du point d'équilibre du système dynamique discret associé à la valeur de h trouvée en (c) à l'aide du théorème de stabilité pour les point d'équilibre.

Question 5.121

Soit le système dynamique discret

$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{1 + x_n} - \frac{x_n}{2} \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nous assumons que $a > 0$.

- Trouver les points d'équilibre du système dynamique discret. Au moins un de ces points va dépendre du paramètre a .
- Déterminer la stabilité des points d'équilibre en fonction du paramètre a .

Question 5.122

Une population animale est gouvernée par le système dynamique discret

$$N_{i+1} = 2.5N_i e^{-N_i} - hN_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

où N_i est le nombre d'individus à la i^e année.¹² h représente un facteur d'efficacité des prédateurs.

10. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion x_n de la population maximale est prête de 1.

11. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion N_i de la population maximale est prête de 1.

12. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion M_i de la population maximale est prête de 0.

- a) Trouvez les points d'équilibre du système dynamique discret. Un de ces points va dépendre de h . Pour quelles valeurs de $h \geq 0$ avons-nous un point d'équilibre non négatif?
- b) Exprimez la récolte à long terme en fonction de h .
- c) Quelle est la valeur de h qui maximise la récolte à long terme.

Question 5.123 🌲

Une population de proies est décrite par le système dynamique discret

$$x_{i+1} = 1.5 x_i e^{-x_i} - h x_i \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où x_i est le nombre de proies après i années et h est un facteur d'efficacité des prédateurs.¹³

- a) Trouvez le point d'équilibre $p(h)$ de la population de proies en fonction de h .
- b) Donnez la formule $R(h) = hp(h)$ qui représente le nombre de proies capturées par les prédateurs chaque année (appelé la récolte).
- c) Utilisez la Méthode de Newton pour trouver la valeur de h qui maximise à long terme la quantité de proies capturées chaque année.

13. Ce modèle n'est pas valide au sens biologique si la proportion x_i de la population maximale est prêt de 0.



L'intégration de fonctions est le deuxième concept fondamental de ce manuel. Nous définissons ce qu'est la primitive d'une fonction dans la première partie du chapitre. Nous donnons aussi les principales techniques pour calculer les primitives d'une fonction. La deuxième partie du chapitre présente l'intégrale d'une fonction d'une variable sur un intervalle de longueur finie.

Le Théorème fondamental du calcul fera le lien entre le calcul des primitives et l'intégration de fonctions sur un intervalle de longueur finie. C'est sans aucun doute le plus important théorème du calcul différentiel et intégral d'où son nom de théorème fondamental.

Avant de terminer le chapitre, nous donnons la définition de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle de longueur infinie. Nous terminons le chapitre en présentant quelques techniques pour calculer numériquement les intégrales quand il s'avère trop compliqué ou fastidieux de les calculer analytiquement avec les techniques que nous présentons.

Les applications de l'intégrale d'une fonction seront présentées au chapitre suivant.

6.1 Primitives et intégrales indéfinies

Définition 6.1.1

Une fonction $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** de la fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exemple 6.1.2

La fonction $F(x) = \sin(x)$ est une primitive de $f(x) = \cos(x)$ car $F'(x) = \cos(x) = f(x)$ pour tout x . La fonction $F(x) = x^7/7$ est une primitive de $f(x) = x^6$ car $F'(x) = x^6 = f(x)$ pour tout x . La fonction $F(x) = \ln|x|$ est une primitive de $f(x) = 1/x$ car $F'(x) = 1/x = f(x)$ pour tout $x \neq 0$. ♣

Si F est une primitive de f alors, quelle que soit la constante C , la fonction G définie par $G(x) = F(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$ est aussi une primitive de f car

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = f(x) + 0 = f(x)$$

pour tout $x \in]a, b[$. Il y a donc une infinité de primitives de f . Nous avons une différente primitive de f pour chaque valeur de C .

En fait, la différence entre deux primitives de f est toujours une constante. Supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de f et posons $G = F_1 - F_2$. Puisque

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pour tout $x \in]a, b[$, la fonction G est une fonction constante ; c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que $G(x) = F_1(x) - F_2(x) = C$ pour tout $x \in]a, b[$. Ainsi, $F_1(x) = F_2(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$.

Remarque 6.1.3

En fait, la justification précédente assume que si $G'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors G est une fonction constante. Nous utilisons l'interprétation de la dérivée comme la pente de la tangente à la courbe pour tirer cette conclusion. Une démonstration rigoureuse fait appel au Théorème des accroissements finis, le théorème 4.4.6.

En effet, soit $x \in]a, b[$ et $c \in]a, b[$. Grâce au Théorème des accroissements finis, nous savons qu'il existe ξ entre x et c (où ξ dépend de x et c) telle que

$$G(x) - G(c) = G'(\xi)(x - c) .$$

Puisque $G'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, nous avons que $G(x) - G(c) = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in]a, b[$, alors $G(x) = G(c)$ pour tout $x \in]a, b[$. 

Définition 6.1.4

L'**intégrale indéfinie** d'une fonction f est la famille de primitives pour cette fonction. Nous dénotons l'intégrale indéfinie par $\int f(x) dx$. Si F est une primitive de f , alors

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$. La fonction f est appelée **l'intégrande** et x est la **variable d'intégration**. Le symbole dx indique que la variable d'intégration est x .

Le symbole dx n'est pas une variable, il indique seulement que la variable d'intégration est x . Aucune manipulation algébrique avec dx n'est permise.

Exemple 6.1.5

Si nous utilisons les résultats de l'exemple précédent, nous obtenons les intégrales indéfinies suivantes :

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C , \quad \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C .$$



À partir des formules de dérivation que nous avons présentées à la section 4.5, nous pouvons construire la table des intégrales que nous retrouvons dans le tableau 6.1.

Le prochain résultat est une conséquence de la linéarité de la dérivée.

$f(x)$	$\int f(x) dx$	contraintes
x^α	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C$	$\alpha \neq -1$ et x^α est définie
$1/x$	$\ln x + C$	$x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\sec^2(x)$	$\tan(x) + C$	
e^x	$e^x + C$	
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x) + C$	$ x < 1$
$1/(1+x^2)$	$\arctan(x) + C$	

TABLE 6.1 – Quelques intégrales indéfinies

Théorème 6.1.6

Si F et G sont des primitives de f et g respectivement, alors $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$. Par conséquent,

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx .$$

La démonstration de ce théorème est très simple. Par linéarité de la dérivée, nous avons

$$\frac{d}{dx} (aF(x) + bG(x)) = a \frac{d}{dx} F(x) + b \frac{d}{dx} G(x) = af(x) + bg(x)$$

pour tout x . Donc $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$.

Le théorème précédent peut être résumé en une seule phrase. L'intégrale indéfinie d'une somme de fonctions est la somme des intégrales indéfinies des fonctions de la somme, et l'intégrale indéfinie du produit d'une fonction avec une constante est le produit de l'intégrale indéfinie de la fonction avec cette constante.

Exemple 6.1.7

Calculons l'intégrale indéfinie de $g(x) = 5x^{-8} + 3\cos(x) + 7/\sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int \left(5x^{-8} + 3\cos(x) + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= 5 \int x^{-8} dx + 3 \int \cos(x) dx + 7 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 5 \left(\frac{x^{-7}}{-7} \right) + 3 \sin(x) + 7 \arcsin(x) + C \\ &= -\frac{5}{7x^7} + 3 \cos(x) + 7 \arcsin(x) + C . \end{aligned}$$

**Exemple 6.1.8**

Si $f'(x) = x^4 + 5/(1+x^2)$ et $f(0) = 2$, trouvons f .

La fonction f est une primitive de $x^4 + 5/(1+x^2)$. L'intégrale indéfinie de $x^4 + 5/(1+x^2)$ est

$$\int \left(x^4 + \frac{5}{1+x^2} \right) dx = \int x^4 dx + 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^5}{5} + 5 \arctan(x) + C.$$

La fonction f est donnée par $f(x) = x^5/5 + 5 \arctan(x) + C$ où C est choisi pour satisfaire $f(0) = 2$. Il faut donc avoir $C = 2$ et la fonction f cherchée est $f(x) = x^5/5 + 5 \arctan(x) + 2$.

**Exemple 6.1.9**

L'exemple suivant se trouve dans (presque) tous les livres de calcul différentiel qui ont été écrits. Nous allons donc continuer la tradition pour ne pas paraître trop radical.

Si $p(t)$ est la position d'un objet (se déplaçant en ligne droite), sa vitesse au temps t (i.e. le taux de changement instantané de la position) est $v(t) = p'(t)$. La position est une primitive de la vitesse. L'accélération au temps t (i.e. le taux de changement instantané de la vitesse) est $a(t) = v'(t) = p''(t)$. La vitesse est une primitive de l'accélération.

Avec cette information, nous pouvons trouver le temps que prendra un objet que nous laissons tomber d'une hauteur de 100 m pour atteindre le sol. Nous pouvons aussi trouver la vitesse à laquelle l'objet frappe le sol. Nous supposons que la friction de l'air n'a aucun effet sur l'objet.

Au départ, la position de l'objet est $p(0) = 100$ m. Puisque nous laissons tomber l'objet, sa vitesse initiale est $v(0) = 0$ m/s.

L'accélération dû à l'attraction terrestre est bien connue et est -9.8 m/s². Nous utilisons le signe négatif pour l'accélération pour indiquer que la direction positive du déplacement est vers le haut. Ainsi, $a(t) = -9.8$ pour tout t .

Puisque

$$\int a(t) dt = \int -9.8 dt = -9.8t + C$$

pour une constante C , nous avons $v(t) = -9.8t + C$. La constante C est déterminée par la condition $v(0) = 0$. Ainsi, $C = 0$ et $v(t) = -9.8t$ m/s.

De même, puisque

$$\int v(t) dt = \int -9.8t dt = -9.8 \int t dt = -9.8 \frac{t^2}{2} + C$$

pour une constante C , nous avons $p(t) = -4.9t^2 + C$. La constante C est déterminée par la condition $p(0) = 100$. Ainsi, $C = 100$ et $p(t) = -4.9t^2 + 100$ m.

L'objet va toucher le sol lorsque $p(t) = -4.9t^2 + 100 = 0$. nous trouvons $t = 4.5175395\dots$ secondes.

L'objet prend donc $t = 4.5175395\dots$ secondes pour atteindre le sol qu'il frappe à une vitesse de $v(4.5175395\dots) = -9.8 \times 4.5175395\dots = -44.271887\dots$ m/s. Notons que le signe négatif pour la vitesse indique seulement que l'objet se dirige vers le sol.



6.2 Techniques d'intégration

Nous présentons quelques règles qui nous permettront de transformer une intégrale indéfinie complexe en une autre intégrale indéfinie qui fait appel seulement à des intégrales indéfinies simples comme celles que nous retrouvons dans le tableau 6.1.

6.2.1 Substitutions

La première méthode d'intégration que nous allons voir nous permettra d'évaluer l'intégrale indéfinie de fonctions composées comme $\sin(4x)$, $\sqrt{x+7}$, etc.

Exemple 6.2.1

Calculons les intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a) } \int e^{5x} dx \quad \text{b) } \int x \sin(x^2) dx \quad \text{c) } \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+5}} dx$$

a) Nous utilisons la règle de la dérivée de fonctions composées pour obtenir

$$\int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + C \quad (6.2.1)$$

car

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{e^{5x}}{5} \right) = \frac{5e^{5x}}{5} = e^{5x}.$$

b) Nous avons

$$\int x \sin(x^2) dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C \quad (6.2.2)$$

car

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{-\cos(x^2)}{2} \right) = \frac{2x \sin(x^2)}{2} = x \sin(x^2).$$

c) Que devons-nous faire? ♣

Alors que les deux premières intégrales indéfinies étaient assez simple à deviner, il en est autrement de l'intégrale indéfinie en (c).

Nous présentons une méthode d'intégration basée sur la règle de la dérivée de fonctions composées qui nous permettra de trouver l'intégrale indéfinie de $x^3/\sqrt{x^2+5}$.

En multipliant par 5 des deux côtés de l'égalité en (6.2.1), nous obtenons

$$\int 5 e^{5x} dx = e^{5x} + C$$

où C est une nouvelle constante. Cette intégrale indéfinie est de la forme

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad (6.2.3)$$

où $f(x) = e^x$, $g(x) = 5x$ et $F(x) = e^x$ est la primitive de f . De même, si nous multiplions par 2 des deux côtés de l'égalité en (6.2.2), nous obtenons

$$\int 2x \sin(x^2) dx = -\cos(x^2) + C$$

où C est une nouvelle constante. C'est une intégrale indéfinie de la forme (6.2.3) où $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$ et $F(x) = -\cos(x)$ est la primitive de f .

Est-ce que la formule (6.2.3) est toujours vraie ?

Soit F une primitive d'une fonction f et g une fonction différentiable. Si f et F sont définies sur l'image de g , alors la fonction composée $F \circ g$ est différentiable et

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = \left(\frac{d}{dy} F(y) \Big|_{y=g(x)} \right) \frac{d}{dx} g(x) = \left(f(y) \Big|_{y=g(x)} \right) \frac{d}{dx} g(x) = f(g(x))g'(x).$$

Ainsi, $F(g(x))$ est une primitive de $f(g(x))g'(x)$. Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 6.2.2

Supposons que

1. g soit une fonction différentiable,
2. F soit la primitive d'une fonction f , et
3. f et F soient définies sur l'image de g .

Alors $F(g(x))$ est une primitive de $f(g(x))g'(x)$. Nous en déduisons la **règle de substitution** (ou **méthode de changement de variable**) suivante.

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(y) dy \Big|_{y=g(x)} = F(g(x)) + C.$$

Pour appliquer la règle de substitution, nous procédons de la façon suivante. Si nous posons $y = g(x)$, alors $dy = g'(x) dx$ et

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \underbrace{g'(x) dx}_{=dy} = \int f(y) dy$$

où il ne faut pas oublier de remplacer y par $g(x)$ après avoir calculé l'intégrale indéfinie de f . L'expression $dy = g'(x) dx$ n'est pas une égalité algébrique mais une expression symbolique pour exprimer la procédure pour remplacer la variable d'intégration x par la variable d'intégration y .

Retournons à l'exemple précédent avec la règle de substitution en main.

Exemple 6.2.3

Évaluons les intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a) } \int e^{5x} dx \quad \text{b) } \int x \sin(x^2) dx \quad \text{c) } \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$$

a) Si $f(y) = e^y$ et $y = g(x) = 5x$, alors $dy = g'(x) dx = 5 dx$ et

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int \underbrace{e^{5x}}_{=f(g(x))} \times \underbrace{5}_{=g'(x)} dx = \frac{1}{5} \int \underbrace{e^y}_{=f(y)} dy \Big|_{y=5x} = \frac{1}{5} e^y \Big|_{y=5x} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C.$$

b) Si $f(y) = \sin(y)$ et $y = g(x) = x^2$, alors $dy = g'(x) dx = 2x dx$ et

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin(x^2)}_{=f(g(x))} \times \underbrace{2x}_{=g'(x)} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin(y)}_{=f(y)} dy \Big|_{y=x^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos(y) \Big|_{y=x^2} + C = -\frac{\cos(x^2)}{2} + C. \end{aligned}$$

c) Si $f(y) = (y - 5)/\sqrt{y}$ et $y = g(x) = x^2 + 5$, alors $x^2 = y - 5$ et $dy = g'(x) dx = 2x dx$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} dx &= \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}}}_{=f(g(x))} \times \underbrace{2x}_{=g'(x)} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{y - 5}{\sqrt{y}}}_{=f(y)} dy \Big|_{y=x^2+5} \\ &= \frac{1}{2} \int (y^{1/2} - 5y^{-1/2}) dy \Big|_{y=x^2+5} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} y^{3/2} - 10 y^{1/2} \right) \Big|_{y=x^2+5} \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 5)^{3/2} - 5(x^2 + 5)^{1/2} + C. \end{aligned}$$



Par tradition et afin de simplifier la notation, nous n'incluons généralement pas les références à $f(y)$ et $g(x)$ dans la règle de substitution comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent. C'est ce que nous allons faire à partir de maintenant.

Exemple 6.2.4

Évaluons les intégrales indéfinies suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx & \text{b)} \int \frac{1}{1 + x^{1/3}} dx \\ \text{c)} \int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx & \text{d)} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx \end{array}$$

a) Si $y = \sin(x)$, alors $dy = \cos(x) dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx &= \int \frac{\cos^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) dx = \int \frac{1 - \sin^2(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) dx \\ &= \int \frac{1 - y^2}{\sqrt{y}} dy \Big|_{y=\sin(x)} = \int (y^{-1/2} - y^{3/2}) dy \Big|_{y=\sin(x)} \end{aligned}$$

$$= \left(2y^{1/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} \right) \Big|_{y=\sin(x)} + C = 2(\sin(x))^{1/2} - \frac{2}{5}(\sin(x))^{5/2} + C .$$

b) Posons $y = 1 + x^{1/3}$. Puisque

$$\frac{d}{dx} (1 + x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} ,$$

nous obtenons

$$dy = \frac{1}{3x^{2/3}} dx .$$

De plus,

$$y = 1 + x^{1/3} \Rightarrow x^{1/3} = y - 1 \Rightarrow x^{2/3} = (y - 1)^2 .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + x^{1/3}} dx &= \int \frac{3x^{2/3}}{1 + x^{1/3}} \left(\frac{1}{3x^{2/3}} \right) dx = \int \frac{3(y - 1)^2}{y} dy \Big|_{y=1+x^{1/3}} \\ &= 3 \int \left(y - 2 + \frac{1}{y} \right) dy \Big|_{y=1+x^{1/3}} = 3 \left(\frac{y^2}{2} - 2y + \ln |y| \right) \Big|_{y=1+x^{1/3}} + C \\ &= \frac{3}{2}(1 + x^{1/3})^2 - 6(1 + x^{1/3}) + 3 \ln |1 + x^{1/3}| + C . \end{aligned}$$

c) Puisque

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} dx ,$$

nous pouvons espérer qu'une bonne substitution va transformer cette intégrale en une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \arcsin(y) + C .$$

Si $y = \frac{3x^2}{4}$, alors $dy = \frac{3x}{2} dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{16 - 9x^4}} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}} \left(\frac{3x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy \Big|_{y=3x^2/4} = \frac{1}{6} \arcsin(y) \Big|_{y=3x^2/4} + C \\ &= \frac{1}{6} \arcsin \left(\frac{3x^2}{4} \right) + C . \end{aligned}$$

d) Remarquons que $x^2 + 2x + 10$ n'a pas de racines réelles (lorsque le dénominateur sera un polynôme qui peut être factorisé, nous ferons appel aux fractions partielles que nous verrons prochainement). En complétant le carré, nous obtenons

$$x^2 + 2x + 10 = (x + 1)^2 + 9 = (x + 1)^2 + 3^2 .$$

Il faut donc évaluer l'intégrale

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 3^2} dx = \frac{1}{3^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} dx .$$

Nous pouvons espérer qu'une bonne substitution va transformer cette intégrale en une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan(y) + C .$$

Pour ce faire, posons $y = \frac{x+1}{3}$. Ainsi, $dy = \frac{1}{3} dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 3^2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \Big|_{y=(x+1)/3} \\ &= \frac{1}{3} \arctan(y) \Big|_{y=(x+1)/3} + C = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + C . \end{aligned}$$



À l'occasion, il est préférable d'utiliser la règle de substitution dans le sens inverse. Nous utilisons $x = g(y)$ pour obtenir

$$\int f(x) dx = \int f(g(y))g'(y) dy$$

Cela peut sembler contradictoire car nous avons l'impression que l'intégrande à droite, $f(g(y))g'(y)$, sera plus compliquée que l'intégrande à gauche, $f(x)$. L'exemple qui suit nous prouve le contraire.

Exemple 6.2.5

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$.

Si les exposants de x étaient des entiers, l'intégrale serait probablement plus simple. Nous aurions seulement le quotient de deux polynômes. Si nous multiplions le numérateur et le dénominateur de l'intégrande par \sqrt{x} , nous obtenons

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{x^{1/2}}{x^{1/2} - x^{1/3}} dx = \int \frac{x}{x - x^{5/6}} dx .$$

Posons $x = u^6$ dans le but d'éliminer les racines sixièmes. Nous avons $dx = 6u^5 du$ et

$$\int \frac{x}{x - x^{5/6}} dx = \int \left(\frac{u^6}{u^6 - u^5} \right) 6u^5 du = \int \frac{6u^6}{u - 1} du .$$

Un longue division donne

$$\frac{u^6}{u - 1} = u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 + \frac{1}{u - 1} .$$

Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{6u^6}{u-1} du &= \int 6 \left(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1 + \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= 6 \left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln|u-1| \right) + C \\ &= u^6 + \frac{6u^5}{5} + \frac{3u^4}{2} + 2u^3 + 3u^2 + 6u + 6 \ln|u-1| + C . \end{aligned}$$

Finalement, puisque $u = x^{1/6}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{6u^6}{u-1} du \Big|_{u=x^{1/6}} \\ &= \left(u^6 + \frac{6u^5}{5} + \frac{3u^4}{2} + 2u^3 + 3u^2 + 6u + 6 \ln|u-1| + C \right) \Big|_{u=x^{1/6}} \\ &= x + \frac{6x^{5/6}}{5} + \frac{3u^{2/3}}{2} + 2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6 \ln|x^{1/6} - 1| + C . \end{aligned}$$



Pour évaluer l'intégrale de fonctions trigonométriques, nous avons souvent recours aux identités trigonométriques. Les trois plus importantes identités sont :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 , \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)) \quad \text{et} \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) .$$

Les deux dernières formules sont connues sous le nom de **formules de l'angle double**.

Les formules d'addition suivantes sont fréquemment utilisées pour calculer des intégrales en mécanique.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) , \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) , \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) , \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

et

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) .$$

Les trois dernières formules sont déduites des deux formules qui les précèdent.

Finalement, si l'intégrande contient les fonctions trigonométriques \tan , \cot , \sec et \csc , il est généralement préférable de réécrire ces fonctions en termes de \sin et \cos , et de simplifier l'intégrande. Il y a cependant quelques exceptions où les identités suivantes peuvent être utiles.

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha) \quad \text{et} \quad \cot^2(\alpha) + 1 = \csc^2(\alpha) .$$

Exemple 6.2.6

Évaluons les intégrales indéfinies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \tan(x) \, dx & \text{b)} \int \sin^2(x) \, dx & \text{c)} \int \sin^3(x) \, dx \\ \text{d)} \int \sin^3(x) \cos^2(x) \, dx & \text{e)} \int \sec(x) \, dx & \text{f)} \int \csc(x) \, dx \end{array}$$

a) Par définition de la tangente, nous avons

$$\int \tan(x) \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx .$$

Si $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int \tan(x) \, dx &= - \int \frac{1}{\cos(x)} (-\sin(x)) \, dx = - \int \frac{1}{y} \, dy \Big|_{y=\cos(x)} \\ &= - \ln |y| \Big|_{y=\cos(x)} + C = - \ln |\cos(x)| + C . \end{aligned}$$

b) Utilisons la formule de l'angle double pour obtenir

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx .$$

Si $y = 2x$, alors $dy = 2 \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos(2x)) \times 2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos(y)) \, dy \Big|_{y=2x} = \frac{1}{4} (y - \sin(y)) \Big|_{y=2x} + C \\ &= \frac{1}{4} (2x - \sin(2x)) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C . \end{aligned}$$

c) Utilisons la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ pour écrire

$$\int \sin^3(x) \, dx = \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) \, dx .$$

Si $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) \, dx &= - \int (1 - \cos^2(x)) (-\sin(x)) \, dx = - \int (1 - y^2) \, dy \Big|_{y=\cos(x)} \\ &= - \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=\cos(x)} + C = - \left(\cos(x) - \frac{1}{3} \cos^3(x) \right) + C \\ &= - \cos(x) + \frac{1}{3} \cos^3(x) + C . \end{aligned}$$

d) Utilisons la relation $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ pour obtenir

$$\int \sin^3(x) \cos^2(x) \, dx = \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) \, dx .$$

Si $y = \cos(x)$, alors $dy = -\sin(x) dx$ et

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) dx &= - \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) (-\sin(x)) dx \\ &= - \int (1 - y^2) y^2 dy \Big|_{y=\cos(x)} = - \int (y^2 - y^4) dy \Big|_{y=\cos(x)} \\ &= - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \Big|_{y=\cos(x)} + C = -\frac{1}{3} \cos^3(x) + \frac{1}{5} \cos^5(x) + C . \end{aligned}$$

e) Il faut utiliser un petit truc. Nous avons

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) \left(\frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} \right) dx = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx .$$

Si $y = \sec(x) + \tan(x)$, alors

$$dy = (\sec(x) \tan(x) + \sec^2(x)) dx .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \sec(x) dx &= \int \frac{1}{\sec(x) + \tan(x)} (\sec^2(x) + \sec(x) \tan(x)) dx = \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=\sec(x)+\tan(x)} \\ &= \ln |y| \Big|_{y=\sec(x)+\tan(x)} + C = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + C . \end{aligned}$$

f) Il faut utiliser un petit truc semblable à celui utilisé en (e). Nous avons

$$\int \csc(x) dx = \int \csc(x) \left(\frac{\csc(x) + \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} \right) dx = \int \frac{\csc^2(x) + \csc(x) \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} dx .$$

Si $y = \csc(x) + \cot(x)$, alors

$$dy = (-\csc(x) \cot(x) - \cot^2(x)) dx .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \csc(x) dx &= \int \frac{\csc^2(x) + \csc(x) \cot(x)}{\csc(x) + \cot(x)} dx \\ &= - \int \frac{1}{\csc(x) + \cot(x)} (-\csc^2(x) - \csc(x) \cot(x)) dx = - \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=\csc(x)+\cot(x)} \\ &= - \ln |y| \Big|_{y=\csc(x)+\cot(x)} = - \ln |\csc(x) + \cot(x)| + C . \end{aligned}$$



Exemple 6.2.7

Évaluons les intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a) } \int \sin(4x) \cos(3x) \, dx$$

$$\text{b) } \int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \, dx$$

a) Utilisons l'identité

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

avec $\alpha = 4x$ et $\beta = 3x$ pour obtenir

$$\int \sin(4x) \cos(3x) \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(x) \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(7x) \, dx .$$

La première intégrale est

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C_1 .$$

Pour la deuxième intégrale, nous utilisons la substitution $y = 7x$. Donc $dy = 7 \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int \sin(7x) \, dx &= \frac{1}{7} \int \sin(7x) \times 7 \, dx = \frac{1}{7} \int \sin(y) \, dy \Big|_{y=7x} \\ &= -\frac{1}{7} \cos(y) \Big|_{y=7x} + C_2 = -\frac{1}{7} \cos(7x) + C_2 . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int \sin(4x) \cos(3x) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{14} \cos(7x) + C$$

où $C = (C_2 - C_1)/2$.

b) Utilisons une des formules d'addition pour obtenir

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x) .$$

Si nous substituons cette expression dans l'intégrale

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \, dx ,$$

nous obtenons

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sin(x) \cos(x) \, dx + \frac{1}{2} \int \cos^2(x) \, dx .$$

Si nous substituons

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} (\sin(x - x) + \sin(x + x)) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

et

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

dans l'intégrale précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \, dx &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int \sin(2x) \, dx + \frac{1}{4} \int (1 + \cos(2x)) \, dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int \sin(2x) \, dx + \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos(2x) \, dx . \end{aligned}$$

Pour évaluer la première et la troisième intégrale dans l'expression précédente, utilisons la substitution $y = 2x$. Donc $dy = 2 \, dx$ et

$$\begin{aligned} \int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \, dx &= \frac{\sqrt{3}}{8} \int \sin(2x) \times 2 \, dx + \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos(2x) \times 2 \, dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \int \sin(y) \, dy \Big|_{y=2x} + \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos(y) \, dy \Big|_{y=2x} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cos(y) \Big|_{y=2x} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin(y) \Big|_{y=2x} + C \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \cos(2x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \sin(2x) + C . \end{aligned}$$

Nous aurions pu utiliser la substitution $y = \sin(x)$ pour évaluer l'intégrale $\int \sin(x) \cos(x) \, dx$ ci-dessus. En effet, avec cette substitution, nous obtenons $dy = \cos(x) \, dx$ et

$$\int \sin(x) \cos(x) \, dx = \int y \, dy \Big|_{y=\sin(x)} = \frac{y^2}{2} \Big|_{y=\sin(x)} + C = \frac{\sin^2(x)}{2} + C .$$

Cette solution est équivalente à celle que nous avons trouvée précédemment. L'équivalence des deux solutions se démontre à l'aide des identités trigonométriques. ♣

6.2.2 Intégration par parties

Alors que la méthode de substitution nous a permis d'évaluer l'intégrale indéfinie de certaines fonctions composées, la méthode d'intégration par parties nous permettra d'évaluer l'intégrale indéfinie du produit de deux fonctions comme xe^x , $x \sin(x)$, etc.

Si f et g sont deux fonctions différentiables, alors

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) .$$

Ainsi,

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) - f'(x)g(x) .$$

Si nous utilisons la linéarité de l'intégrale indéfinie, nous obtenons

$$\int f(x)g'(x) \, dx = \int \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) \, dx - \int f'(x)g(x) \, dx$$

$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

où nous avons utilisé le fait que $f(x)g(x)$ est une primitive de $\frac{d}{dx}(f(x)g(x))$.

Nous obtenons donc une primitive de $f(x)g'(x)$ en soustrayant de $f(x)g(x)$ une primitive de $f'(x)g(x)$. En d'autres mots,

Théorème 6.2.8

Si f et g sont deux fonctions différentiables, alors

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx .$$

Cette formule est connue sous le nom **d'intégration par parties**.

Exemple 6.2.9

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int xe^x dx$.

Nous avons $xe^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$. Donc $g(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ et

$$\int xe^x dx = \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

car $\int e^x dx = e^x + C$. ♣

Exemple 6.2.10

Évaluons les intégrales indéfinies suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int x^2 \cos(2x) dx & \text{b)} \int \sqrt{t} \ln(t) dt \\ \text{c)} \int x^3 \ln(2x) dx & \text{d)} \int \ln(x) dx \end{array}$$

a) Nous avons $x^2 \cos(2x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \cos(2x)$. Donc $f'(x) = 2x$, $g(x) = \sin(2x)/2$ et

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(2x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \sin(2x) - \int x \sin(2x) dx . \end{aligned}$$

Faisons appel pour une seconde fois à la méthode d'intégration par parties pour évaluer $\int x \sin(2x) dx$. Nous avons $x \sin(2x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(2x)$. Donc $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos(2x)/2$ et

$$\begin{aligned} \int x \sin(2x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C . \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(2x) dx &= \frac{x^2}{2} \sin(2x) - \left(-\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \sin(2x) + \frac{x}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x) - C.\end{aligned}$$

Remarquons que la méthode d'intégration par substitution a été utilisée à deux reprises pour éliminer le polynôme de degré deux x^2 de l'intégrande.

b) Nous avons $t^{1/2} \ln(t) = f(t)g'(t)$ pour $f(t) = \ln(t)$ et $g'(t) = t^{1/2}$. Donc $f'(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = \frac{2}{3}t^{3/2}$ et

$$\begin{aligned}\int t^{1/2} \ln(t) dt &= \int f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) - \int g(t)f'(t) dt \\ &= \frac{2}{3}t^{3/2} \ln(t) - \frac{2}{3} \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3}t^{3/2} \ln(t) - \frac{4}{9}t^{3/2} + C.\end{aligned}$$

c) Nous avons $x^3 \ln(2x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \ln(2x)$ et $g'(x) = x^3$. Donc $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x^4/4$ et

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln(2x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln(2x) - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln(2x) - \frac{1}{16}x^4 + C.\end{aligned}$$

d) Nous avons $\ln(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc $g(x) = x$, $f'(x) = 1/x$ et

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C.\end{aligned}$$



Nous pouvons déduire des exemples précédents quelques règles pour l'intégration par parties.

1. Si l'intégrande est de la forme $p(x)e^{\alpha x}$ où $p(x)$ est un polynôme, il faut choisir $f(x) = p(x)$ et $g'(x) = e^{\alpha x}$.
2. Si l'intégrande est de la forme $p(x) \sin(\alpha x)$ ou $p(x) \cos(\alpha x)$ où $p(x)$ est un polynôme, il faut choisir $f(x) = p(x)$ et $g'(x) = \sin(\alpha x)$ ou $\cos(\alpha x)$ selon le cas.
3. Si l'intégrande est de la forme $p(x) \ln(\alpha x)$ où $p(x)$ est une somme d'expressions de la forme x^r avec r un nombre rationnel, il faut choisir $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = p(x)$.

Exemple 6.2.11

Évaluons les intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a) } \int x 5^x dx \quad \text{b) } \int \arcsin(x) dx \quad \text{c) } \int \arctan(x) dx$$

a) Nous avons $x5^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = 5^x$. Donc $f'(x) = 1$, $g(x) = 5^x / \ln(5)$ et

$$\begin{aligned} \int x5^x dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= \frac{x5^x}{\ln(5)} - \frac{1}{\ln(5)} \int 5^x dx = \frac{x5^x}{\ln(5)} - \frac{1}{(\ln(5))^2} 5^x + C \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier que $\frac{d}{dx}5^x = 5^x \ln(5)$.

b) Nous avons $\arcsin(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \arcsin(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc $g(x) = x$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, nous utilisons la substitution $y = 1 - x^2$. Ainsi, $dy = -2x dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} \times (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int y^{-1/2} dy \Big|_{y=1-x^2} \\ &= -y^{1/2} \Big|_{y=1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Donc

$$\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - C.$$

c) Nous avons $\arctan(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = \arctan(x)$ et $g'(x) = 1$. Donc $g(x) = x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, nous utilisons la substitution $y = 1 + x^2$. Ainsi, $dy = 2x dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \times 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(y) \Big|_{y=1+x^2} + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Donc

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - C .$$



Exemple 6.2.12

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

C'est un autre exemple où nous devons utiliser la règle de substitution dans le sens inverse comme nous l'avons expliqué à la section précédente.

Posons $x = t^2$ dans le but d'éliminer \sqrt{x} . Alors $dx = 2t dt$ et

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt \Big|_{t=\sqrt{x}} = 2 (t e^t - e^t) \Big|_{t=\sqrt{x}} + C = 2 (\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C$$

où nous avons utilisé le résultat de l'exemple 6.2.9.



L'exemple suivant démontre une technique pour évaluer les intégrales dont l'intégrande est le produit de $e^{\alpha x}$ et $\cos(\beta x)$, ou $e^{\alpha x}$ et $\sin(\beta x)$.

Exemple 6.2.13

Évaluons les intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a) } \int e^x \cos(x) dx \qquad \text{b) } \int \sin(\ln(x)) dx \quad , \quad x > 0$$

a) Posons

$$I = \int e^x \cos(x) dx .$$

Nous avons $e^x \cos(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \cos(x)$. Donc $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$ et

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos(x) dx = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx . \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Même si cette expression n'est pas plus simple que l'intégrale du départ, nous sommes quand même sur la bonne voie. Utilisons une seconde fois la méthode d'intégration par parties pour évaluer l'intégrale

$$\int e^x \sin(x) dx .$$

Nous avons $e^x \sin(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \sin(x)$. Donc $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(x) dx &= \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx = -e^x \cos(x) + I . \end{aligned}$$

Si nous substituons cette expression dans (6.2.4), nous obtenons

$$I = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + I)$$

et, après avoir isolé I , nous trouvons que

$$I = \frac{1}{2} (e^x \sin(x) + e^x \cos(x))$$

est une primitive de $e^x \cos(x)$. Donc

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2} (e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) + C .$$

Nous aurions pu utiliser $e^x \cos(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = e^x$ lors de la première intégration par parties mais alors il aurait fallu utiliser $e^x \sin(x) = f(x) g'(x)$ pour $f(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = e^x$ lors de la deuxième intégration par parties.

b) Commençons par une substitution. Posons $x = e^y$ pour éliminer $\ln(x)$. Nous avons $dx = e^y dy$ et

$$\int \sin(\ln(x)) dx = \int \sin(y) e^y dy \Big|_{y=\ln(x)} .$$

C'est une intégrale du même type que celle que nous avons évalué en (a).

Posons

$$I = \int e^y \sin(y) dy .$$

Nous avons $e^y \sin(y) = f(y) g'(y)$ pour $g'(y) = e^y$ et $f(y) = \sin(y)$. Donc $g(y) = e^y$, $f'(y) = \cos(y)$ et

$$\begin{aligned} I &= \int e^y \sin(y) dy = \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= e^y \sin(y) - \int e^y \cos(y) dy \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

De plus, pour l'intégrale indéfinie

$$\int e^y \cos(y) dy ,$$

nous avons $e^y \cos(y) = f(y) g'(y)$ pour $g'(y) = e^y$ et $f(y) = \cos(y)$. Donc $g(y) = e^y$, $f'(y) = -\sin(y)$ et

$$\begin{aligned} \int e^y \cos(y) dy &= \int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \\ &= e^y \cos(y) + \int e^y \sin(y) dy = e^y \cos(y) + I . \end{aligned}$$

Si nous substituons cette expression dans (6.2.5), nous obtenons

$$I = e^y \sin(y) - (e^y \cos(y) + I)$$

et, après avoir isolé I , nous trouvons que

$$I = \frac{1}{2} (e^y \sin(y) - e^y \cos(y))$$

est une primitive de $e^y \sin(y)$. Ainsi,

$$\int e^y \sin(y) dy = \frac{1}{2} (e^y \sin(y) - e^y \cos(y)) + C .$$

Donc

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln(x)) dx &= \int \sin(y) e^y dy \Big|_{y=\ln(x)} = \frac{1}{2} (e^y \sin(y) - e^y \cos(y)) \Big|_{y=\ln(x)} + C \\ &= \frac{1}{2} (e^{\ln(x)} \sin(\ln(x)) - e^{\ln(x)} \cos(\ln(x))) + C \\ &= \frac{x}{2} (\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + C . \end{aligned}$$



Méthode de Weiestrass

Il existe une autre façon d'évaluer des intégrales de la forme $\int F(\cos(x), \sin(x)) dx$ où $F(\cos(x), \sin(x))$ est une fonction (rationnelle) de $\sin(x)$ et $\cos(x)$. Nous pouvons utiliser la substitution

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{pour} \quad -\pi < x < \pi \quad (6.2.6)$$

qui est due à Weiestrass. Cette substitution est équivalente à $x = 2 \arctan(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$dx = \frac{2}{t^2 + 1} dt . \quad (6.2.7)$$

De plus, grâce à la **formule de l'angle double pour la tangente**, nous avons

$$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1 = \left(\frac{2 \tan(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{2t}{1 - t^2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1 + t^2}{1 - t^2}\right)^2$$

si $t \neq \pm 1$. Donc $\sec(x) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$ donne

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} . \quad (6.2.8)$$

Cette formule est aussi valide pour $t = \pm 1$. Si $t = 1$, nous avons $x = \pi/2$ et ainsi $\cos(x) = 0$. Les deux côtés de (6.2.8) sont donc nuls. De même, si $t = -1$, nous avons $x = -\pi/2$ et ainsi $\cos(x) = 0$. Les deux côtés de (6.2.8) sont donc encore nuls. La relation

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 = \left(\frac{2t}{1 + t^2}\right)^2$$

donne

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}. \quad (6.2.9)$$

Exemple 6.2.14

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx$.

Nous utilisons la substitution (6.2.6) avec (6.2.7) et (6.2.9) pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx &= \int \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \left(\frac{2}{t^2 + 1} \right) dt = \int \frac{1}{t^2 + t + 1} dt \\ &= \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

Avec la substitution $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)$, nous obtenons $dy = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \Big|_{y=2(t+1/2)/\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(y) \Big|_{y=2(t+1/2)/\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right) + C. \end{aligned}$$

Finalement, puisque $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, nous trouvons

$$\int \frac{1}{2 + \sin(x)} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)\right) + C.$$



6.2.3 Fractions partielles

La méthode des fractions partielles permet de calculer des intégrales de la forme

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont deux polynômes. Il faut suivre les étapes suivantes pour calculer ce genre d'intégrales.

1. Si le degré de $p(x)$ est plus grand ou égal au degré de $q(x)$, nous divisons $p(x)$ par $q(x)$ pour obtenir

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

où le degré de $r(x)$ est plus petit que le degré de $q(x)$, et $s(x)$ est un polynôme (donc facile à intégrer).

2. Nous exprimons $q(x)$ comme un produit de facteurs irréductibles.

$$q(x) = A(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^{m_1}(x^2 + \beta_2x + \gamma_2)^{m_2} \dots$$

où $A, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \dots$ sont des constantes réelles et $n_1, n_2, \dots, m_1, m_2, \dots$ sont des entiers positifs. Nous assumons que les α_k et les (β_k, γ_k) sont distincts.

3. Nous exprimons $r(x)/q(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{q(x)} &= \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{n_1}}{(x - \alpha_1)^{n_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^2} + \dots + \frac{B_{m_1}x + C_{m_1}}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^{m_1}} + \dots \end{aligned}$$

où $A_1, A_2, \dots, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots$ sont des constantes.

4. Finalement, nous évaluons

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{q(x)} dx &= \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx \\ &= \int s(x) dx + \int \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} dx + \int \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} dx + \dots + \int \frac{A_{n_1}}{(x - \alpha_1)^{n_1}} dx \\ &+ \dots + \int \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)} dx + \int \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^2} dx \\ &+ \dots + \int \frac{B_{m_1}x + C_{m_1}}{(x^2 + \beta_1x + \gamma_1)^{m_1}} dx + \dots \end{aligned}$$

Exemple 6.2.15

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} dx$.

Étape 1 : Comme le numérateur est un polynôme de degré plus grand que le dénominateur, nous divisons pour obtenir

$$\frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = x + 5 + \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}.$$

Étape 2 : Nous avons la factorisation $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Étape 3 : Nous cherchons A et B tels que

$$\frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}.$$

Si nous exprimons les fractions sur un même dénominateur commun, l'égalité est satisfaite lorsque nous avons le même numérateur de chaque côté de l'égalité. C'est-à-dire, lorsque

$$19x - 30 = A(x - 3) + B(x - 2) = (A + B)x - (3A + 2B).$$

Si nous comparons les coefficients des puissances de x , nous trouvons $A + B = 19$ et $-(3A + 2B) = -30$. Donc $A = -8$ et $B = 27$.

Étape 4 :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \left(x + 5 - \frac{8}{x-2} + \frac{27}{x-3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 5x - 8 \ln|x-2| + 27 \ln|x-3| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \ln \left(\frac{|x-3|^{27}}{|x-2|^8} \right) + C. \end{aligned}$$



Remarque 6.2.16

Lorsque que les racines du dénominateur sont simples, nous avons une expression de la forme suivante à l'étape 3.

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_2}{(x - \alpha_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x - \alpha_n)}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les racines distinctes de $q(x)$. Il y a alors une façon simple de déterminer les valeurs de A_1, A_2, \dots, A_n . En mettant sur un dénominateur commun, nous obtenons au numérateur une équation de la forme

$$\begin{aligned} r(x) &= A_1(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) + A_2(x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) + \dots \\ &\quad + A_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Il suffit d'évaluer chacun des côtés de l'égalité précédente à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pour obtenir respectivement les valeurs de A_1, A_2, \dots, A_n .

Si nous utilisons cette méthode à l'exemple précédent, nous obtenons

$$19x - 30 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

Ainsi, $27 = B$ pour $x = 3$ et $8 = -A$ pour $x = 2$.



Exemple 6.2.17

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx$.

Étape 1 : Comme le numérateur est un polynôme de degré plus grand que le dénominateur, nous divisons pour obtenir

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} = x + 1 + \frac{1}{x^3 - x}.$$

Étape 2 : Nous avons la factorisation $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.

Étape 3 : Nous cherchons A, B et C tels que

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}.$$

Si nous exprimons les fractions sur un même dénominateur commun, nous obtenons l'égalité suivante pour les numérateurs.

$$1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$

Pour $x = 0$, nous obtenons $1 = -A$ et donc $A = -1$. Pour $x = 1$, nous obtenons $1 = 2B$ et donc $B = 1/2$. Finalement, pour $x = -1$, nous obtenons $1 = 2C$ et donc $C = 1/2$.

Étape 4 :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x} dx &= \int (x+1) dx + \int \frac{1}{x^3 - x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|(x-1)(x+1)| + C. \end{aligned}$$



L'exemple suivant ne fait partie en soit de la méthode d'intégration par fractions partielles. Nous avons déjà vu une intégrale semblable à l'exemple 6.2.4. Cependant, nous rencontrons souvent cette situation quand nous essayons d'utiliser la méthode d'intégration par fractions partielles. Il est donc important d'être capable de calculer de telles intégrales.

Exemple 6.2.18

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx$.

Étape 1 : Nous n'avons pas à diviser les polynômes car le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.

Étape 2 : Le polynôme $x^2 + 6x + 12$ est irréductible car il n'admet pas de racines réelles.

La méthode des fractions partielles ne s'applique pas. Complétons le carré du dénominateur pour obtenir $x^2 + 6x + 12 = (x+3)^2 + 3$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2 + 3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{(x+3)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx.$$

Si $y = \frac{x+3}{\sqrt{3}}$, alors $dy = \frac{1}{\sqrt{3}} dx$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{(x+3)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{(x+3)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \Big|_{y=(x+3)/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(y) \Big|_{y=(x+3)/\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$


Exemple 6.2.19

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} dx$.

Étape 1 : Nous n'avons pas à diviser les polynômes car le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur.

Étape 2 : Le dénominateur $(x-3)(x^2+6x+12)$ est déjà exprimé comme un produit de facteurs irréductibles car le polynôme $x^2+6x+12$ n'admet pas de racines réelles.

Étape 3 : Nous cherchons A , B et C tels que

$$\frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+12}.$$

Si nous exprimons les fractions sur un même dénominateur commun, nous obtenons l'égalité suivante pour les numérateurs.

$$4x+1 = A(x^2+6x+12) + (Bx+C)(x-3) = (A+B)x^2 + (6A-3B+C)x + (12A-3C).$$

Si nous comparons les coefficients des puissances de x , nous trouvons $A+B=0$, $6A-3B+C=4$ et $12A-3C=1$. Donc $A=1/3$, $B=-A$ et $C=1$.

Étape 4 :

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x+1}{x^2+6x+12} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{3} \int \frac{x-3}{x^2+6x+12} dx = \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{3} \int \frac{x-3}{(x+3)^2+3} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{3} \int \frac{x+3}{(x+3)^2+3} dx - \frac{1}{3} \int \frac{-6}{(x+3)^2+3} dx. \end{aligned}$$

Si $y = (x+3)^2$, alors $dy = 2(x+3) dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{(x+3)^2+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+3)^2+3} \times 2(x+3) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{y+3} dy \Big|_{y=(x+3)^2} = \frac{1}{2} \ln|y+3| \Big|_{y=(x+3)^2} + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \ln((x+3)^2+3) + C_1. \end{aligned}$$

De plus, si nous utilisons le résultat de l'exemple 6.2.18,

$$\int \frac{-6}{(x+3)^2+3} dx = -6 \int \frac{1}{x^2+6x+12} dx = -2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C_2.$$

Ainsi,

$$\int \frac{4x+1}{(x-3)(x^2+6x+12)} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln((x+3)^2 + 3) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C$$

où $C = -(C_1 + C_2)/3$. ♣

Exemple 6.2.20

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{1}{3 \sin(x) + \cos(x)} dx$.

Nous utilisons la substitution (6.2.6) avec (6.2.7), (6.2.8) et (6.2.9) pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3 \sin(x) + \cos(x)} dx &= \int \frac{1}{\frac{6t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \left(\frac{2}{t^2+1} \right) dt = \int \frac{2}{1+6t-t^2} dt \\ &= - \int \frac{2}{(t-(3+\sqrt{10}))(t-(3-\sqrt{10}))} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \int \left(\frac{1}{t-(3+\sqrt{10})} - \frac{1}{t-(3-\sqrt{10})} \right) dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\ln|t-(3+\sqrt{10})| - \ln|t-(3-\sqrt{10})| \right) + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t-(3+\sqrt{10})}{t-(3-\sqrt{10})} \right| + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\tan(x/2) - (3+\sqrt{10})}{\tan(x/2) - (3-\sqrt{10})} \right| + C. \end{aligned}$$

La méthode d'intégration par fractions partielles a été utilisée pour évaluer cet intégrale. ♣

6.2.4 Substitutions trigonométriques

Si l'intégrande contient un facteur de la forme $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$, une substitution trigonométrique pourrait être nécessaire.

l'intégrande contient	substitution
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin(t)$ ou $x = a \cos(t)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec(t)$

Pour ce genre de substitutions, nous utilisons la règle de substitution dans le sens inverse

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

La substitution $x = g(t)$ donne le côté droit.

Exemple 6.2.21

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ pour $-1 < x < 1$.

Posons $x = \sin(t)$ avec $-\pi/2 < t < \pi/2$. Donc $dx = \cos(t) dt$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sin^2(t) \sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) dt \\ &= \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) \cos(t)} dt = \int \frac{1}{\sin^2(t)} dt = \int \csc^2(t) dt \end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t) > 0$$

pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \int \csc^2(t) dt = -\cot(t) + C.$$

Or $x = \sin(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$ donne $\cos(t) = \sqrt{1-x^2} > 0$. Donc

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

et

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = -\cot(t) + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$



Exemple 6.2.22

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \sqrt{x^2+1} dx$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Posons $x = \tan(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Donc $dx = \sec^2(t) dt$ et

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2(t)+1} = \sqrt{\sec^2(t)} = |\sec(t)| = \sec(t) > 0$$

pour $-\pi/2 < t < \pi/2$. Ainsi,

$$I = \int \sqrt{x^2+1} dx = \int \sec(t) \sec^2(t) dt.$$

Nous utilisons la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette dernière intégrale. Nous avons $\sec(t) \sec^2(t) = f(t)g'(t)$ pour $f(t) = \sec(t)$ et $g'(t) = \sec^2(t)$. Donc $f'(t) = \sec(t) \tan(t)$, $g(t) = \tan(t)$ et

$$\begin{aligned} I &= \int \sec(t) \sec^2(t) dt = \int f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t) dt \\ &= \sec(t) \tan(t) - \int \sec(t) \tan^2(t) dt = \sec(t) \tan(t) - \int \sec(t) (\sec^2(t) - 1) dt \\ &= \sec(t) \tan(t) + \int \sec(t) dt - \int \sec(t) \sec^2(t) dt \\ &= \sec(t) \tan(t) + \int \sec(t) dt - I. \end{aligned}$$

Si nous résolvons pour I , nous trouvons

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int \sec^3(t) \, dt = \frac{1}{2} \left(\sec(t) \tan(t) + \int \sec(t) \, dt \right) .$$

À l'exemple 6.2.6(e), nous avons montré que

$$\int \sec(t) \, dt = \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C_1 .$$

Donc

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int \sec^3(t) \, dt = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) + \frac{1}{2} \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C$$

où $C = C_1/2$. Finalement, puisque $x = \tan(t)$ pour $-\pi/2 < t < \pi/2$, nous avons $\sec(t) = \sqrt{1 + \tan^2(t)} = \sqrt{1 + x^2}$. Ainsi,

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| + C .$$



Exemple 6.2.23

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \left(\frac{x-1}{x} \right)^{1/2} dx$ pour $x > 1$.

Nous avons

$$\int \left(\frac{x-1}{x} \right)^{1/2} dx = \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} dx .$$

Posons $x = y^2$ pour $y > 1$. Donc $dx = 2y \, dy$, $\sqrt{x} = y$ et

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \times 2y \, dy = 2 \int \sqrt{y^2-1} \, dy$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, nous utilisons la substitution $y = \sec(\theta)$ pour $0 < \theta < \pi/2$. Donc $dy = \sec(\theta) \tan(\theta) \, d\theta$ et $\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\sec^2(\theta)-1} = \tan(\theta)$ car $\tan(\theta) > 0$ pour $0 < \theta < \pi/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{y^2-1} \, dy &= \int \tan^2(\theta) \sec(\theta) \, d\theta \\ &= \int (\sec^2(\theta) - 1) \sec(\theta) \, d\theta = \int \sec^3(\theta) \, d\theta - \int \sec(\theta) \, d\theta \end{aligned}$$

À l'exemple 6.2.6(e), nous avons montré que

$$\int \sec(t) \, dt = \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C_1$$

et, à l'exemple précédent, nous avons montré que

$$\int \sec^3(t) \, dt = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) + \frac{1}{2} \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C_2 .$$

Ainsi,

$$\int \sqrt{y^2 - 1} dy = \int \tan^2(\theta) \sec(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sec(t) \tan(t) - \frac{1}{2} \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C_3$$

où $C_3 = C_2 - C_1$. Puisque $\sec(\theta) = y$ et $\tan(\theta) = \sqrt{y^2 - 1}$ pour $0 < \theta < \pi/2$, nous obtenons

$$\int \sqrt{y^2 - 1} dy = \frac{1}{2} y \sqrt{y^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |y + \sqrt{y^2 - 1}| + C_3 .$$

Finalement, puisque $y = \sqrt{x}$ pour $x > 1$, nous obtenons

$$\int \left(\frac{x-1}{x} \right)^{1/2} dx = 2 \int \sqrt{y^2 - 1} dy = \sqrt{x(x-1)} - \ln |\sqrt{x} + \sqrt{x-1}| + C$$

où $C = 2C_3$. ♣

Exemple 6.2.24

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx$ pour $x > 1$.

Si $x = \sec(t)$ pour $0 < t < \pi/2$, alors $dx = \tan(t) \sec(t) dt$ et

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2(t) - 1}}{\sec^3(t)} \sec(t) \tan(t) dt = \int \frac{\tan^2(t)}{\sec^2(t)} dt = \int \sin^2(t) dt ,$$

où nous avons utilisé l'identité

$$\sqrt{\sec^2(t) - 1} = \sqrt{\tan^2(t)} = |\tan x| = \tan x > 0$$

pour $0 < t < \pi/2$. Puisque $\sin^2(t) = (1 - \cos(2t))/2$, nous avons

$$\int \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2t)) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) + C .$$

Pour exprimer le résultat de notre intégrale en fonction de x seulement, notons que $t = \operatorname{arcsec}(x)$ car $x = \sec(t)$. De plus, $x = \sec(t)$ donne $\cos(t) = 1/x$ et

$$\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

car $x = \sec(t) > 1$ et $\sin(t) > 0$ pour $0 < t < \pi/2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) + C = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) + C \\ &= \frac{\operatorname{arcsec}(x)}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2} + C \end{aligned}$$

où l'identité trigonométrique $\sin(2t) = \sin(t+t) = 2 \sin(t) \cos(t)$ a été utilisé pour la deuxième égalité ci-dessus. ♣

Exemple 6.2.25

Évaluons l'intégrale indéfinie $\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} dx$ pour $x > 5/2$.

Nous pouvons récrire cette intégrale de la façon suivante.

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} dx .$$

Si $x = \frac{5}{2} \sec(t)$ pour $0 < t < \pi/2$, alors $dx = \frac{5}{2} \tan(t) \sec(t) dt$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 \sec^2(t) - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \left(\frac{5}{2} \tan(t) \sec(t)\right) dt \\ &= \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{(\sec^2(t) - 1)^{3/2}} dt = \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{(\tan^2(t))^{3/2}} dt \\ &= \frac{1}{50} \int \frac{\tan(t) \sec(t)}{\tan^3(t)} dt = \frac{1}{50} \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} dt \\ &= \frac{1}{50} \int \cot(t) \csc(t) dt = -\frac{1}{50} \csc(t) + C . \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité

$$\sec^2(t) - 1 = \tan^2(t) \quad \text{et} \quad \sqrt{\tan^2 x} = \tan x > 0$$

pour $0 < t < \pi/2$. Puisque $\sec(t) = \frac{2}{5} x$ donne $\cos(t) = \frac{5}{2x}$, nous obtenons

$$\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2x}\right)^2} = \frac{\sqrt{4x^2 - 25}}{2x}$$

car $x = \frac{5}{2} \sec(t) > \frac{5}{2}$ et $\sin(t) \geq 0$ pour $0 \leq t < \pi/2$.

Ainsi,

$$\int \frac{1}{(4x^2 - 25)^{3/2}} dx = -\frac{1}{50 \sin(t)} + C = -\frac{x}{25 \sqrt{4x^2 - 25}} + C .$$



6.3 Intégrales définies

Considérons la région R bornée par la courbe $y = e^{-x}$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$ (figure 6.1). La façon intuitive d'estimer l'aire A de cette région est de partitionner en petits rectangles cette région et de faire la somme de l'aire de chaque rectangle car il est simple de calculer l'aire d'un rectangle.

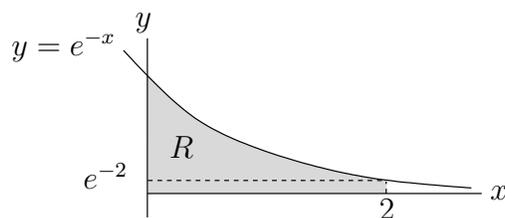


FIGURE 6.1 – La région bornée par la courbe $y = e^{-x}$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$

Les rectangles qui sont représentés à la figure 6.2 sont construits de la façon suivante. L'intervalle $[0, 2]$ est partagé en 10 sous-intervalles de même longueur. La longueur de chaque sous-intervalle est donc $2/10 = 1/5$. Nous obtenons 10 sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 1/5$, $x_2 = 2/5$, \dots , $x_{10} = 10/5 = 2$. Les 10 rectangles représentés sont les rectangles dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{-x_i} pour $i = 0, 1, 2, \dots, 9$.

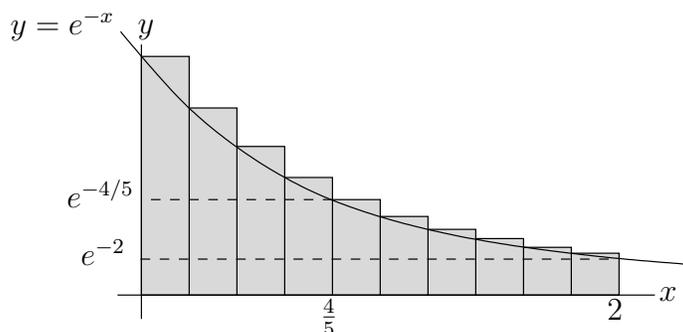


FIGURE 6.2 – Partition en 10 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur e^{-x_i}

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{-x_i} , est $e^{-x_i} \left(\frac{1}{5}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$G_{10} = e^0 \left(\frac{1}{5}\right) + e^{-1/5} \left(\frac{1}{5}\right) + e^{-2/5} \left(\frac{2}{5}\right) + \dots + e^{-9/5} \left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.9540114845 \dots$$

Nous pouvons dire que l'aire A de la région R est approximativement $G_{10} = 0.9540114845 \dots$. En fait, nous avons surestimé l'aire de la région R car nos rectangles recouvrent la région.

Le choix de 10 intervalles est arbitraire. Pour obtenir une meilleure approximation de l'aire de la région R , nous pourrions prendre plus d'intervalles. Par exemple, si nous partageons l'intervalle $[0, 2]$ en 20 sous-intervalles de même longueur. La longueur de chaque sous-intervalle est alors de $2/20 = 1/10$ et nous obtenons 20 intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, 19$ où $x_0 = 0, x_1 = 1/10, x_2 = 2/10 = 1/5, \dots, x_{20} = 20/10 = 2$. Comme dans le cas précédent avec 10 intervalles, nous utilisons les rectangles dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{-x_i} pour $i = 0, 1, 2, \dots, 19$ (figure 6.3).

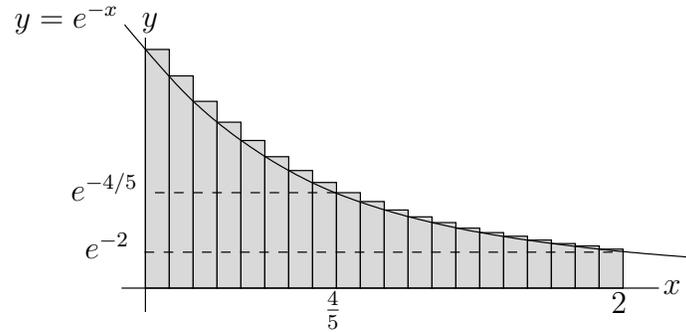


FIGURE 6.3 – Partition en 20 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur e^{-x_i}

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est e^{-x_i} , est maintenant $e^{-x_i} \left(\frac{1}{10}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$\begin{aligned} G_{20} &= e^0 \left(\frac{1}{10}\right) + e^{-1/10} \left(\frac{1}{10}\right) + e^{-1/5} \left(\frac{1}{10}\right) + e^{-3/10} \left(\frac{1}{10}\right) + \dots \\ &\quad + e^{-9/5} \left(\frac{1}{10}\right) + e^{-19/10} \left(\frac{1}{10}\right) \approx 0.9086183864 \dots \end{aligned}$$

et nous obtenons que l'aire A de la région R est approximativement $G_{20} = 0.9086183864 \dots$. Nous avons encore surestimé l'aire de la région R . Par contre, cette surestimation est moins grande que la précédente.

Si k est le nombre de rectangles utilisés, nous avons que la somme G_k de l'aire des k rectangles approche l'aire A de la région R lorsque k augmente. Les sommes G_k sont appelées des **sommes à gauche** car nous définissons la hauteur d'un rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ comme étant la valeur de e^{-x} à l'extrémité gauche x_i de l'intervalle.

Remarque 6.3.1

Lorsque la fonction f est décroissante, comme c'est le cas pour $f(x) = e^{-x}$, les sommes à gauche G_k sont toutes des surestimations de l'aire A de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = a, x = b$ et $y = 0$. ♠

Revenons à la partition de l'intervalle $[0, 2]$ en 10 sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, 9$ où $x_0 = 0, x_1 = 1/5, x_2 = 2/5, \dots, x_9 = 9/5$ et $x_{10} = 2$. Ces intervalles sont tous de longueur égale à $1/5$. Considérons maintenant les rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{-x_{i+1}}$ (figure 6.4).

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est $e^{-x_{i+1}}$, est

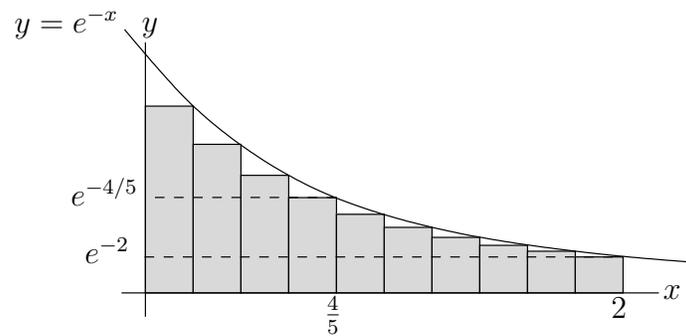


FIGURE 6.4 – Partition en 10 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{-x_{i+1}}$

$e^{-x_{i+1}} \left(\frac{1}{5}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$D_{10} = e^{-1/5} \left(\frac{1}{5}\right) + e^{-2/5} \left(\frac{1}{5}\right) + e^{-3/5} \left(\frac{1}{5}\right) + \dots + e^{-2} \left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.7810785411 \dots$$

Nous pouvons dire que l'aire A de la région R est approximativement $D_{10} = 0.7810785411 \dots$. En fait, nous avons sous-estimé l'aire A de la région R car nos rectangles sont tous à l'intérieur de la région R .

Finalement, nous considérons les 20 rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{-x_{i+1}}$ où les sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, 19$ sont bornées par les points $x_0 = 0, x_1 = 1/10, x_2 = 1/5, \dots, x_{19} = 19/10$ et $x_{20} = 2$, Chaque intervalle est de longueur égale à $1/10$ (figure 6.5).

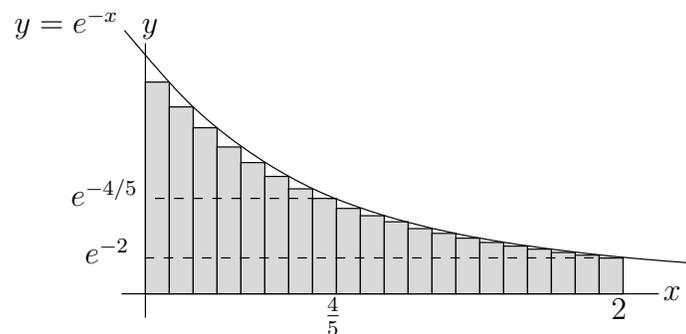


FIGURE 6.5 – Partition en 20 petits rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $e^{-x_{i+1}}$

L'aire d'un rectangle, dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et la hauteur est $e^{-x_{i+1}}$, est maintenant $e^{-x_{i+1}} \left(\frac{1}{10}\right)$. La somme de l'aire de chaque rectangle est donc

$$D_{20} = e^{-1/10} \left(\frac{1}{10}\right) + e^{-1/5} \left(\frac{1}{10}\right) + e^{-3/10} \left(\frac{1}{10}\right) + \dots$$

$$+ e^{-19/10} \left(\frac{1}{10} \right) + e^{-2} \left(\frac{1}{10} \right) \approx 0.8221519147 \dots$$

Nous pouvons dire que l'aire A de la région R est approximativement $D_{20} = 0.8221519147 \dots$. Nous avons toujours une sous-estimation de l'aire A de la région R car nos rectangles sont tous à l'intérieur de la région R mais la sous-estimation est plus grande que lorsque nous utilisons seulement 10 rectangles.

Les sommes D_k sont appelées des **sommes à droite** car nous définissons la hauteur d'un rectangle de base $[x_i, x_{i+1}]$ comme étant la valeur de e^x à l'extrémité droite x_{i+1} de l'intervalle. Comme pour les sommes à gauche, si k est le nombre de rectangles utilisés, nous avons que la somme D_k de l'aire des k rectangles approche l'aire A de la région R lorsque k augmente.

Remarque 6.3.2

Lorsque la fonction f est décroissante, comme c'est le cas pour $f(x) = e^{-x}$, les sommes à droite D_k sont toutes des sous-estimations de l'aire A de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$. ♠

Pour 1000 sous-intervalles de $[0, 2]$, nous obtenons

$$G_{1000} = 0.8655296697 \dots \quad \text{et} \quad D_{1000} = 0.8638003402 \dots$$

Si nous combinons les sommes à droite et à gauche que nous avons calculées, nous obtenons

$$G_{10} > G_{20} > G_{1000} > A > D_{1000} > D_{20} > D_{10} .$$

La valeur exacte de l'aire A de la région R est $A = 0.8646647167 \dots$

Comme le symbole de sommation \sum sera très utile, il est probablement important de revoir sa définition pour le bénéfice du lecteur.

Définition 6.3.3

Soit $\{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$, un ensemble de nombres indexés par les entiers. Si n et m sont deux entiers tels que $n \leq m$, alors la somme des nombres a_n, a_{n+1}, \dots, a_m est dénotée

$$\sum_{i=n}^m a_i \equiv a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{m-1} + a_m .$$

Si nous partitionnons l'intervalle $[0, 2]$ en k sous-intervalles de longueur $2/k$, nous obtenons les intervalles de base $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_0 = 0$, $x_1 = 2/k$, $x_2 = 4/k$, \dots , $x_{k-1} = 2(k-1)/k$ et $x_k = 2$.

Si nous utilisons le symbole de sommation, nous avons

$$G_k = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-x_i} \quad \text{et} \quad D_k = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-x_{i+1}} = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k e^{x_i}$$

où $2/k$ est la longueur de la base des rectangles. De plus,

$$G_1 > \dots > G_k > G_{k+1} > A > D_{k+1} > D_k > \dots > D_1$$

pour tout $k \geq 1$ et l'aire A de la région R est donnée par

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k .$$

6.3.1 Définition

La définition de l'intégrale définie que nous donnons généralise le calcul de l'aire qui a été fait à la section précédente pour la région R bornée par la courbe $y = e^{-x}$ et les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$.

Avant de définir l'intégrale dans le cas général, il faut décrire les fonctions pour lesquelles l'intégrale existera. La raison pour ces restrictions sur les fonctions que nous allons intégrer deviendra plus clair lors de l'étude des intégrales impropres que nous ferons prochainement.

Définition 6.3.4

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est **bornée** s'il existe une constante M telle que $|f(x)| < M$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$.

Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est **continue par morceaux** s'il y a un nombre fini de points c où la fonction f n'est pas continue et, à ces points c , nous avons que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c+ \\ x \in [a, b]}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c- \\ x \in [a, b]}} f(x)$$

existent.

Exemple 6.3.5

La fonction $f(x) = [x]$, où $[x]$ est le plus grand entier plus petit que ou égale à x , est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle fermé de \mathbb{R} . Le graphe de cette fonction est donné à la figure 6.6. ♣

Remarquons qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé est une fonction bornée.

Définition 6.3.6 (Somme de Riemann)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ une partition \mathcal{P} quelconque de l'intervalle $[a, b]$. La longueur d'un sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. La **mesure** de la partition \mathcal{P} est définie par

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{ \Delta x_i : 0 \leq i < k \} .$$

Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, nous choisissons x_i^* dans cet intervalle. La somme

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x_i$$

est une **somme de Riemann** pour la partition \mathcal{P} .

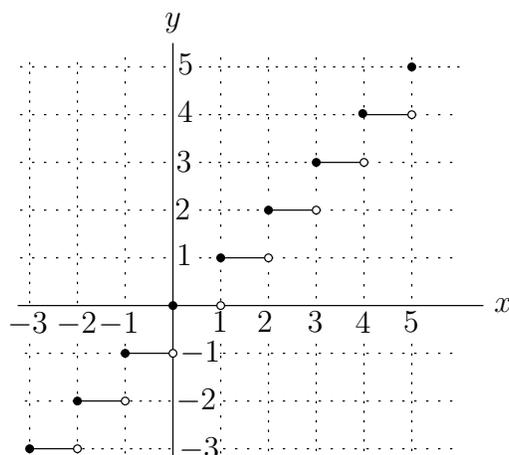


FIGURE 6.6 – Graphe de la fonction $f(x) = [x]$ pour $-3 \leq x \leq 5$.

Une même partition supporte un nombre infini de sommes de Riemann selon le choix des points $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$.

Définition 6.3.7

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue par morceaux. L'**intégrale définie** de f de a à b est le nombre I qui satisfait la condition suivante.

$$S_{\mathcal{P}} \rightarrow I \quad \text{lorsque} \quad \|\mathcal{P}\| \rightarrow 0 .$$

Nous écrivons $\int_a^b f(x) dx = I$.

Les nombres a et b sont appelés les **bornes d'intégration**. L'intervalle $[a, b]$ est appelé l'**intervalle d'intégration**. La fonction f est appelée l'**intégrande** et x est la **variable d'intégration**. Le symbole dx indique que la variable d'intégration est x .

Remarque 6.3.8

$$S_{\mathcal{P}} \rightarrow I \quad \text{lorsque} \quad \|\mathcal{P}\| \rightarrow 0 .$$

veut dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|I - S_{\mathcal{P}}| < \epsilon$$

quelle que soit la partition \mathcal{P} de $[a, b]$ avec $\|\mathcal{P}\| < \delta$ et quelle que soit le choix des points $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ associé à la partition \mathcal{P} . 

La section 6.3.5 présente une définition plus générale de l'intégrale définie de Riemann.

Nous insistons sur le fait que le symbole dx n'est pas une variable, il indique seulement que la variable d'intégration est x . Aucune manipulation algébrique avec dx n'est permise.

Il découle de la définition de l'intégrale définie que nous pouvons estimer la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ en choisissant une partition très fine (i.e. $\|\mathcal{P}\|$ très petit) avec une somme de Riemann subordonnée à cette partition.

Normalement, nous choisissons des partitions \mathcal{P} telles que Δx_i est constant.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour $k \in \mathbb{N}^+$, posons $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i \Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Les points $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ forment une partition \mathcal{P} de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de même longueur Δx . Nous avons que $\|\mathcal{P}\| = \Delta x = (b-a)/k$ tend vers 0 lorsque k tend vers plus l'infini.

Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, choisissons x_i^* dans cet intervalle. Donc $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$ pour $0 \leq i < k$. Nous obtenons la somme de Riemann

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x .$$

Cette somme représente la région en gris illustrée à la figure 6.7.

l'intégrale définie de f de a à b peut être calculée à l'aide de la formule

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k . \quad (6.3.1)$$

Remarque 6.3.9

1. La limite (6.3.1) existe toujours car f est continue par morceau. Cela pourrait être démontré à partir de la définition rigoureuse de l'intégrale donnée à la section 6.3.5 ci-dessous.
2. Quelques rectangles de base $[x_i, x_{i+1}]$ et de hauteur $|f(x_i^*)|$ sont représentés à la figure 6.7. Comme $f(x_i^*)$ peut être négatif, l'expression $f(x_i^*) \Delta x$ représente l'aire du rectangle à un signe près.
3. Si $x_i^* = x_i$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que x_i^* est l'extrémité gauche de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, alors $S_k = G_k$, la somme à gauche pour k rectangles.
4. Si $x_i^* = x_{i+1}$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que x_i^* est l'extrémité droite de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, alors $S_k = D_k$, la somme à droite pour k rectangles.
5. Si x_i^* est le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i < k$, c'est-à-dire que $x_i^* = (x_i + x_{i+1})/2$ pour $0 \leq i < k$, alors S_k est **une somme de Riemann pour le point milieu** que nous dénotons M_k .



Exemple 6.3.10

Estimons $\int_{-1}^2 (1+x^2) dx$. Pour ce faire, nous allons utiliser les sommes à gauche, les sommes à droites et les sommes pour le point milieu avec $n = 3$ et $n = 6$ sous-intervalles.

Nous utiliserons le graphe de f pour déterminer laquelle des estimations que nous avons trouvées donne la meilleure approximation de l'intégrale ; c'est-à-dire, de l'aire sous la courbe $y = f(x) = 1 + x^2$ pour $-1 \leq x \leq 2$.

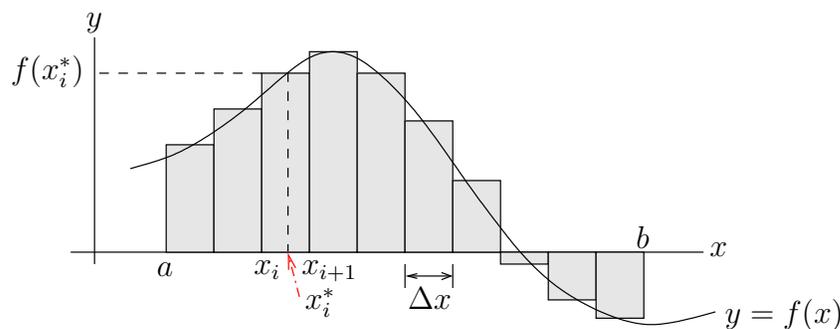


FIGURE 6.7 – Forme générale des rectangles utilisés pour définir l'intégrale définie

Pour $n = 3$, nous avons $\Delta x = (2 - (-1))/3 = 1$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i$ pour $i = 0, 1, 2$ et 3 . Nous obtenons les trois intervalles $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 2]$.

Pour $n = 6$, nous avons $\Delta x = (2 - (-1))/6 = 1/2$ et $x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i/2$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 6$. Nous obtenons les six intervalles $[-1, -0.5]$, $[-0.5, 0]$, \dots , $[1.5, 2]$.

La somme à droite avec $n = 3$ est

$$D_3 = (f(0) + f(1) + f(2))(1) = 8 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx D_3 = 8$.

La somme à droite avec $n = 6$ est

$$D_6 = (f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2))(0.5) = 6.875 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx D_6 = 6.875$.

La somme à gauche avec $n = 3$ est

$$G_3 = (f(-1) + f(0) + f(1))(1) = 5 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx G_3 = 5$.

La somme à gauche avec $n = 6$ est

$$G_6 = (f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5))(0.5) = 5.375 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1 + x^2) dx \approx G_6 = 5.375$.

La somme pour le point milieu avec $n = 3$ est

$$M_3 = (f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5))(1) = 5.75 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1+x^2) dx \approx S_3 = 5.75$.

La somme pour le point milieu avec $n = 6$ est

$$M_6 = (f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75))(0.5) = 5.9375 .$$

Donc $\int_{-1}^2 (1+x^2) dx \approx S_6 = 5.9375$.

La meilleure approximation est donnée par la somme M_6 .

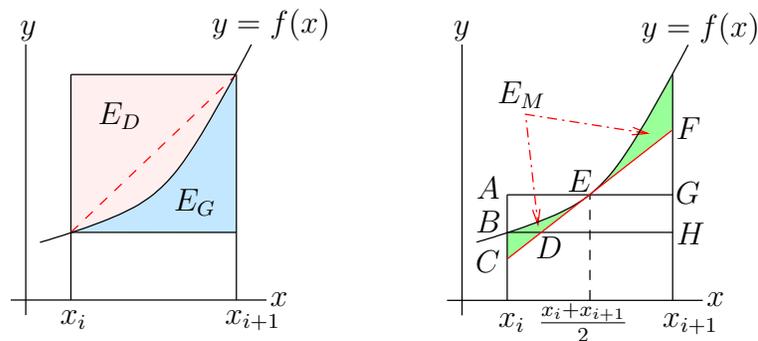


FIGURE 6.8 – Figure utilisée pour comparer l'efficacité des sommes à droite, des sommes à gauche et des sommes pour le point milieu à l'exemple 6.3.10

Considérons le dessin à gauche qui est donné à la figure 6.8. Il représente le graphe de f entre x_i et x_{i+1} . L'aire de la région E_D (en rose) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle donné par la somme à droite. L'aire de la région E_G (en bleu) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle donné par la somme à gauche. Comme f est positive, croissante et convexe, nous avons que l'aire de la région E_D est plus grande que l'aire de la région E_G . La somme à gauche donne donc une meilleure estimation de la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ que la somme à droite.

Considérons maintenant le dessin à droite qui est donné à la figure 6.8. Il représente le graphe de f entre x_i et x_{i+1} . L'aire de la région E_M (en vert) représente l'erreur entre la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ et l'aire du rectangle $\square x_i A G x_{i+1}$ donné par la somme pour le point milieu. Remarquons que l'aire du rectangle $\square x_i A G x_{i+1}$ est égale à l'aire du trapèze $\square x_i C F x_{i+1}$ car les triangles $\triangle ACE$ et $\triangle GFE$ sont congruents puisque $|\overline{AE}| = |\overline{EG}|$, $|\overline{CE}| = |\overline{EF}|$ et $\angle AEC = \angle GEF$.

Comme l'aire du rectangle $\square x_i B H x_{i+1}$ donné par la somme à gauche est plus petite que l'aire du rectangle $\square x_i A G x_{i+1}$ donné par la somme pour le point milieu qui elle est plus petite que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, nous en concluons que la somme pour le point milieu donne une meilleure estimation de la valeur de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ que la somme à gauche.

En conclusion, quand f est positive, croissante et convexe, la somme pour le point milieu donne la meilleure approximation de l'intégrale de f .

Quand f est positive, décroissante et convexe, Un raisonnement semblable montre que la somme pour le point milieu donne encore la meilleure approximation de l'intégrale de f . La seule différence dans ce cas est que la somme à droite donne une meilleure estimation de l'intégrale de f que la somme à gauche. Nous invitons le lecteur à vérifier cette conclusion.

De plus, nous déduisons du graphe de f à la figure 6.8 que, dans le cas d'une fonction convexe, l'aire du rectangle donné par la somme pour le point milieu est toujours inférieure à $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$. La somme pour le point milieu est donc une sous-estimation de la valeur de l'intégrale.

En conséquence, puisque $M_3 < M_6$, nous avons que M_6 est la meilleure approximation de l'intégrale.

Il y a cependant une contrainte majeure à la justification que nous venons de donner. Notre justification est basée sur la propriété que la fonction ne change pas de signe, de croissante à décroissante et vice-versa, ou de courbure dans un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. ♣

6.3.2 Propriétés de l'intégrale définie

Nous déduisons du deuxième item de la remarque 6.3.9 ci-dessus que si $f(x) \geq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

où A est l'aire de la région R en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre $x = a$ et $x = b$. Par contre, si $f(x) \leq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = -A$$

où A est l'aire de la région R au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x , et entre $x = a$ et $x = b$. Si f change de signe à un seul point c de l'intervalle $[a, b]$ comme c'est le cas pour la fonction f dont le graphe est donné à la figure 6.9, alors

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2,$$

où A_1 est l'aire de la région R_1 et A_2 est l'aire de la région R_2 . La région R_1 est la région en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre $x = a$ et $x = c$. La région R_2 est la région au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x , et entre $x = c$ et $x = b$.

Il est parfois facile de calculer l'intégrale d'une fonction si cette fonction et l'intervalle d'intégration possèdent certaines symétries. Par exemple, si f est une fonction impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout x), alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

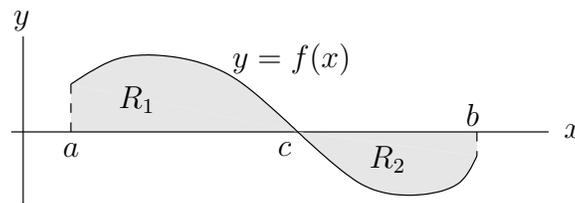


FIGURE 6.9 – L'intégrale d'une fonction f qui change de signe à un seul point c comme c'est le cas ci-dessus donne l'aire de la région R_1 moins l'aire de la région R_2 .

La justification de ce résultat est fournie par le graphe de la fonction f donné à la figure 6.10. Soit A_1 l'aire de la région R_1 au-dessus de la courbe $y = f(x)$, en dessous de l'axe des x , et entre les droites $x = -a$ et $x = 0$. Soit A_2 l'aire de la région R_2 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre les droites $x = 0$ et $x = a$. Si f est une fonction impaire $A_1 = A_2$ et

$$\int_{-a}^a f(x) dx = A_2 - A_1 = 0.$$

Si f est une fonction paire (i.e. $f(-x) = f(x)$ pour tout x), alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

La justification de ce résultat est fournie par le graphe de la fonction f donné à la figure 6.11. Soit A_1 l'aire de la région R_1 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre les droites $x = -a$ et $x = 0$. Soit A_2 l'aire de la région R_2 en dessous de la courbe $y = f(x)$, au-dessus de l'axe des x , et entre les droites $x = 0$ et $x = a$. Si f est une fonction paire alors $A_1 = A_2$ et

$$\int_{-a}^a f(x) dx = A_2 + A_1 = 2A_1 = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Nous insistons sur le fait que, dans les deux cas précédents, la borne supérieure d'intégration est la réflexion par rapport à l'origine de la borne inférieure d'intégration.

Définition 6.3.11

Si l'intégrale de f de a à b existe, nous définissons l'intégrale de f de b à a par

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Les propriétés suivantes découlent de la définition de l'intégrale :

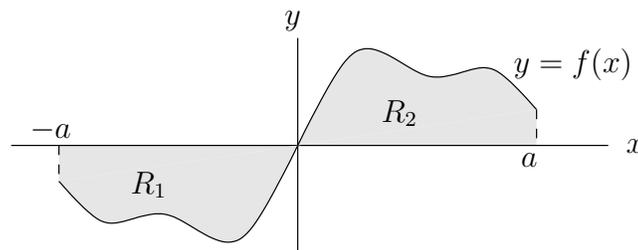


FIGURE 6.10 – Graphe d’une fonction impaire sur un domaine $[-a, a]$ symétrique par rapport à l’origine. Les régions R_1 et R_2 ont la même aire.

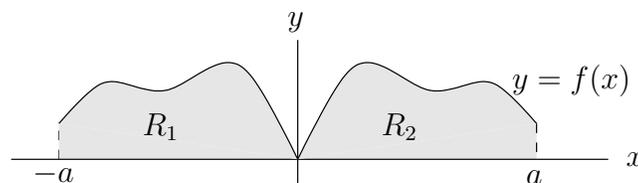


FIGURE 6.11 – Graphe d’une fonction paire sur un domaine $[-a, a]$ symétrique par rapport à l’origine. Les régions R_1 et R_2 ont la même aire.

Théorème 6.3.12

Soit a , b et c trois nombres réels. Si f et g sont deux fonctions intégrables sur un intervalle qui contient a , b et c , et si k est un nombre réel, alors

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx ,$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Le graphe de la fonction f donné à La figure 6.9 fournit une interprétation graphique de la dernière règle du théorème précédent.

6.3.3 Évaluations des intégrales définies

Exemple 6.3.13

Utilisons la définition de l’intégrale définie pour calculer l’aire de la région R bornée par la

courbe $y = f(x) = x^2$ et les droites $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$ (figure 6.12).

Soit k un entier positif. Nous avons $\Delta x = 2/k$ et $x_i = 1 + 2i/k$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Les intervalles sont de la forme

$$[x_i, x_{i+1}] = \left[1 + \frac{2i}{k}, 1 + \frac{2(i+1)}{k} \right]$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, nous choisissons x_i^* comme étant la limite à gauche de l'intervalle ; c'est-à-dire,

$$x_i^* = x_i = 1 + \frac{2i}{k}$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

La somme à gauche G_k est

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{2i}{k} \right)^2 \frac{2}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 + \frac{4i}{k} + \frac{4i^2}{k^2} \right) \frac{2}{k} \\ &= \frac{2}{k} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} 1 \right)}_{=k} + \frac{8}{k^2} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} i \right)}_{=k(k-1)/2} + \frac{8}{k^3} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} i^2 \right)}_{=k(k-1)(2k-1)/6} \\ &= 2 + \frac{4(k-1)}{k} + \frac{4(k-1)(2k-1)}{3k^2} \\ &= \frac{26}{3} - \frac{16}{3k} + \frac{4}{3k^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{26}{3} - \frac{16}{3k} + \frac{4}{3k^2} \right) = \frac{26}{3}.$$



Exemple 6.3.14

Utilisons la définition de l'intégrale définie pour calculer $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$.

Soit k un entier positif. Nous avons $\Delta x = 4/k$ et $x_i = -2 + 4i/k$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Les intervalles sont de la forme

$$[x_i, x_{i+1}] = \left[-2 + \frac{4i}{k}, -2 + \frac{4(i+1)}{k} \right]$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, nous choisissons x_i^* comme étant la limite à gauche de l'intervalle ; c'est-à-dire,

$$x_i^* = x_i = -2 + \frac{4i}{k}$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

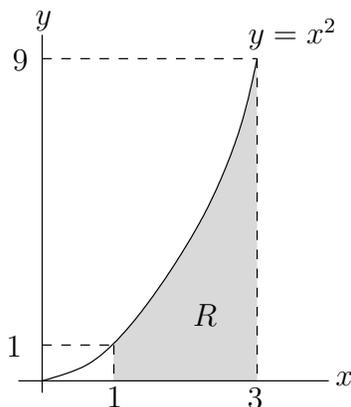


FIGURE 6.12 – L'aire de la région R définie à l'exemple 6.3.13 est donné par l'intégrale de $f(x) = x^2$ pour $1 \leq x \leq 3$

La somme à gauche G_k est

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(4 - \left(-2 + \frac{4i}{k} \right)^2 \right) \frac{4}{k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-16i^2}{k^2} + \frac{16i}{k} \right) \frac{4}{k} \\ &= \frac{-64}{k^3} \sum_{i=0}^{k-1} i^2 + \frac{64}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{-64}{k^3} \left(\frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \right) + \frac{64}{k^2} \left(\frac{k(k-1)}{2} \right) \\ &= -\frac{64}{3} + \frac{32}{k} - \frac{32}{3k^2} + 32 - \frac{32}{k} = \frac{32}{3} - \frac{32}{3k^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{3k^2} \right) = \frac{32}{3}.$$



Exemple 6.3.15

Quelle est la valeur de la limite suivante ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4}.$$

Remarquons que la somme

$$\sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^3 \frac{1}{n}$$

est une somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\int_0^1 x^3 dx$. En effet, soit $\Delta x = \frac{1}{n}$ et $x_i = i\Delta x = \frac{i}{n}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Nous obtenons la somme à droite suivante pour

$$\int_0^1 x^3 dx.$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} = \int_0^1 x^3 dx.$$

Nous allons voir plus loin comment calculer cette intégrale sans faire appel aux sommes de Riemann. ♣

Exemple 6.3.16

Quelle est la valeur de la limite suivante ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^2.$$

Remarquons que la somme

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2i}{n} \right)^2 \frac{2}{n},$$

est une somme de Riemann à droite pour l'intégrale $\int_2^4 \frac{x^2}{2} dx$. En effet, soit $\Delta x = \frac{2}{n}$ et $x_i = 2 + i\Delta x = 2 + \frac{2i}{n}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Nous obtenons la somme à droite suivante pour $\int_2^4 \frac{x^2}{2} dx$.

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2} \Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2i}{n} \right)^2 \frac{2}{n}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n^{1/2}} + \frac{2i}{n^{3/2}} \right)^2 = \int_2^4 \frac{x^2}{2} dx.$$

♣

6.3.4 Déplacement

Le problème que nous considérons dans la présente section est classique. Nous montrons comment l'intégrale peut être utilisée pour déterminer la distance parcourue par une voiture si nous connaissons sa vitesse en fonction du temps.

Soit $v(t)$, la vitesse en km/h d'une voiture au temps t en heures. Si nous voulons estimer la distance parcourue par la voiture entre $t = a$ et $t = b$ heures, nous divisons l'intervalle de temps $[a, b]$ en (petits) sous-intervalles de même longueur et nous supposons que la vitesse de la voiture sur chacun des sous-intervalles de temps est constante.

Soit $k > 0$. Posons $\Delta t = (b - a)/k$ et $t_0 = a$, $t_1 = a + \Delta t$, $t_2 = a + 2 \Delta t$, $t_3 = a + 3 \Delta t$, \dots , $t_k = a + k \Delta t = b$. Si $v(t_i^*)$ est la vitesse de la voiture mesurée au temps t_i^* dans l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ et si nous supposons que la voiture a voyagé à une vitesse constante durant cet intervalle de temps, alors la distance parcourue durant cet intervalle de temps est $v(t_i^*) \Delta t$ km. Notons que la longueur de l'intervalle de temps Δt est en heures et la vitesse $v(t)$ est en km/h, ainsi $v(t_i^*) \Delta t$ est bien en kilomètres.

Si nous faisons cela pour chaque sous-intervalle de la forme $[t_i, t_{i+1}]$, nous trouvons que la distance parcourue par la voiture entre a et b heures est approximativement

$$\sum_{i=0}^{k-1} v(t_i^*) \Delta t .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale de la fonction v de a à b . Si nous laissons k tendre vers l'infini, nous obtenons que la distance parcourue entre a et b heures est

$$p(b) - p(a) = \int_a^b v(t) dt \quad (6.3.2)$$

où $p(t)$ est la position de la voiture au temps t .

La vitesse moyenne v_m de la voiture entre a et b heures est

$$v_m = \frac{p(b) - p(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b v(t) dt .$$

Remarque 6.3.17

Puisque p est une primitive de v car $p'(t) = v(t)$ pour tout t , l'équation (6.3.2) suggère la méthode suivante pour évaluer l'intégrale définie d'une fonction f . Si F est une primitive de f , alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Est-ce vrai pour toute fonction f ? Nous donnerons une réponse affirmative à cette question pour les fonctions continues f lorsque nous présenterons le Théorème fondamental du calcul.



Exemple 6.3.18

Antoine et Antoinette travaillent tous les deux sur la colline parlementaire à Ottawa. Comme ils travaillent pour des partis politiques différents, ils ne se connaissent pas. Ils ont quand même un intérêt commun pour la peinture et décident d'aller à Montréal pour visiter le Musée d'Arts Contemporain. Ils partent tous les deux pour Montréal après leur journée d'ouvrage du vendredi. Antoine part à 17h00 et Antoinette à 18h00. Ils arrivent au Musée d'Arts Contemporain en même temps.

Nous retrouvons à la figure 6.13 le graphe de la vitesse en fonction du temps pour la voiture d'Antoinette ainsi celui pour la voiture d'Antoine lors de leur voyage pour se rendre à Montréal. $v_1(t)$ est la vitesse de la voiture d'Antoine au temps t en heures et $v_2(t)$ est la vitesse de la voiture d'Antoinette au temps t en heures. Vérifiez qu'ils parcourent 210 km chacun.

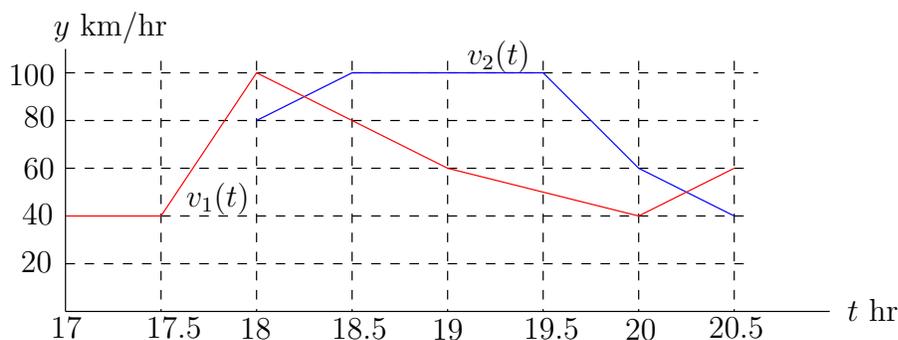


FIGURE 6.13 – La vitesse en fonction du temps pour les voitures d’Antoine et d’Antoinette

a) Quelle distance a parcouru Antoine quand Antoinette part ?

La distance parcourue par Antoine après la première heure est l’intégrale de la vitesse v_1 de $t = 17$ à $t = 18$. Cette intégrale correspond à l’aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 18$. Nous trouvons 55 km.

b) À quel moment la distance entre Antoine et Antoinette est la plus grande ? Quelle est cette distance ?

Le seul moment où la distance entre Antoine et Antoinette peut passer de croissante à décroissante et vice-versa est lorsque la voiture d’Antoine et la voiture d’Antoinette vont à la même vitesse. Cela arrive à $t = 18.25$ (i.e. 18h15) et $t = 20.25$ (i.e. 20h15).

Avant $t = 18.25$, Antoine va plus vite que Antoinette. À $t = 18.25$, la distance parcourue par Antoine est l’aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 18.25$, soit 78.75 km, et la distance parcourue par Antoinette est l’aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq 18.25$, soit 21.25 km. Antoine a donc $78.75 - 21.25 = 57.5$ km. d’avance sur Antoinette.

Entre $t = 18.25$ et $t = 20.25$, la voiture d’Antoinette va plus vite que celle d’Antoine et Antoinette gagne du terrain sur Antoine.

À $t = 20.25$, la distance parcourue par Antoine est l’aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq 20.25$, soit 196.25 km, et la distance parcourue par Antoinette est l’aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq 20.25$, soit 198.75 km. Antoinette a maintenant $198.75 - 196.25 = 2.5$ km. d’avance sur Antoine.

Entre $t = 20.25$ et $t = 20.50$, la voiture d’Antoine va plus vite que celle d’Antoinette et Antoine gagne du terrain sur Antoinette pour arriver au Musée d’Arts Contemporain en même temps que Antoinette.

La plus grande distance entre la voiture d’Antoine et d’Antoinette est donc de 57.5 km.

c) À quel moment Antoinette rattrape-t-elle Antoine ?

Si T est le temps où Antoinette rattrape Antoine, il faut que l’aire sous la courbe $y = v_1(t)$ pour $17 \leq t \leq T$ soit égale à l’aire sous la courbe $y = v_2(t)$ pour $18 \leq t \leq T$.

À $T = 20$ (i.e. 20h00), Antoine et Antoinette ont parcouru 185 km. Après 20h00, Antoinette devance Antoine.

L'histoire ne dit pas si Antoine et Antoinette se sont rencontrés au Musée d'Arts Contemporain. ♣

6.3.5 L'intégrale de Riemann (Stieljes)

La définition 6.3.7 de l'intégrale est valable pour les fonctions continues par morceaux. Le fait que l'intégrande soit une fonction continue par morceaux permet de démontrer que la limite en (6.3.1) ne dépend pas du choix de partitions de l'intervalle d'intégration et du choix des points x_i^* .

La définition de l'intégrale définie d'une fonction que nous donnons dans cette section généralise celle donnée à la définition 6.3.7.

Nous créditons Riemann (et Stieljes) pour la définition de l'intégrale définie que voici.

Soit f , une fonction bornée sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Soit $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$, une partition de l'intervalle $[a, b]$. C'est-à-dire que $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k = b$.

Pour $0 \leq i < k$, nous posons $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$.

Δx_i est la longueur de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. m_i est la plus grande valeur telle que $m_i \leq f(x)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et M_i est la plus petite valeur telle que $M_i \geq f(x)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

La **somme inférieure** pour f sur l'intervalle $[a, b]$ associée à \mathcal{P} est

$$L_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k-1} m_j \Delta x_j$$

(figure 6.14) et la **somme supérieure** pour f sur l'intervalle $[a, b]$ associée à \mathcal{P} est

$$U_{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{k-1} M_j \Delta x_j$$

(figure 6.15).

Soit

$$L = \sup\{L_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ est une partition de l'intervalle } [a, b]\}$$

et

$$U = \inf\{U_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \text{ est une partition de l'intervalle } [a, b]\}.$$

Si $U = L$, nous disons que f est **intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle** $[a, b]$ et nous écrivons

$$\int_a^b f(x) dx = L = U .$$

Les fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ sont intégrables au sens de Riemann et la formule donnée en (6.3.1) est satisfaite.

Nous utilisons la formule (6.3.1) pour calculer les intégrales définies de fonctions continues par morceaux car elle est plus simple que celle que nous venons de donner ci-dessus.

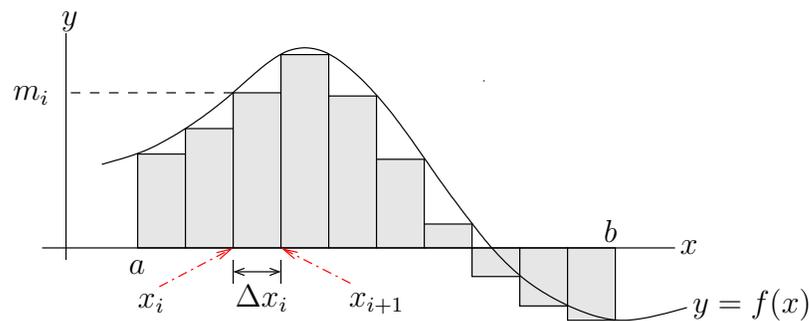


FIGURE 6.14 – Une somme inférieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$

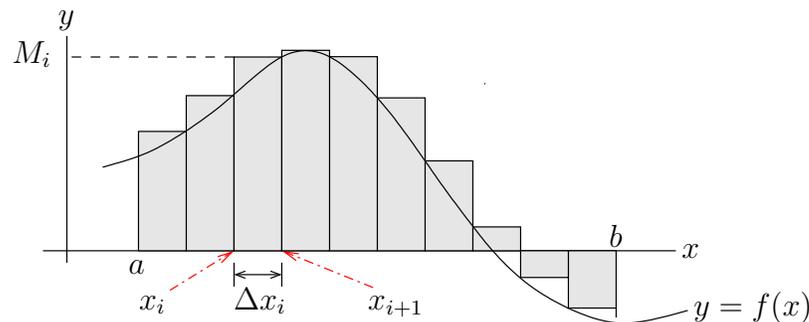


FIGURE 6.15 – Une somme supérieure pour une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$

6.4 Théorème fondamental du calcul

Dans cette section, nous verrons comment le calcul des intégrales indéfinies peut quelques fois être utilisé pour évaluer les intégrales définies. Par contre, dans les applications réelles, les intégrales définies sont plus fréquemment évaluées avec un ordinateur à partir de la définition

de l'intégrale définie ou d'un algorithme qui découle de cette définition. Nous verrons quelques algorithmes pour évaluer numériquement les intégrales définies dans une prochaine section.

6.4.1 Première version du théorème fondamental du calcul

À la section 6.3.4, nous avons remarqué que pour évaluer la distance parcourue par une voiture entre $t = a$ et $t = b$ heures, il suffisait de calculer l'intégrale définie de la vitesse $v(t)$ de la voiture au temps t de $t = a$ à $t = b$. De plus, à la remarque 6.3.17, nous avons aussi remarqué que nous pouvions remplacer le calcul de l'intégrale avec les sommes de Riemann par la valeur $p(b) - p(a)$ où $p(t)$ est la primitive de la vitesse $v(t)$; c'est-à-dire, $p'(t) = v(t)$. C'est essentiellement l'énoncé du théorème suivant.

Théorème 6.4.1 (Théorème fondamental du calcul)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et si F est une fonction différentiable sur $[a, b]$ telle que $F' = f$ sur $[a, b]$ (i.e. F est une primitive de f), alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b \equiv F(b) - F(a) .$$

Remarque 6.4.2

Nous pouvons motiver le théorème précédent de la façon suivante.

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ une partition \mathcal{P} de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $\Delta x = (b - a)/k$. Grâce au théorème de la moyenne, il existe x_i^* entre x_i et x_{i+1} tel que

$$\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = F'(x_i^*) = f(x_i^*)$$

pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Ainsi,

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i^*)\Delta x$$

pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Nous obtenons la somme de Riemann

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \dots + (F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a) . \end{aligned}$$

Pour k suffisamment grand, nous avons

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_k = F(b) - F(a) .$$

C'est essentiellement l'idée de la démonstration du Théorème fondamental du calcul. ♠

Remarque 6.4.3

Le théorème fondamental du calcul est indépendant de la primitive F qui est utilisée dans la formule

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Si G est une autre primitive de f , nous avons vu qu'il existait une constante C telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x . Ainsi,

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

car $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. ♠

Exemple 6.4.4

Si f est la **distribution de densité** d'une population en fonction de l'âge en années, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

est le pourcentage de la population âgée entre α et β ans. Si T est l'âge maximal des individus de cette population, alors

$$\int_0^T f(t) dt = 1 .$$

C'est-à-dire, 100% de la population est âgé de 0 à T ans.

Si nous supposons que l'âge maximum des individus d'une population animale est 10 ans et que la distribution de densité de cette population en fonction de l'âge est donnée par $f(t) = 0.006 t(10 - t)$ pour $0 \leq t \leq 10$ années, quel est le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans ?

Le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans est donné par

$$\int_2^7 0.006 t(10 - t) dt .$$

Pour évaluer cette intégrale, il faut trouver une primitive de $f(t) = 0.006 t(10 - t)$.

$$\int 0.006 t(10 - t) dt = 0.06 \int t dt - 0.006 \int t^2 dt = 0.03t^2 - 0.002t^3 + C .$$

Puisque nous avons besoin d'une seule primitive, nous pouvons prendre $C = 0$ Donc

$$\int_2^7 0.006 t(10 - t) dt = \left(0.03t^2 - 0.002t^3 \right) \Big|_{t=2}^7 = 0.784 - 0.104 = 0.68$$

et 68% de la population animale est entre 2 et 7 ans. ♣

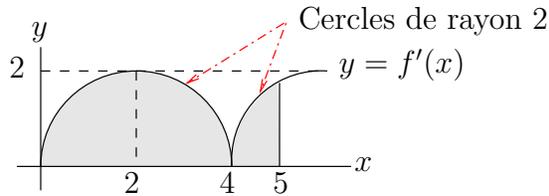
Remarque 6.4.5

À l'exemple précédent, l'intégrale de la fonction de densité de 2 à 7 nous donne le pourcentage de la population entre 2 et 7 ans. Est-ce que cela inclut les individus âgés de précisément 2 et 7 ans ? En fait, que ceux âgés de précisément 2 et 7 ans soient inclus ou non n'a

pas d'importance car il y a probablement aucun individu âgé de précisément 2 et 7 ans. Quelle est la chance qu'un individu de l'espèce animale soit âgé de précisément 2 ou 7 ans? Mathématiquement, il n'y a aucune chance. Peut-être que l'individu aura deux ans et une seconde, ou deux ans et un centième de seconde, mais la chance qu'il est exactement 2 ans est nulle. ♠

Exemple 6.4.6 🔧

Le graphe de la dérivée d'une fonction f est donnée ci-dessous.



Si $f(0) = 3$, quelle est la valeur de $f(5)$?

Grâce au théorème fondamental du calcul, nous avons que

$$f(5) = f(0) + \int_0^5 f'(x) dx = 3 + \int_0^5 f'(x) dx .$$

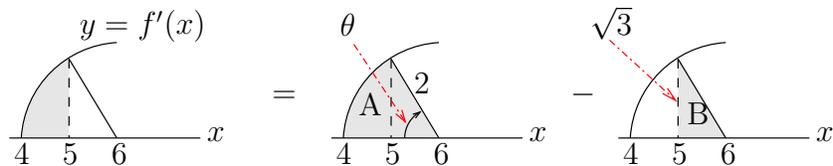
Il faut donc calculer l'aire sous la courbe $y = f'(x)$ pour $0 \leq x \leq 5$. Or

$$\int_0^5 f'(x) dx = \int_0^4 f'(x) dx + \int_4^5 f'(x) dx .$$

Puisque $\int_0^4 f'(x) dx$ représente la moitié de l'aire du disque de rayon 2, nous avons que

$$\int_0^4 f'(x) dx = \frac{1}{2} (2^2 \pi) = 2\pi .$$

Pour évaluer l'intégrale de f' entre 4 et 5, nous utilisons la figure suivante.



L'angle θ est donnée par $\cos(\theta) = 1/2$. Donc $\theta = \pi/3$. Ainsi, l'aire de la région A est un sixième de l'aire du disque de rayon 2; c'est-à-dire, l'aire de A est $2^2\pi/6 = 2\pi/3$. L'aire du triangle B est $\sqrt{3}/2$. Donc

$$\int_4^5 f'(x) dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Nous obtenons

$$f(5) = 3 + 2\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} + \frac{6 - \sqrt{3}}{2} .$$

**Exemple 6.4.7**

Évaluons les intégrales définies suivantes.

$$\text{a) } \int_4^9 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 dt \qquad \text{b) } \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Grâce au théorème fondamental du calcul, nous n'avons plus à utiliser la définition de l'intégrale définie (et donc les sommes de Riemann) pour évaluer ces intégrales.

a)

$$\begin{aligned} \int_4^9 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 dt &= \int_4^9 \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2t + \ln(t) \right) \Big|_{t=4}^9 \\ &= \left(\frac{9^2}{2} + 2 \times 9 + \ln(9) \right) - \left(\frac{4^2}{2} + 2 \times 4 + \ln(4) \right) = \frac{85}{2} + 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

car $t^2/2 + 2t + \ln(t)$ est une primitive de $t + 2 + 1/t$.

b)

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) \Big|_{x=0}^{1/2} = \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

car $\arcsin(x)$ est une primitive de $1/\sqrt{1-x^2}$.



La règle de substitution prend une forme particulière dans le contexte des intégrales définies.

Théorème 6.4.8

Si

1. g est une fonction différentiable (croissante ou décroissante),
2. F est la primitive d'une fonction f , et
3. f et F sont définies sur l'image de $[a, b]$ par g ,

alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Pour appliquer la règle de substitution, nous procédons de la façon suivante. Si nous posons $y = g(x)$, alors $dy = g'(x) dx$ et

$$\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{=y}) \underbrace{g'(x) dx}_{=dy} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

Rappelons que le symbole $dy = g'(x) dx$ n'est pas une égalité algébrique, il indique seulement la procédure pour remplacer la variable d'intégration x par la variable d'intégration y .

Exemple 6.4.9

Évaluons les intégrales définies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx & \text{b)} & \int_0^{\pi/2} e^{-\cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta & \text{c)} & \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx \\ \text{d)} & \int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx & \text{e)} & \int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}} dt \end{array}$$

a) Si $y = x^3 + 5$, alors $dy = 3x^2 dx$, $y = 6$ pour $x = 1$ et $y = 32$ pour $x = 3$. Donc

$$\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx = \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^3+5}} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int_6^{32} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{3} \sqrt{y} \Big|_{y=6}^{32} = \frac{2}{3} (4\sqrt{2} - \sqrt{6}).$$

b) Si $y = -\cos(\theta)$, alors $dy = \sin(\theta) d\theta$, $y = -1$ pour $\theta = 0$ et $y = 0$ pour $\theta = \pi/2$. Donc

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta = \int_{-1}^0 e^y dy = e^y \Big|_{y=-1}^0 = 1 - e^{-1}.$$

c) Si $y = x^2$, alors $dy = 2x dx$, $y = 0$ pour $x = 0$ et $y = 1/2$ pour $x = 1/\sqrt{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(y) \Big|_{y=0}^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - 0 \right) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

d) Si $y = \sqrt{x}$, alors $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, $y = 0$ pour $x = 0$ et $y = \pi$ pour $x = \pi^2$. Donc

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(y) dy = 2 \sin(y) \Big|_{y=0}^{\pi} = 0.$$

e) Si $y = 5 - t$, alors $dy = -dt$, $t + 7 = 12 - y$, $y = 5$ pour $t = 0$ et $y = 1$ pour $t = 4$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}} dt &= - \int_0^4 \frac{t+7}{\sqrt{5-t}} (-1) dt = - \int_5^1 \frac{12-y}{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_1^5 (12y^{-1/2} - y^{1/2}) dy = \left(24y^{1/2} - \frac{2}{3}y^{3/2} \right) \Big|_{y=1}^5 = \frac{62}{3}\sqrt{5} - \frac{70}{3}. \end{aligned}$$

**Remarque 6.4.10** 

Comme dans le cas des intégrales indéfinies, il est préférable à l'occasion d'utiliser la règle de substitution dans le sens inverse. Si nous substituons $x = g(y)$, nous obtenons

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y) dy$$

où $a = g(\alpha)$ et $b = g(\beta)$. Il faut trouver α et β qui donneront les bornes d'intégration $a = g(\alpha)$ et $b = g(\beta)$ de l'intégrale de gauche. ♠

À l'instar de la règle de substitution, la règle d'intégration par parties prend la forme suivante.

Théorème 6.4.11

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions différentiables, alors

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx .$$

Exemple 6.4.12

Évaluons les intégrales définies suivantes.

$$\text{a) } \int_1^3 (5x + 2)e^{3x} dx \qquad \text{b) } \int_0^1 \arctan(t) dt$$

a) Nous avons $(5x + 2)e^{3x} = f(x)g'(x)$ où $f(x) = 5x + 2$ et $g'(x) = e^{3x}$. Donc $f'(x) = 5$, $g(x) = e^{3x}/3$ et

$$\begin{aligned} \int_1^3 (5x + 2)e^{3x} dx &= \int_1^3 f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=1}^3 - \int_1^3 g(x) f'(x) dx \\ &= \frac{1}{3}(5x + 2)e^{3x} \Big|_{x=1}^3 - \frac{5}{3} \int_1^3 e^{3x} dx = \frac{1}{3}(5x + 2)e^{3x} \Big|_{x=1}^3 - \frac{5}{9}e^{3x} \Big|_{x=1}^3 \\ &= \frac{17}{3}e^9 - \frac{7}{3}e^3 - \frac{5}{9}e^9 + \frac{5}{9}e^3 = \frac{46}{9}e^9 - \frac{16}{9}e^3 . \end{aligned}$$

b) Nous avons $\arctan(t) = f(t)g'(t)$ où $f(t) = \arctan(t)$ et $g'(t) = 1$. Donc $f'(t) = 1/(1+t^2)$, $g(t) = t$ et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(t) dt &= \int_0^1 f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 g(x) f'(x) dx \\ &= t \arctan(t) \Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \arctan(1) - 0 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt . \end{aligned}$$

Si $y = 1 + t^2$, alors $dy = 2t dt$. De plus, $y = 1$ lorsque $t = 0$ et $y = 2$ lorsque $t = 1$. Donc

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} 2t dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(y) \Big|_{y=1}^2 = \frac{1}{2} \ln(2) .$$

Finalement,

$$\int_0^1 \arctan(t) \, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) .$$



6.4.2 Deuxième version du théorème fondamental du calcul

Théorème 6.4.13 (Deuxième version du théorème fondamental du calcul)

Si f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ alors

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad , \quad x \in [a, b] ,$$

est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $F'(c) = f(c)$ aux points c où f est continue. En particulier, si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors F est une primitive de f ; c'est-à-dire que $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 6.4.14

Une des plus importantes fonctions en statistique est la fonction de densité

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

où μ est la moyenne et σ est l'écart type. Tous les étudiants connaissent la distribution normale des notes. La fonction f est la fonction qui gouverne cette distribution.

Une variable X est dite **aléatoire** si elle représente le résultat d'une expérience que nous ne pouvons pas prédire exactement. Par exemple, nous pouvons supposer que la durée de vie d'un type d'ampoules électriques est une variable aléatoire. Si la durée de vie moyenne d'une ampoule est 400 heures, cela veut dire que certaines ampoules dureront un peu plus de 400 heures et d'autres un peu moins de 400 heures. Nous ne pouvons pas déterminer exactement la durée de vie d'une ampoule spécifique.

Nous disons que la variable aléatoire X possède une **distribution normale de moyenne** μ et de **d'écart type** σ si la probabilité que le résultat X de l'expérience soit entre a et b est

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \, dx .$$

C'est-à-dire que l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x , et les droites $x = a$ et $x = b$ est la probabilité que le résultat X de l'expérience soit entre a et b . Nous retrouvons le graphe de la fonction de densité pour $\mu = 400$ et $\sigma = 20$ à la figure 6.16.

Par exemple, nous pouvons supposer que la durée de vie d'un type d'ampoules électriques est normalement distribuée avec une durée de vie moyenne de 400 heures et un écart type de 20 heures.

Il n'existe pas de fonction connue qui soit la primitive de f . Par contre, la deuxième version du théorème fondamental du calcul affirme l'existence d'une primitive pour f . Une primitive de f est

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dt .$$

Pour évaluer la fonction F , il faut calculer numériquement (e.g. avec les sommes de Riemann) cette intégrale. ♣

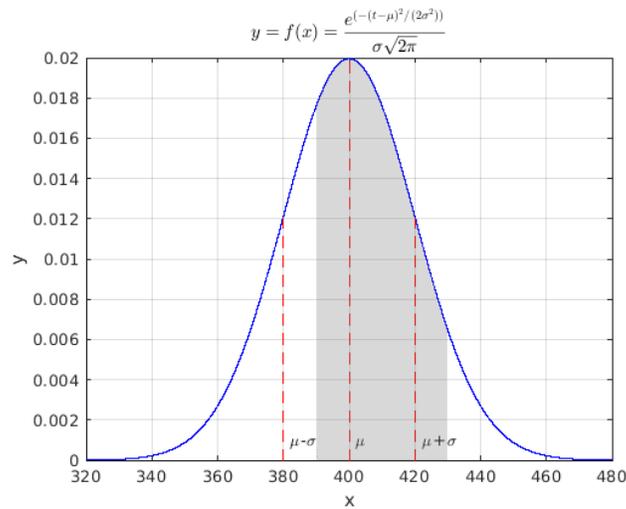


FIGURE 6.16 – La fonction de densité pour la distribution normale de moyenne $\mu = 400$ et d'écart type $\sigma = 20$. L'aire de la région en gris représente la probabilité que la variable aléatoire X soit entre 390 et 430.

Exemple 6.4.15

Calculons la dérivée de $F(x) = \int_1^{x^2} (1 + s^2)^{3/2} ds$.

Posons,

$$G(u) = \int_1^u (1 + s^2)^{3/2} ds \quad \text{et} \quad H(x) = x^2 .$$

Alors $F(x) = G(H(x))$ et $F'(x) = G'(H(x)) H'(x)$. La deuxième version du théorème fondamental du calcul nous donne $G'(u) = (1 + u^2)^{3/2}$. Ainsi, puisque $H'(x) = 2x$, nous obtenons

$$F'(x) = G'(H(x)) H'(x) = \left(1 + (x^2)^2\right)^{3/2} (2x) = 2x (1 + x^4)^{3/2} .$$

♣

Remarque 6.4.16

Si f est continue au point c , la deuxième version du théorème fondamental du calcul nous assure que $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ est différentiable au point c et que $F'(c) = f(c)$. Si f n'est pas continue au point c , nous ne pouvons rien affirmer.

Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Nous avons

$$F(x) = \int_0^x f(s) \, ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(figure 6.17). Donc F est une fonction continue comme il est prédit par la deuxième version du théorème fondamental du calcul car f est continue par morceaux. Par contre, F n'est pas différentiable au point $x = 1$ où f n'est pas continue. ♠

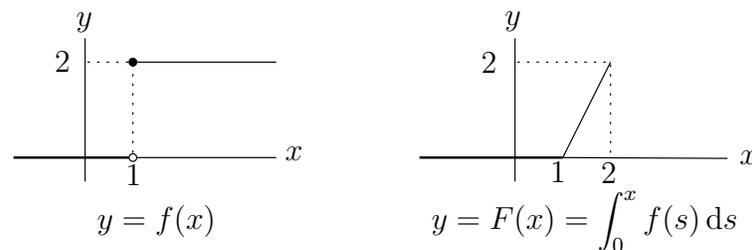


FIGURE 6.17 – Graphes de f et de F où $F(x) = \int_0^x f(s) \, ds$

6.5 Intégrales impropres

6.5.1 Intégrales sur un intervalle d'intégration de longueur infinie

Jusqu'à présent nous avons évalué des intégrales de la forme

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

où les bornes d'intégration a et b sont des nombres réels.

Pour tout entier positif k , le fait que l'intervalle $[a, b]$ soit de longueur finie nous a permis de définir le nombre réel $\Delta x = (b - a)/k$ représentant la longueur de chacun des sous-intervalles d'une partition de l'intervalle $[a, b]$. Les k sous-intervalles ainsi obtenus étaient de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Pour tout entier positif k , nous avons un nombre fini de sous-intervalles et donc une somme de Riemann avec un nombre fini de termes.

Il serait utile et naturel de définir l'intégrale sur des intervalles de longueur infinie de la forme $[a, \infty[$ où $] - \infty, b]$. Nous ne pouvons pas utiliser littéralement notre définition de l'intégrale définie pour définir une intégrale sur un intervalle de longueur infinie comme $[a, \infty[$ et $] \infty, b]$ car, pour un intervalle de longueur infinie, il est impossible de définir Δx comme le

rapport de la longueur de l'intervalle sur le nombre k de sous-intervalles. Il faut regarder le problème d'un angle différent. Si nous fixons la valeur de Δx , alors il faut un nombre infini d'intervalles de longueur Δx pour décomposer l'intervalle d'intégration de longueur infinie. Les sommes de Riemann auront alors un nombre infini de termes.

Nous pouvons tout de même utiliser l'existence des intégrales définies sur les intervalles bornés pour définir l'intégrale sur un intervalle de longueur infinie.

Définition 6.5.1

Soit f , une fonction définie sur l'intervalle $[a, \infty[$. Nous définissons **l'intégrale impropre de f de a à plus l'infini** comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_a^q f(x) dx .$$

Si la limite existe, nous disons que l'intégrale impropre **converge** autrement nous disons qu'elle **diverge**.

Soit f , une fonction définie sur l'intervalle $] -\infty, b]$. Nous définissons **l'intégrale impropre de f de moins l'infini à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^b f(x) dx .$$

Si la limite existe, nous disons que l'intégrale impropre **converge** autrement nous disons qu'elle **diverge**.

Si $f(x) \geq 0$ pour tout x , l'intégrale impropre $\int_a^{\infty} f(x) dx$ représente l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et la droite $x = a$ (figure 6.18). Nous pouvons énoncer un résultat semblable pour $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.

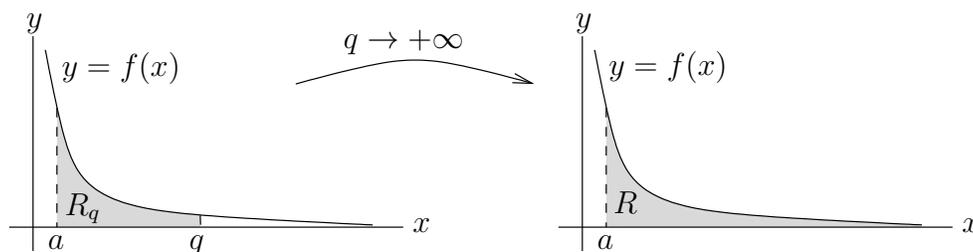


FIGURE 6.18 – L'intégrale de f de a à plus l'infini est la limite de l'aire de la région R_q lorsque q tend vers plus l'infini. Cet intégrale représente l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et la droite $x = a$.

Exemple 6.5.2

Évaluons l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx$.

Par définition,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx$$

si cette limite existe. Si $y = x - 1$, alors $dy = dx$ et

$$\int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx = \int_{q-1}^{-2} y^{-4/3} dy = \left(-3y^{-1/3} \right) \Big|_{y=q-1}^{-2} = \frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{(q-1)^{1/3}}.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^{-1} \frac{1}{(x-1)^{4/3}} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2^{1/3}} + \frac{3}{(q-1)^{1/3}} \right) = \frac{3}{2^{1/3}}.$$



Exemple 6.5.3

Évaluons l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$.

Par définition,

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{\ln(x)}{x^3} dx$$

si cette limite existe. Or,

$$\int_1^q \frac{\ln(x)}{x^3} dx$$

peut être intégrée à l'aide de la règle d'intégration par parties. Nous avons $x^{-3} \ln(x) = f(x)g'(x)$ où $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^{-3}$. Donc $f'(x) = x^{-1}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$ et

$$\begin{aligned} \int_1^q x^{-3} \ln(x) dx &= -\left(\frac{1}{2} x^{-2} \ln(x) \right) \Big|_{x=1}^q + \int_1^q \frac{1}{2} x^{-3} dx \\ &= -\left(\frac{1}{2} x^{-2} \ln(x) \right) \Big|_{x=1}^q - \left(\frac{1}{4} x^{-2} \right) \Big|_{x=1}^q = -\frac{\ln(q)}{2q^2} - \frac{1}{4q^2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(q)}{2q^2} - \frac{1}{4q^2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

car, par la règle de l'Hospital,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\ln(q)}{q^2} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q^{-1}}{2q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{2q^2} = 0.$$



Déterminons pour quelles valeurs de p l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge. Pour les valeurs de p où l'intégrale impropre converge, nous donnerons la valeur de l'intégrale.

Pour $p \neq 1$,

$$\int_1^q x^{-p} dx = \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right) \Big|_{x=1}^q = \frac{1}{1-p} q^{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Pour $p = 1$,

$$\int_1^q x^{-p} dx = \int_1^q \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_{x=1}^q = \ln(q).$$

Ainsi, pour $p > 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_1^q x^{-p} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} q^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) \\ &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(1-p)q^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

car $p - 1 > 0$.

Pour $p < 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_1^q x^{-p} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} q^{-p+1} - \frac{1}{1-p} \right) = +\infty$$

car $1 - p > 0$.

Finalement, pour $p = 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_1^q \frac{1}{x} dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} \ln(q) = \infty.$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 6.5.4

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge pour $p > 1$ et diverge pour $p \leq 1$. De plus,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \quad \text{pour } p > 1.$$

La conclusion de la proposition précédente au sujet de la convergence ou divergence ne changera pas si nous remplaçons $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ par $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ où a est un nombre réel quelconque.

Exemple 6.5.5

Évaluons si possible l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Pour évaluer cette intégrale, il faut diviser le domaine d'intégration en deux.¹ Nous allons évaluer

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx + \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

1. Nous aurions pu aussi définir cette intégrale de la façon suivante. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{-q}^q \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$. Nous parlons alors de l'intégrale de Cauchy de la fonction. Ce n'est pas la tradition pour les fonctions à valeurs réelles. Nous n'adopterons pas cette convention.

Nous aurions pu choisir une autre valeur que 0 pour partager le domaine d'intégration. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cela ne changerait rien à la réponse finale.

Si $u = x + 1$, alors $du = dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \arctan(u) + C = \arctan(x+1) + C. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \arctan(x+1) \Big|_{x=q}^0 \\ &= \lim_{q \rightarrow -\infty} (\arctan(1) - \arctan(q)) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \arctan(x+1) \Big|_{x=0}^q \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} (\arctan(q) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$



Exemple 6.5.6

Évaluons si possible l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$

Nous utilisons la règle d'intégration par parties pour évaluer $\int xe^{-x} dx$.

Nous avons $xe^{-x} = f(x)g'(x)$ où $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-x}$. Donc $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-x}$ et

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\infty} xe^{-x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q xe^{-x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} (-xe^{-x} - e^{-x}) \Big|_{x=0}^q = \lim_{q \rightarrow \infty} (-qe^{-q} - e^{-q} + 1) = 1$$

car

$$\lim_{q \rightarrow \infty} e^{-q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{e^q} = 0$$

et

$$\lim_{q \rightarrow \infty} qe^{-q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q}{e^q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{e^q} = 0.$$

Pour le calcul de cette dernière limite, nous avons utilisé la règle de l'Hospital pour obtenir la deuxième égalité car $\lim_{q \rightarrow \infty} q = +\infty$ et $\lim_{q \rightarrow \infty} e^q = +\infty$.



6.5.2 Intégrales avec un intégrande non bornée

Une autre situation où il serait utile de définir l'intégrale est lorsque l'intégrande n'est pas bornée. Par exemple, pouvons-nous définir l'intégrale de façon à pouvoir l'utiliser pour calculer l'aire A de la région R représentée à la figure 6.19 qui est bornée par la courbe $y = 1/\sqrt{x}$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

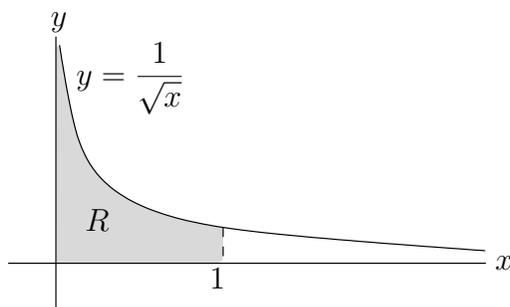


FIGURE 6.19 – La région R est la région bornée par la courbe $y = f(x) = 1/\sqrt{x}$, l'axe des x et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Nous définissons respectivement ci-dessous ce que sera l'intégrale d'une fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée en $x = a$, et l'intégrale d'une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée en $x = b$.

Définition 6.5.7

Soit f , une fonction définie sur l'intervalle $]a, b]$. Nous définissons **l'intégrale impropre de f de a à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{q \rightarrow a^+} \int_q^b f(x) dx$$

Si la limite existe, nous disons que l'intégrale impropre **converge** autrement nous disons qu'elle **diverge**.

Soit f , une fonction définie sur l'intervalle $[a, b[$. Nous définissons **l'intégrale impropre de f de a à b** comme étant la limite suivante si cette limite existe.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{q \rightarrow b^-} \int_a^q f(x) dx .$$

Si la limite existe, nous disons que l'intégrale impropre **converge** autrement nous disons qu'elle **diverge**.

Si $f(x) \geq 0$ pour tout x , ces intégrales impropres représentent l'aire de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$ (figure 6.20).

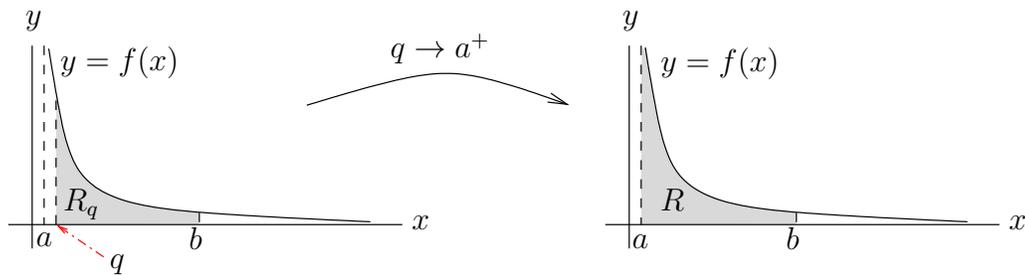


FIGURE 6.20 – L'intégrale de f de a à b est la limite de l'aire de la région R_q lorsque q tend vers a . L'intégrale représente l'aire de la région R bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$.

Exemple 6.5.8

Évaluons l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Puisque $x = 0$ est une asymptote verticale pour $f(x) = 1/\sqrt{x}$, nous avons que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

si cette limite existe. Or,

$$\int_q^1 x^{-1/2} dx = \left(2x^{1/2} \right) \Big|_{x=q}^1 = 2 - 2\sqrt{q}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{q}) = 2.$$



Exemple 6.5.9

Déterminons si l'intégrale impropre $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$ converge ou diverge. Si elle converge, nous allons donner la valeur de l'intégrale.

Notons que $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x + 3)(x - 2)}$$

a une asymptote verticale à $x = 2$. Le graphe de f est donné à la figure 6.21. Ainsi, il faut déterminer si

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \lim_{q \rightarrow 2^-} \int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$$

existe.

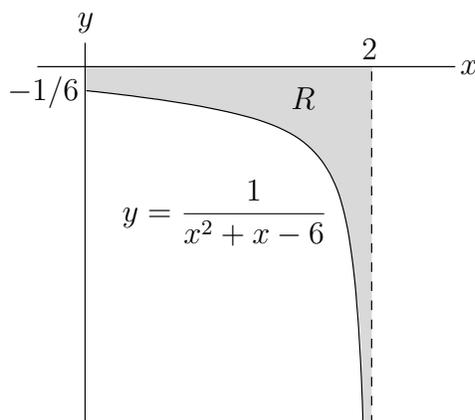


FIGURE 6.21 – Graphe de $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ pour $0 \leq x < 2$.

Pour évaluer cette intégrale, nous utilisons la méthode des fractions partielles. C'est-à-dire qu'il faut déterminer les variables A et B telles que

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 2}.$$

Si nous écrivons ces fractions sur un même commun dénominateur, nous obtenons

$$\frac{1}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{A(x - 2)}{(x + 3)(x - 2)} + \frac{B(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)}.$$

Nous avons égalité quand les numérateurs des deux côtés de l'égalité sont égaux ; c'est-à-dire, quand $1 = A(x - 2) + B(x + 3)$. Pour $x = -3$, nous obtenons $1 = -5A$ et donc $A = -1/5$. Pour $x = 2$, nous obtenons $1 = 5B$ et donc $B = 1/5$. Nous avons donc que

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x + 3)(x - 2)} = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x + 3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x - 2} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} dx &= -\frac{1}{5} \int_0^q \frac{1}{x + 3} dx + \frac{1}{5} \int_0^q \frac{1}{x - 2} dx \\ &= -\frac{1}{5} \ln(x + 3) \Big|_{x=0}^q + \frac{1}{5} \ln|x - 2| \Big|_{x=0}^q \\ &= -\frac{1}{5} (\ln(q + 3) - \ln(3) - \ln|q - 2| + \ln(2)) \\ &= -\frac{1}{5} (\ln(q + 3) - \ln|q - 2| + \ln(2/3)). \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{q \rightarrow 2^-} \ln|q - 2| = -\infty$ et $\lim_{q \rightarrow 2^-} \ln(q + 3) = \ln(5)$, nous obtenons

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \lim_{q \rightarrow 2^-} \int_0^q \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$$

$$= -\frac{1}{5} \lim_{q \rightarrow 2^-} \left(\ln(q+3) - \ln|q-2| + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right) = -\infty.$$

L'intégrale diverge. ♣

Déterminons pour quelles valeurs de p l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge. Pour les valeurs de p où l'intégrale converge, nous donnerons la valeur de l'intégrale.

Pour $p \neq 1$,

$$\int_q^1 x^{-p} dx = \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right) \Big|_{x=q}^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p}.$$

Pour $p = 1$,

$$\int_q^1 x^{-p} dx = \int_q^1 \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_{x=q}^1 = -\ln(q).$$

Ainsi, pour $p < 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 x^{-p} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}$$

car $1-p > 0$.

Pour $p > 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 x^{-p} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} q^{1-p} \right) \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)q^{p-1}} \right) = \infty \end{aligned}$$

car $p-1 > 0$.

Finalement, pour $p = 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 \frac{1}{x} dx = -\lim_{q \rightarrow 0^+} \ln(q) = \infty.$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 6.5.10

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge pour $p < 1$ et diverge pour $p \geq 1$. De plus, $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$ pour $p < 1$.

La conclusion de la proposition précédente au sujet de la convergence ou divergence ne changera pas si nous remplaçons $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ par $\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$ où $a > 0$ est un nombre réel quelconque.

Remarque 6.5.11 

La proposition 6.5.10 peut être déduite de la proposition 6.5.4 et vice-versa. Si nous posons $t = 1/x$, nous avons $dt = \frac{-1}{x^2} dx$ et

$$\int_1^q \frac{1}{x^p} dx = \int_1^q \frac{-1}{x^{p-2}} \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx = - \int_1^{1/q} \frac{1}{t^{2-p}} dt = \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt .$$

Les énoncés suivants sont équivalents.

- $\lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{1}{x^p} dx$ existe si et seulement si $p > 1$ (énoncé de la proposition 6.5.4).
- $\Leftrightarrow \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt$ existe si et seulement si $p > 1$ (après la substitution $t = 1/x$).
- $\Leftrightarrow \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{1/q}^1 \frac{1}{t^{2-p}} dt$ existe si et seulement si $2 - p < 1$ (car $p > 1 \Leftrightarrow 2 - p < 1$).
- $\Leftrightarrow \lim_{q \rightarrow 0} \int_q^1 \frac{1}{t^r} dt$ existe si et seulement si $r < 1$ (énoncé de la proposition 6.5.10 si nous remplaçons $2 - p$ par r).



6.6 Test de comparaison

Il est généralement difficile d'évaluer algébriquement les intégrales. C'est encore plus évident dans le cas des intégrales impropres. Nous avons donc souvent recours aux méthodes numériques pour estimer la valeur des intégrales impropres. Avant d'estimer numériquement une intégrale impropre, il est nécessaire de déterminer si elle converge. Le fait que les calculs numériques d'une intégrale impropre produisent des valeurs supérieures à ce qu'un ordinateur peut traiter (nous parlons de « overflow ») n'indique pas que l'intégrale impropre diverge. Il se pourrait très bien que la valeur de l'intégrale soit en fait une valeur plus grande que l'ordinateur peut traiter. Il est aussi possible que ce problème soit dû à des erreurs de troncature ou à l'utilisation d'une méthode d'intégration numérique inappropriée.

Nous présentons un test pour déterminer si une intégrale impropre converge ou diverge. Les propositions 6.5.4 et 6.5.10 seront d'une très grande utilité.

Théorème 6.6.1 (Test de comparaison)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]a, b[$. Les bornes d'intégration a et b peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$, ou ils peuvent correspondre à des asymptotes verticales pour les fonctions f et g .

1. Si $\int_a^b g(x) dx$ converge alors $\int_a^b f(x) dx$ converge.
2. Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge alors $\int_a^b g(x) dx$ diverge.

Dans le cas où f et g sont continues sur l'intervalle $[a, +\infty[$ et $b = \infty$, le théorème précédent est une conséquence de la relation $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tous x dans l'intervalle $[a, +\infty[$. En effet, il découle de cette dernière inégalité que

$$0 \leq \int_a^q f(x) \, dx \leq \int_a^q g(x) \, dx \quad (6.6.1)$$

pour tout $q \geq a$. Définissons les fonctions

$$F(q) = \int_a^q f(x) \, dx \quad (6.6.2)$$

et

$$G(q) = \int_a^q g(x) \, dx \quad (6.6.3)$$

Puisque f et g sont deux fonctions positives sur l'intervalle $[a, +\infty[$, les fonctions F et G sont positives et croissantes (l'aire sous la courbe augmente lorsque q augmente). De plus, (6.6.1) devient $0 \leq F(q) \leq G(q)$ pour tout q .

Si nous supposons que

$$\int_a^{+\infty} g(x) \, dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} G(q)$$

converge, alors F est une fonction croissante bornée supérieurement par $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$. Il s'en suit que

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{q \rightarrow +\infty} F(q)$$

converge grâce au théorème 2.1.20. Nous retrouvons à la figure 6.22 deux graphes qui peuvent représenter qualitativement les graphes de F et G .

Par contre si $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ diverge alors F est une fonction qui croît sans limite supérieure. Il en est donc de même pour G car $F(q) \leq G(q)$ pour tout q . Ainsi, $\lim_{q \rightarrow +\infty} G(q) = +\infty$ et $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ diverge.

La justification du test de comparaison pour les autres types d'intégrales impropres est semblable.

Exemple 6.6.2

Déterminons si les intégrales suivantes convergent ou divergent.

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} \, dx \quad \text{b) } \int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3 - x + 1} \, dx$$

a) Puisque

$$0 \leq \frac{|\sin(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

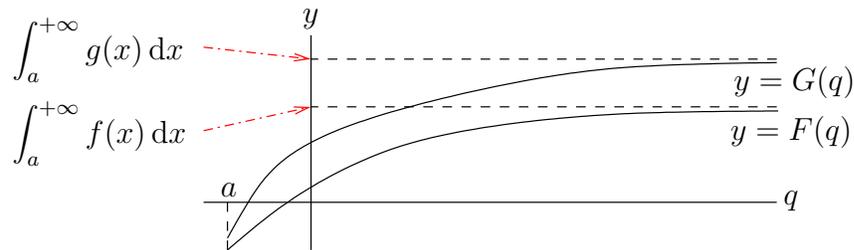


FIGURE 6.22 – Représentation qualitative du graphe des fonctions F et G définies en (6.6.2) et (6.6.3) respectivement.

pour tout $x \geq 1$ et

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

converge car c'est le cas $p > 1$ de la proposition 6.5.4, nous avons que

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx$$

converge grâce au test de comparaison.

b) Remarquons que $\frac{x^2}{x^3 - x + 1} > \frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$. En effet, pour $x \geq 1$, nous avons $0 \geq 1 - x$ et ainsi

$$x^3 \geq x^3 - x + 1. \quad (6.6.4)$$

La fonction $p(x) = x^3 - x + 1$ est croissante pour $x \geq 1$ car $p'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ pour $x \geq 1$. Ainsi, $x^3 - x + 1 = p(x) \geq p(1) = 1 > 0$ pour $x \geq 1$. Nous pouvons donc diviser les deux cotés de l'inégalité en (6.6.4) par $x(x^3 - x + 1)$ sans changer la direction de l'inégalité et sans risquer de diviser par zéro. Nous obtenons

$$\frac{x^2}{x^3 - x + 1} \geq \frac{1}{x}$$

pour $x \geq 1$.

Puisque

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

diverge car c'est le cas $p \leq 1$ de la proposition 6.5.4, nous avons que

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3 - x + 1} dx$$

diverge grâce au test de comparaison. ♣

Exemple 6.6.3

Déterminons si l'intégrale $\int_1^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx$ converge ou diverge.

C'est une intégrale impropre car $x = 1$ est une asymptote verticale de $(x^2 - 1)^{-1/3}$. Nous avons que

$$\int_1^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx = \lim_{q \rightarrow 1^+} \int_q^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx .$$

Puisque notre intention est de comparer cette intégrale avec l'intégrale entre 0 et a de la proposition 6.5.10, nous commençons par une simple substitution pour obtenir 0 comme borne inférieure pour l'intégrale. Si $u = x - 1$, alors $du = dx$, $u = q - 1$ lorsque $x = q$ et $u = 4$ lorsque $x = 5$. Donc

$$\int_q^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx = \int_{q-1}^4 \frac{1}{((u+1)^2 - 1)^{1/3}} du = \int_{q-1}^4 \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} du .$$

Ainsi, lorsque q tend vers 1, nous obtenons que $\int_1^5 \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/3}} dx$ converge si et seulement si $\int_0^4 \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} du$ converge. La substitution $u = x - 1$ est simplement une translation de l'intervalle d'intégration de 1 vers la gauche. Il suffit de terminer si cette dernière intégrale impropre converge ou diverge pour obtenir la même conclusion pour l'intégrale impropre du départ.

Puisque

$$(u^2 + 2u)^{1/3} = u^{2/3} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^{1/3} \geq u^{2/3}$$

pour $u > 0$, nous avons

$$0 \leq \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} \leq \frac{1}{u^{2/3}}$$

pour tout $u > 0$. Puisque

$$\int_0^4 \frac{1}{u^{2/3}} du$$

converge car c'est le cas $p < 1$ de la proposition 6.5.10, nous avons que

$$\int_0^4 \frac{1}{(u^2 + 2u)^{1/3}} du$$

converge grâce au test de comparaison. ♣

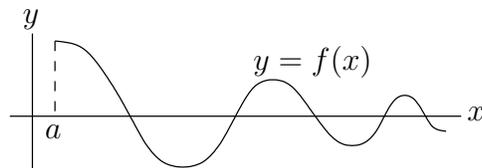
Le test de comparaison peut aussi être utilisé pour déterminer la convergence d'intégrales impropres dont l'intégrande peut avoir des valeurs négatives.

Théorème 6.6.4

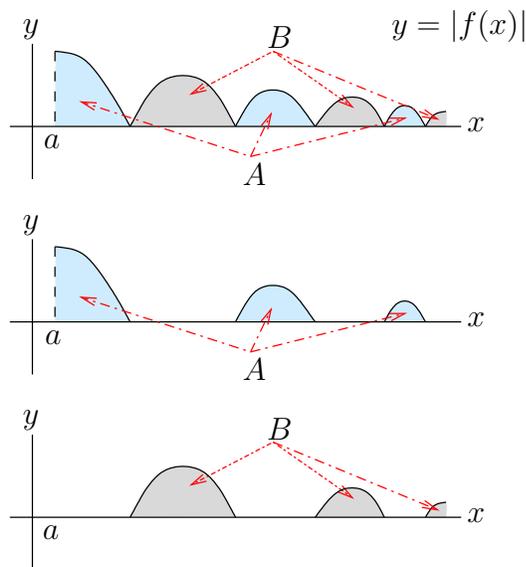
Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$. Alors $\int_a^b f(x) dx$ converge si $\int_a^b |f(x)| dx$ converge. Les bornes d'intégration a et b peuvent être $+\infty$ ou $-\infty$, ou ils peuvent correspondre à des asymptotes verticales pour la fonction f .

Par exemple, $\int_a^\infty f(x) dx$ converge si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge.

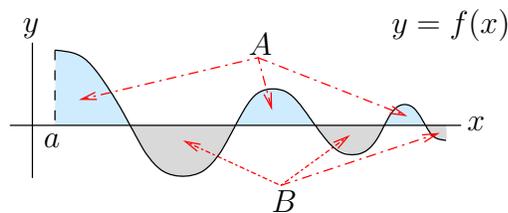
Il est possible de justifier intuitivement ce résultat en considérant le graphe de f . Supposons que le graphe de f soit celui donné ci-dessous.



L'aire de la région A plus l'aire de la région B dans la figure suivante donnent l'aire sous la courbe $y = |f(x)|$ pour $a \leq x < \infty$; c'est-à-dire, $\int_a^\infty |f(x)| dx$.



Si nous supposons que la valeur de l'intégrale de $|f(x)|$ est finie, alors l'aire de la région A et l'aire de la région B sont aussi des valeurs finies. Il s'en suit que la valeur de $\int_a^\infty f(x) dx$ est finie car c'est l'aire de la région A moins l'aire de la région B , deux nombres réels, comme il est illustré dans la figure suivante.



Remarque 6.6.5 

Nous présentons ci-dessous une démonstration que $\int_a^\infty f(x) dx$ converge si $\int_a^\infty |f(x)| dx$

converge. Cette démonstration formalise la justification graphique que nous venons de donner ci-dessus.

Si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge alors $\int_a^\infty 2|f(x)| dx$ converge car

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q 2|f(x)| dx = 2 \lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q |f(x)| dx .$$

Puisque

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

pour tout x dans l'intervalle $]a, \infty[$, nous obtenons que $\int_a^\infty (|f(x)| - f(x)) dx$ converge grâce au test de comparaison.

Finalement, $\int_a^\infty f(x) dx$ converge car

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q f(x) dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\int_a^q |f(x)| dx - \int_a^q (|f(x)| - f(x)) dx \right) \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q |f(x)| dx - \lim_{q \rightarrow \infty} \int_a^q (|f(x)| - f(x)) dx \end{aligned}$$

où les deux dernières limites existent.

Nous pourrions tirer la même conclusion en considérant les autres formes pour l'intégrale impropre. ♠

Exemple 6.6.6

Nous avons vu à l'exemple 6.6.2 que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx$ convergeait. Il s'en suit que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx$ converge. ♣

Remarque 6.6.7

Si $\int_a^b |f(x)| dx$ diverge, nous ne pouvons rien dire au sujet de $\int_a^b f(x) dx$.

Par exemple, $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge mais $\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge.

i) Commençons par montrer que $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

Puisque $\sin(x)/x = f(x)g'(x)$ où $f(x) = 1/x$ et $g'(x) = \sin(x)$, nous obtenons $f'(x) = -1/x^2$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\int_1^q \frac{\sin(x)}{x} dx = -\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^q - \int_1^q \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

par la règle d'intégration par parties. Puisque

$$0 \leq \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge grâce à la proposition 6.5.4, nous avons que

$$\int_1^\infty \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| dx$$

converge. Donc $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ converge. De plus

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^q \right) = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\cos(1) - \frac{\cos(q)}{q} \right) = \cos(1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} \Big|_{x=1}^q - \int_1^q \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right) \\ &= \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

est une nombre réel.

ii) Pour montrer que $\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge, nous montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = +\infty.$$

Nous remarquons que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{(k+1)\pi} \geq \frac{2}{\pi} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x} dx$$

car

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \begin{cases} \int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = 2 & \text{pour } k \text{ pair.} \\ \int_\pi^{2\pi} -\sin(x) dx = \cos(x) \Big|_\pi^{2\pi} = 2 & \text{pour } k \text{ impair.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^{n\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx &= \int_1^\pi \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \\ &\geq \int_1^\pi \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^\pi \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} \int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^\pi \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln(2)) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

lorsque n tend vers plus l'infini.



6.7 Méthodes numériques d'intégration

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment différentiable. Notre but est de développer des méthodes numériques qui nous permettront d'évaluer l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

lorsque nos techniques algébriques d'intégration s'avèrent impuissantes à évaluer cette intégrale ou lorsque celles aboutissent à des calculs algébriques qui sont longs et complexes.

L'idée principale qui supporte les méthodes numériques que nous présentons est la suivante. Nous cherchons une fonction $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|p(x) - f(x)|$ est très petit pour tout x et telle que $\int_a^b p(x) dx$ est simple à évaluer. Si $|p(x) - f(x)|$ est très petit pour tout x , nous pouvons espérer que

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx .$$

Il y a une infinité de choix possible pour p . Les trois méthodes que nous présentons sont les suivantes.

1. La méthode du point milieu où p sera une fonction constante par morceaux.
2. La méthode des trapèzes où p sera une fonction linéaire par morceaux.
3. La méthode de Simpson où p sera une fonction quadratique par morceaux.

6.7.1 Méthode du point milieu

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Nous partageons l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b - a)/(2n)$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des $2n$ sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$.

Nous définissons la fonction $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$p(x) = f(x_{2i+1}) \quad \text{si} \quad x_{2i} \leq x < x_{2i+2} .$$

C'est une fonction qui est constante par morceaux. Sur un intervalle de la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, la fonction p prend la valeur de f au point milieu x_{2i+1} (figure 6.23). Nous avons que

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x_{2i+1}) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})(x_{2i+2} - x_{2i}) = 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) \end{aligned}$$

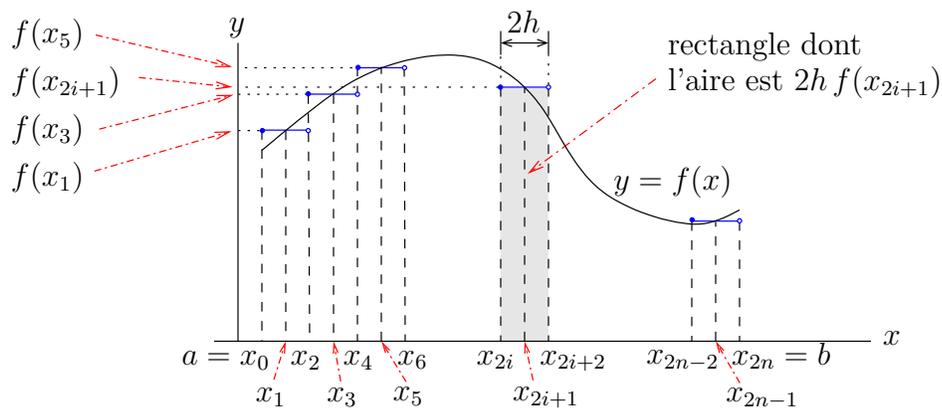


FIGURE 6.23 – Méthode du point milieu pour évaluer numériquement une intégrale

La somme $2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$ est une somme de Riemann avec $\Delta x = 2h$ pour l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Donc, en théorie, $2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})$ tend vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque h tend vers 0. Nous pourrions démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux. Soit $h = (b - a)/(2n)$ et $x_j = a + jh$ for $j = 0, 1, \dots, 2n$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + \frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre première méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.2 (Méthode du point milieu)

Une approximation de la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par la formule suivante.

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = 2h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1})$$

où $h = (b - a)/(2n)$ et $x_j = a + jh$ for $j = 0, 1, \dots, 2n$.

l'erreur de troncature pour la méthode du point milieu est $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2$.

Comme ξ à la proposition précédente est inconnu, l'erreur de troncature a une utilité limitée.

Exemple 6.7.3

Utilisons la méthode du point milieu pour estimer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Nous allons choisir le nombre de sous-intervalles de $[0, 1]$ (i.e. la longueur de h) pour obtenir une erreur de troncature inférieur à 10^{-4} .

Dans la formula pour la méthode du point milieu, nous avons $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b - a)/(2n) = 1/(2n)$ et $x_i = 0 + ih = ih$. Il faut choisir n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2 \right|$$

est plus petit que 10^{-4} .

Comme nous ne connaissons pas ξ , nous remplaçons $|f''(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f''(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque

$$|f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} < 6e$$

pour tout $x \in [0, 1]$, nous pouvons utiliser $6e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, il faut choisir n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{6} h^2 \right| \leq \frac{6e}{6} \left(\frac{1}{2n} \right)^2 = \frac{e}{4n^2} < 10^{-4};$$

c'est-à-dire,

$$n > \sqrt{\frac{e}{4} 10^4} = \frac{10^2}{2} \sqrt{e} \approx 82.436.$$

Un bon choix est $n = 83$. Avec cette valeur de n , $h = \frac{1}{2n} = \frac{1}{166}$ et $x_{2i+1} = \frac{2i+1}{166}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 82$, Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{2}{166} \sum_{j=0}^{82} e^{((2i+1)/166)^2} \\ &\approx \frac{1}{83} \left(e^{(1/166)^2} + e^{(3/166)^2} + e^{(5/166)^2} + \dots + e^{(163/166)^2} + e^{(165/166)^2} \right) \\ &\approx 1.4626189. \end{aligned}$$



Remarque 6.7.4

Si f est une fonction convexe, la méthode du point milieu donne une sous-estimation de la valeur de l'intégrale. Si f est une fonction concave, la méthode du point milieu donne une surestimation de la valeur de l'intégrale. Nous pouvons justifier cette observation de deux façons.

Si f est convexe, nous avons que $f''(x) > 0$ pour tout x . Ainsi, l'erreur de troncature $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6}h^2$ est positif. Par contre si, f est concave, nous avons que $f''(x) < 0$ pour tout x . Ainsi, l'erreur de troncature $\frac{f''(\xi)(b-a)}{6}h^2$ est négatif.

Nous pouvons aussi justifier notre remarque à l'aide des graphes qui sont donnés aux figures 6.24 et 6.25.

À la figure 6.24, nous avons le graphe d'une fonction concave. L'aire du rectangle $\square CDEG$ dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$ est égale à l'aire du trapèze $\nabla ABCD$ car les triangles $\triangle AEF$ et $\triangle BGF$ sont similaires. Comme la surface sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_{2i} \leq x \leq x_{2i+2}$ est complètement recouverte par le trapèze $\nabla ABCD$, l'aire sous la courbe $y = f(x)$ est donc inférieure ou égale à l'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisés par la méthode du point milieu et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f , nous avons que

$$\int_a^b f(x) dx \leq 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}).$$

À la figure 6.25, nous avons le graphe d'une fonction convexe. L'aire du rectangle $\square CDEG$ dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$ est égale à l'aire du trapèze $\nabla ABCD$ car les triangles $\triangle AEF$ et $\triangle BGF$ sont similaires. Comme la surface sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_{2i} \leq x \leq x_{2i+2}$ recouvre complètement le trapèze $\nabla ABCD$, l'aire sous la courbe $y = f(x)$ est donc supérieure à l'aire du rectangle dont la base est l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ et la hauteur est $f(x_{2i+1})$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode du point milieu et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f , nous avons que

$$\int_a^b f(x) dx \geq 2h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}).$$



6.7.2 Méthode des trapèzes

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux.

Nous partageons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b - a)/n$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des n sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Nous définissons la fonction $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$p(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + f(x_i) \quad \text{si } x_i \leq x < x_{i+1}.$$

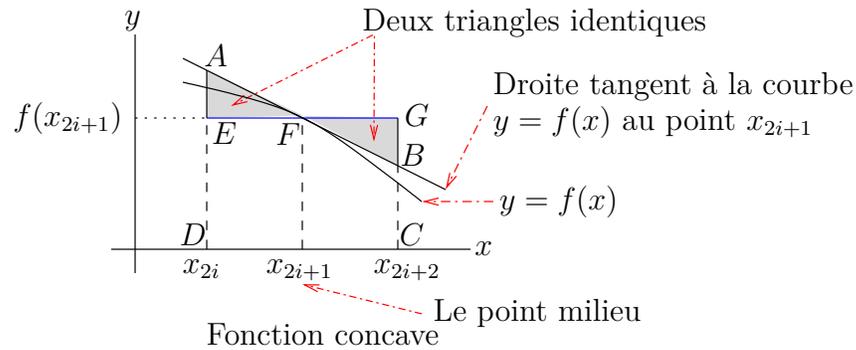


FIGURE 6.24 – La méthode du point milieu surestime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est concave comme c'est le cas pour la fonction f ci-dessus.

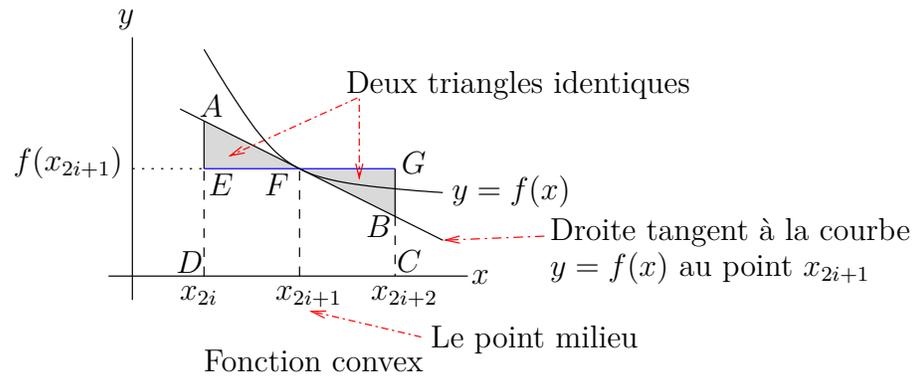


FIGURE 6.25 – La méthode du point milieu sous-estime la valeur de l'intégrale lorsque la fonction est convexe comme c'est le cas pour la fonction f ci-dessus.

C'est une fonction qui est linéaire par morceau. Sur un intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$, le graphe de la fonction p est la droite qui lie les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ (figure 6.26).

Nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i) dx \\ &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + f(x_i) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} (x_{i+1} - x_i) . \end{aligned}$$

Dans le cas où $f(x_i) > 0$ et $f(x_{i+1}) > 0$, c'est la formule pour calculer l'aire du trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur h et les côtés adjacents sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$.

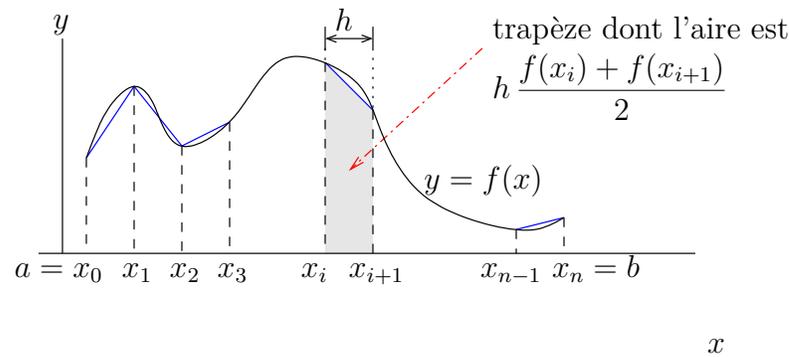


FIGURE 6.26 – Méthode des trapèzes pour évaluer numériquement une intégrale

Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b p(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \\
 &= h \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) \\
 &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right).
 \end{aligned}$$

Nous pourrions démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.5

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre deux. Soit $h = (b - a)/n$ et $x_j = a + jh$ pour $j = 0, 1, \dots, n$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) - \frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre deuxième méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.6 (Méthode des trapèzes)

Une approximation de la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par

la formule suivante.

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right)$$

où $h = (b - a)/n$ et $x_j = a + jh$ for $j = 0, 1, \dots, n$.

L'erreur de troncature pour la méthode des trapèzes est $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2$.

Remarque 6.7.7

Nous pouvons exprimer la formule d'approximation pour la méthode du trapèze à l'aide des sommes à droite et à gauche. En effet, $T_n = (G_n + D_n)/2$. ♠

Exemple 6.7.8

Utilisons la méthode des trapèzes pour estimer l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Nous allons choisir le nombre de sous-intervalles de $[0, 1]$ pour que l'erreur de troncature soit inférieure à 10^{-4} .

Dans la formula pour la méthode des trapèzes, nous avons $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b - a)/n = 1/n$ et $x_i = 0 + ih = ih$. Il faut trouver n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2 \right|$$

est plus petit que 10^{-4} .

Comme nous ne connaissons pas ξ , nous remplaçons $|f''(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f''(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque

$$|f''(x)| = (2 + 4x^2)e^{x^2} < 6e$$

pour tout $x \in [0, 1]$, nous pouvons utiliser $6e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, il faut choisir n tel que

$$\left| \frac{f''(\xi)(b-a)}{12} h^2 \right| \leq \frac{6e}{12} \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{e}{2n^2} < 10^{-4};$$

c'est-à-dire,

$$n > \sqrt{\frac{e}{2}} 10^2 = 10^2 \sqrt{\frac{e}{2}} \approx 116.5821.$$

Un bon choix est $n = 117$. Avec cette valeur de n , $h = \frac{1}{n} = \frac{1}{117}$ et $x_i = \frac{i}{117}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 117$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{234} \left(e^0 + 2 \sum_{j=1}^{116} e^{(j/117)^2} + e^1 \right) \\ &\approx \frac{1}{234} \left(1 + 2 \left(e^{(1/117)^2} + e^{(2/117)^2} + \dots + e^{(116/117)^2} \right) + e \right) \end{aligned}$$

$$\approx 1.46268 .$$



Remarque 6.7.9

Comme nous avons fait pour la méthode du point milieu, il est possible d'analyser l'effet de la courbure d'une fonction pour déterminer si la méthode des trapèzes donnera une surestimation ou une sous-estimation de la valeur de l'intégrale.

Si f est une fonction convexe, la méthode des trapèzes donne une surestimation de la valeur de l'intégrale. Si f est une fonction concave, la méthode des trapèzes donne une sous-estimation de la valeur de l'intégrale. Nous pouvons justifier cette observation de deux façons.

Si f est convexe, nous avons que $f''(x) > 0$ pour tout x . Ainsi, l'erreur de troncature $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12}h^2$ est négatif. Par contre si, f est concave, nous avons que $f''(x) < 0$ pour tout x . Ainsi, l'erreur de troncature $-\frac{f''(\xi)(b-a)}{12}h^2$ est positif.

Nous pouvons aussi justifier notre remarque à l'aide des graphes que nous retrouvons à la figure 6.27.

Le graphe de gauche qui est donné à la figure 6.27 représente une fonction concave. Le trapèze $\square ABCD$ est le trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et les deux cotés adjacents à la base sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Puisque le trapèze $\square ABCD$ est complètement recouvert par la région sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, nous avons que l'aire du trapèze est plus petite ou égale à l'aire sous la courbe $y = f(x)$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode des trapèzes et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f , nous avons que

$$\int_a^b f(x) dx \geq \frac{h}{2} \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) .$$

Le graphe de droite qui est donné à la figure 6.27 représente une fonction convexe. Comme dans le cas précédent, le trapèze $\square ABCD$ est le trapèze dont la base est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et les deux cotés adjacents à la base sont de longueurs $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Puisque le trapèze $\square ABCD$ recouvre complètement la région sous la courbe $y = f(x)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, nous avons que l'aire du trapèze est plus grande ou égale à l'aire sous la courbe $y = f(x)$. Puisque cela est vrai pour tous les sous-intervalles de $[a, b]$ utilisé par la méthode des trapèzes et puisque que l'aire sous la courbe $y = f(x)$ représente l'intégrale de f , nous avons que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{h}{2} \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) .$$



L'idée de majorer une fonction f par une autre fonction g pour obtenir la relation

$$\int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx$$

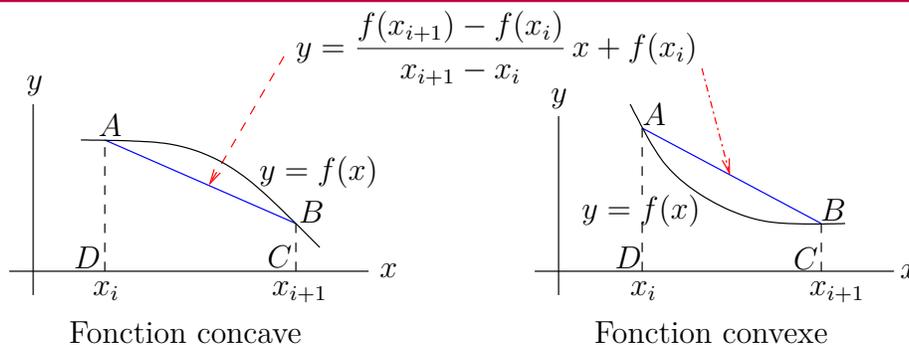


FIGURE 6.27 – La courbure de la fonction f détermine si la méthode des trapèzes donne une surestimation ou une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale de f . Dans le cas d'une fonction concave, nous avons une sous-estimation de la valeur de l'intégrale car la fonction. Par contre, dans le cas d'une fonction convexe, nous avons une surestimation de la valeur de l'intégrale.

peut être utilisée pour estimer la valeur d'intégrales impropres.

Exemple 6.7.10

Estimons la valeur de l'intégrale $\int_1^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ avec une précision de 10^{-4} .

Il y a deux étapes pour trouver cette approximation.

i) Puisque que

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_1^c e^{-x^2/2} dx + \int_c^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

nous cherchons une valeur c telle que

$$0 \leq \int_c^{\infty} e^{-x^2/2} dx < \frac{1}{2} 10^{-4}.$$

ii) Lorsque nous aurons c , nous utiliserons une méthode numérique pour trouver une approximation I de $\int_1^c e^{-x^2/2} dx$ telle que

$$\left| \int_1^c e^{-x^2/2} dx - I \right| < \frac{1}{2} 10^{-4}.$$

Nous aurons alors que

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{\infty} e^{-x^2/2} dx - I \right| &= \left| \int_1^c e^{-x^2/2} dx + \int_c^{\infty} e^{-x^2/2} dx - I \right| \\ &\leq \left| \int_1^c e^{-x^2/2} dx - I \right| + \left| \int_c^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right| < \frac{1}{2} 10^{-4} + \frac{1}{2} 10^{-4} = 10^{-4}. \end{aligned}$$

La valeur I est l'approximation cherchée.

i) Comme aucune de nos techniques d'intégration peut être utilisée pour évaluer l'intégrale

$$\int_c^\infty e^{-x^2/2} dx ,$$

il faut majorer cette intégrale par une intégrale que nous pouvons évaluer.

Pour $x \geq 2$, nous avons $x^2 \geq 2x$. Ainsi, $-x \geq -x^2/2$ pour $x \geq 2$ et

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_c^\infty e^{-x^2/2} dx &\leq \int_c^\infty e^{-x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_c^q e^{-x} dx \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_c^q = \lim_{q \rightarrow \infty} (-e^{-q} + e^{-c}) = e^{-c} \end{aligned}$$

pour $c \geq 2$. Nous prenons c tel que

$$e^{-c} < \frac{1}{2} 10^{-4} ;$$

c'est-à-dire,

$$c > -\ln\left(\frac{1}{2} 10^{-4}\right) = -\ln(2^{-1}) - \ln(10^{-4}) = \ln(2) + 4 \ln(10) \approx 9.903487 .$$

Donc $c = 10$ est un bon choix.

ii) Nous utilisons la méthode des trapèzes pour trouver une première approximation de l'intégrale $\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx$.

Si nous prenons $n = 600$ dans la formule pour la méthode des trapèzes, puisque $a = 1$ et $b = 10$, nous obtenons $h = 9/600 = 3/200$, $x_i = 1 + 3i/200$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 600$ et

$$\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx \approx I_1 = \frac{3}{400} \left(e^{-1/2} + 2 \sum_{j=1}^{599} e^{(1+3j/200)^2/2} + e^{10^2/2} \right) \approx 0.397701117958515 .$$

Comme $e^{-x^2/2}$ est convexe, I_1 est une surestimation de la valeur exacte de l'intégrale.

Nous utilisons la méthode du point milieu pour trouver une deuxième approximation de l'intégrale $\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx$.

Si nous prenons $n = 600$ dans la formule pour la méthode du point milieu, puisque $a = 1$ et $b = 10$, nous obtenons $h = 9/1200 = 3/400$, $x_i = 1 + 3i/400$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 1200$ et

$$\int_1^{10} e^{-x^2/2} dx \approx I_2 = \frac{3}{200} \sum_{j=0}^{599} e^{(1+3(2j+1)/400)^2/2} \approx 0.397684059123784 .$$

Comme $e^{-x^2/2}$ est convexe, I_2 est une sous-estimation de la valeur exacte de l'intégrale.

Nous avons

$$0.3976840 \leq \int_1^{10} e^{-x^2/2} dx \leq 0.3977012 .$$

Puisque

$$0.3977012 - 0.3976840 = 0.172 \times 10^{-4} < \frac{1}{2} 10^{-4},$$

nous pouvons prendre $I = (0.3977012 + 0.3976840)/2 = 0.3976926$ comme approximation de $\int_1^\infty e^{-x^2/2} dx$.

Nous avons assumé que les calculs numériques étaient exactes. Ce n'est généralement pas le cas. Il faudrait considéré les « round-off errors » qui sont dû à l'ordinateur utilisé pour effectuer les calculs.

Pour être plus rigoureux, nous aurions pu utiliser nos formules pour calculer l'erreur de troncature afin de choisir une valeur de n qui soit possiblement plus petite que 600. Nous avons ici simplement choisit une valeur de n au hasard en espérant qu'elle soit assez grande pour obtenir la précision requise. ♣

6.7.3 Méthode de Simpson

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée d'ordre quatre qui est continue.

Nous partageons l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles où n est un entier positif. Soit $h = (b - a)/(2n)$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. L'intervalle $[a, b]$ est l'union des $2n$ sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$.

Nous définissons la fonction $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suivante. Pour $x_{2i} \leq x < x_{2i+2}$, nous définissons

$$m_1 = \frac{f(x_{2i+1}) - f(x_{2i})}{x_{2i+1} - x_{2i}}, \quad m_2 = \frac{f(x_{2i+2}) - f(x_{2i+1})}{x_{2i+2} - x_{2i+1}}, \quad m_3 = \frac{m_2 - m_1}{x_{2i+2} - x_{2i}} \quad (6.7.1)$$

et nous posons

$$p(x) = m_3(x - x_{2i})(x - x_{2i+1}) + m_1(x - x_{2i}) + f(x_{2i}).$$

C'est une fonction quadratique par morceau. Sur un intervalle de la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, le graphe de la fonction p est le graphe du polynôme de degré 2 qui passe par les points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$ (figure 6.28).

Il est intéressant de noter que grâce au théorème fondamental de l'algèbre², il n'y a qu'un seul polynôme de degré deux qui passe par les trois points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$.

L'intégrale du polynôme

$$p(x) = m_3(x - x_{2i})(x - x_{2i+1}) + m_1(x - x_{2i}) + f(x_{2i})$$

sur l'intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ est

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) dx$$

2. Un polynôme de degré n a exactement n racines complexes si nous incluons les racines multiples.

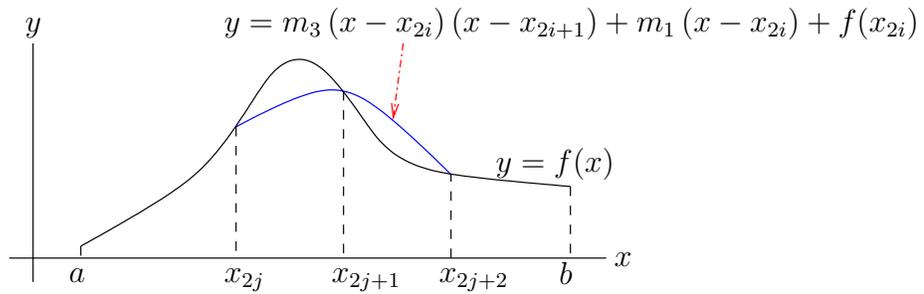


FIGURE 6.28 – Méthode de Simpson pour évaluer numériquement une intégrale. Nous utilisons le polynôme de degré 2 qui passe par les points $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$ et $(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$ pour estimer $f(x)$ lorsque $x_{2i} \leq x < x_{2i+2}$

$$\begin{aligned}
 &= m_3 \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i})(x - x_{2i+1}) \, dx + m_1 \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (x - x_{2i}) \, dx + \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x_{2i}) \, dx \\
 &= m_3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x_{2i} + x_{2i+1}}{2} x^2 + x_{2i} x_{2i+1} x \right) \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} + m_1 \frac{(x - x_{2i})^2}{2} \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \\
 &\quad + f(x_{2i})(x - x_{2i}) \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}.
 \end{aligned}$$

Si nous substituons les expressions pour m_1 et m_3 données en (6.7.1) dans la formule ci-dessus et si nous simplifions le résultat, nous obtenons, après un long calcul que nous laissons aux lecteurs le soin d'effectuer, la formule suivante

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) \, dx = \frac{h}{3} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})).$$

Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b p(x) \, dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} p(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})) \\
 &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right).
 \end{aligned}$$

Nous pourrions démontrer le théorème suivant.

Proposition 6.7.11

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède une dérivée continue d'ordre quatre. Soit

$h = (b - a)/(2n)$ et $x_j = a + jh$ pour $j = 0, 1, \dots, 2n$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right) - \frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4$$

pour une valeur $\xi \in [a, b]$.

Cette proposition nous donne notre troisième et dernière méthode d'intégration numérique.

Méthode 6.7.12 (Méthode de Simpson)

Une approximation de la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par la formule suivante.

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{2j+1}) + f(x_{2n}) \right)$$

où $h = (b - a)/(2n)$ et $x_j = a + jh$ for $j = 0, 1, \dots, 2n$.

L'erreur de troncature pour la méthode de Simpson est $-\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4$.

Remarque 6.7.13

Nous pouvons exprimer la formule d'approximation pour la méthode de Simpson à l'aide des formules d'approximation M_n pour la méthode du point milieu et T_n pour la méthode des trapèzes. En effet, $S_n = (2M_{n/2} + T_n)/3$. Pour la méthode des trapèzes, nous utilisons seulement les intervalles de la forme $[x_{2j}, x_{2j+2}]$. ♠

Exemple 6.7.14

Utilisons la méthode de Simpson pour estimer l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$. Nous allons choisir le nombre de sous-intervalles de $[0, 1]$ pour que l'erreur de troncature soit inférieur à 10^{-4} .

Dans la formula pour la méthode de Simpson, nous posons $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^{-x^2}$, $h = (b - a)/(2n) = 1/(2n)$ et $x_i = 0 + ih = ih$. Il faut choisir n tel que

$$\left| \frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4 \right|$$

soit plus petit que 10^{-4} .

Comme nous ne connaissons pas ξ , nous remplaçons $|f^{(4)}(\xi)|$ par la plus grande valeur que $|f^{(4)}(x)|$ peut prendre sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisque

$$|f^{(4)}(x)| = 4e^{x^2} (3 + 12x^2 + 4x^4) \leq 76e$$

pour tout $x \in [0, 1]$, nous pouvons utiliser $76e$ pour le maximum cherché.

Ainsi, il faut choisir n tel que

$$\left| \frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4 \right| \leq \frac{76e}{180} \left(\frac{1}{2n} \right)^4 = \frac{19e}{720n^4} < 10^{-4};$$

c'est-à-dire,

$$n > \left(\frac{19e}{720} 10^4 \right)^{1/4} = 5 \left(\frac{19e}{45} \right)^{1/4} \approx 5.175220.$$

Un bon choix est $n = 6$. Avec cette valeur de n , $h = \frac{1}{2n} = \frac{1}{12}$ et $x_i = \frac{i}{12}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 12$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{36} \left(e^0 + 2 \sum_{j=1}^5 e^{(j/6)^2} + 4 \sum_{j=0}^5 e^{((2j+1)/12)^2} + e^1 \right) \\ &= \frac{1}{36} \left(1 + 2 \left(e^{(2/12)^2} + e^{(4/12)^2} + \dots + e^{(10/12)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(e^{(1/12)^2} + e^{(3/12)^2} + \dots + e^{(11/12)^2} \right) + e \right) \approx 1.46267. \end{aligned}$$



Remarque 6.7.15

1. Comme nous avons vu, pour déterminer si l'estimation fournie par la méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes est une surestimation ou une sous-estimation, il suffit de déterminer la courbure (convexe ou concave) du graphe de l'intégrande; c'est à dire, le signe de la dérivée seconde de l'intégrande. Ce n'est plus le cas pour la méthode de Simpson. Puisque l'erreur de troncature est

$$-\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)}{180} h^4,$$

il faut considérer le signe de la quatrième dérivée de l'intégrande. Nous ne ferons pas cette analyse.

2. Puisqu'une fonction peut avoir un graphe qui change de courbure lorsque la variable indépendante varie, il n'est souvent pas possible d'utiliser la courbure pour déterminer si la méthode du point milieu ou la méthode des trapèzes vont donner une sous-estimation ou une surestimation de la valeur de l'intégrale. De même, Il est rarement possible d'utiliser le signe de la quatrième dérivée de l'intégrande pour déterminer si la méthode de Simpson va donner une sous-estimation ou une surestimation de la valeur de l'intégrale car le signe de cette dérivée peut changer lorsque la valeur de la variable indépendante varie.
3. Pour une même précision, la méthode de Simpson demande de subdiviser l'intervalle d'intégration en beaucoup moins de sous-intervalles que les méthodes du point milieu et des trapèzes. Pour justifier cette remarque, il suffit de considérer l'erreur de troncature pour les trois méthodes que nous avons présentées.

Si nous supposons que f'' et $f^{(4)}$ varient lentement par rapport à la variable indépendante, nous pouvons comparer l'ordre de grandeur de l'erreur de troncature pour les trois méthodes qui nous intéressent. Pour h donné, l'erreur de troncature pour les méthodes du point milieu et des trapèzes est de l'ordre de h^2 , alors qu'elle est de l'ordre de h^4 pour la méthode de Simpson. Lorsque h diminue (i.e. $h \rightarrow 0$), l'erreur de troncature de la méthode de Simpson diminue beaucoup plus rapidement que celle pour les méthodes du point milieu ou des trapèzes. C'est ce qui fait que la méthode de Simpson est généralement supérieure aux deux autres méthodes.

Des trois méthodes que nous avons étudiées, c'est la méthode de Simpson qui demande le moins de sous-intervalles et donc le moins d'opérations arithmétiques pour estimer une intégrale avec une précision donnée. De plus, si nous tenons compte des « round-off errors » lors des calculs sur ordinateurs, il est préférable d'utiliser une méthode qui demande moins d'opérations arithmétiques pour minimiser ce type d'erreurs.



6.8 Exercices

6.8.1 Intégrales indéfinies

Question 6.1

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int -x^{-2} dx & \text{b)} \int \frac{10}{x^9} dx & \text{c)} \int (5z^{-1.2} - 1.2) dz \\ \text{d)} \int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}} + 3t \right) dt & \text{e)} \int 2^x dx & \text{f)} \int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx \\ \text{g)} \int \frac{(3t+2)^2}{4t^2} dt & \text{h)} \int \frac{(x^{1/3} + 1)^2}{x^{2/3}} dx & \end{array}$$

Question 6.2

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{1}{1+4t} dt & \text{b)} \int \frac{1}{5-3x} dx & \text{c)} \int 3e^{3x/7} dx \\ \text{d)} \int \left(1 + \frac{t}{3} \right)^7 dt & \text{e)} \int \frac{e^z}{1+e^z} dz & \text{f)} \int 3y\sqrt{1+y^2} dy \\ \text{g)} \int \frac{1}{x \ln(x)} dx & \text{h)} \int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}} dx & \text{i)} \int x^2\sqrt{x^3+1} dx \\ \text{j)} \int e^t (1+e^t)^4 dt & \text{k)} \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{11}} dx & \text{l)} \int \frac{e^{1/t}}{t^2} dt \\ \text{m)} \int \frac{\ln(x)}{x} dx & \text{n)} \int \frac{x+3}{x^2-9} dx & \text{o)} \int e^t (2+e^{2t}) dt \\ \text{p)} \int \frac{t^{3/5}}{1+t^{2/5}} dt & \text{q)} \int \frac{x}{(1+x^2)^9} dx & \text{r)} \int \frac{x^3}{(1+x^2)^9} dx \end{array}$$

Question 6.3 🛠️ 🌲

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \int \cos(2\pi(x-2)) \, dx & \text{b)} & \int \frac{\cos(\theta)}{1-\cos^2(\theta)} \, d\theta & \text{c)} & \int \frac{\sin(x)}{1-\sin^2 x} \, dx \\
 \text{d)} & \int \sqrt{x} \sin(x^{3/2}+1) \, dx & \text{e)} & \int \frac{\cos(1/t)}{t^2} \, dt & \text{f)} & \int \frac{1}{x^2+9} \, dx \\
 \text{g)} & \int \frac{x^3+1}{x^2+3} \, dx & \text{h)} & \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} \, dx & \text{i)} & \int \tan(x) \sec^4(x) \, dx \\
 \text{j)} & \int \frac{1}{2-\cos(x)} \, dx & \text{k)} & \int x^2 \sin(x^3+1) \, dx & \text{l)} & \int \frac{(2t+1)^2}{1+t^2} \, dt \\
 \text{m)} & \int \sin^5(x) \cos^4(x) \, dx & \text{n)} & \int \frac{\sin^5(x)}{\cos^4(x)} \, dx & \text{o)} & \int \cos^3(x) \sin^2(x) \, dx
 \end{array}$$

Question 6.4

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \int \ln(\sqrt{x}) \, dx & \text{b)} & \int x^2 e^x \, dx & \text{c)} & \int \frac{x}{e^{3x}} \, dx \\
 \text{d)} & \int x^2 e^{-x} \, dx & \text{e)} & \int x^3 e^{x^2} \, dx & \text{f)} & \int (x^2+x^6) \ln(x) \, dx \\
 \text{g)} & \int x^3 \ln(x^2+2) \, dx & & & &
 \end{array}$$

Question 6.5 🛠️ 🌲

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a)} \int \theta \cos(\pi\theta) \, d\theta \quad \text{b)} \int e^x \sin(x) \, dx \quad \text{c)} \int \theta^3 \sin(\theta^2) \, d\theta$$

Question 6.6

Évaluez les intégrales indéfinies suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \int \frac{x^4+3}{x^2-4x+3} \, dx & \text{b)} & \int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} \, dx & \text{c)} & \int \frac{1}{x^2+x+1} \, dx \\
 \text{d)} & \int \frac{1}{t^2+6t+8} \, dt & \text{e)} & \int \frac{1}{x^2-4x+13} \, dx & \text{f)} & \int \frac{1}{x^2-9} \, dx \\
 \text{g)} & \int \frac{1}{x^2-x-2} \, dx & \text{h)} & \int \frac{t^2+1}{t^2+3t+2} \, dt & \text{i)} & \int \frac{x^3-x-2}{x^2-4} \, dx \\
 \text{j)} & \int \frac{9x+29}{x^2+2x-15} \, dx & & & &
 \end{array}$$

Suggestion : Pour certaines des intégrales, vous pourriez avoir à compléter le carré du dénominateur et à utiliser une substitution.

Question 6.7 🛠️

Évaluez chacune des intégrales indéfinies suivantes.

$$\text{a) } \int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx \qquad \text{b) } \int \frac{x^2 - 3x - 23}{(x-2)(x+3)^2} dx$$

Question 6.8

Trouvez toutes les fonctions f telles que $f''(x) = 1 + x^{4/5}$.

6.8.2 Définition de l'intégrale définie**Question 6.9**

Donnez la somme de Riemann à droite et la somme de Riemann à gauche pour l'intégrale $\int_0^1 (1+t^3) dt$ où l'intervalle $[0, 1]$ est subdivisée en 5 sous-intervalles égaux.

Question 6.10 🌲

La vitesse d'une abeille en vol a été mesurée à toutes les cinq secondes pendant 50 secondes. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
v (m/s)	12.7	12.2	11.8	11.5	11.3	11.2	11.2	11.3	11.6	12.0	12.5

Supposons que l'abeille vole en ligne droite. Utilisez une somme de Riemann à droite pour estimer la distance parcourue par l'abeille. Utilisez une somme de Riemann à gauche pour estimer la distance parcourue par l'abeille.

Question 6.11

Donnez la somme de Riemann à droite et celle à gauche pour l'intégrale $\int_0^2 t^2 dt$ lorsque la partition de l'intervalle $[0, 2]$ comprend cinq sous-intervalles égaux.

Question 6.12

Si $f(x) = \sqrt{x} - 2$, calculez la somme de Riemann pour le point milieu de l'intégrale $\int_1^6 f(x) dx$ lorsque l'intervalle $[1, 6]$ est subdivisé en $n = 5$ sous-intervalles égaux. Tracez le graphe de f et les rectangles de la somme de Riemann.

Question 6.13

Utilisez les sommes de Riemann pour le point milieu avec $n = 5$ sous-intervalles égaux pour obtenir une approximation de la valeur de l'intégrale

$$\int_{2.5}^{10} \sin(\sqrt{x}) dx .$$

Donnez votre réponse avec une précision de quatre chiffres décimaux.

Question 6.14

Le tableau ci-dessous contient quelques valeurs d'une fonction croissante. Utilisez une somme à droite et une somme à gauche pour trouver une borne supérieure et une borne inférieure de l'intégrale

$$\int_0^{25} f(x) dx .$$

Utilisez le plus grand nombre de points possible pour chaque somme.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

Question 6.15

Un objet se déplace en ligne droite durant 8 secondes. Le tableau ci-dessous donne la vitesse v de l'objet en mètres par seconde toutes les 2 secondes.

t (sec)	0	2	4	6	8
v (m/s)	10.0	9.5	9.0	8.0	6.0

Comme nous pouvons voir, la vitesse est décroissante. Répondre aux questions suivantes à l'aide des sommes de Riemann à droite et à gauche.

- a) Donnez une borne supérieure et une borne inférieure de la distance parcourue pendant les 8 secondes.
- b) À quelle fréquence devons-nous mesurer la vitesse de l'objet pour obtenir des bornes supérieures et inférieures qui soient à 0.1 mètre de la distance parcourue pendant les 8 secondes ?

Question 6.16

La somme $0.4(0.4^3 + 0.8^3 + 1.2^3 + 1.6^3 + 2^3)$ est une somme de Riemann à droite pour une intégrale. Quelle est cette intégrale ?

Question 6.17

Exprimez la limite suivante comme une intégrale définie.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi j}{n} \right) \sin \left(\frac{\pi j}{n} \right) .$$

Question 6.18

Donnez la somme de Riemann à droite pour l'intégrale

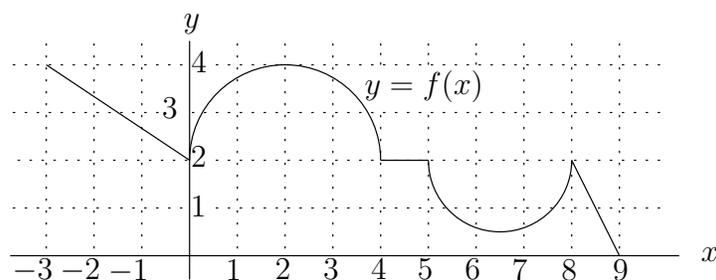
$$\int_2^5 \sqrt{2 + x^{1/3}} \, dx$$

où nous assumons que l'intervalle $[2, 5]$ est subdivisé en N sous-intervalles égaux.

Question 6.19

Utilisez le graphe de la fonction f donné ci-dessous pour évaluer les intégrales suivantes.

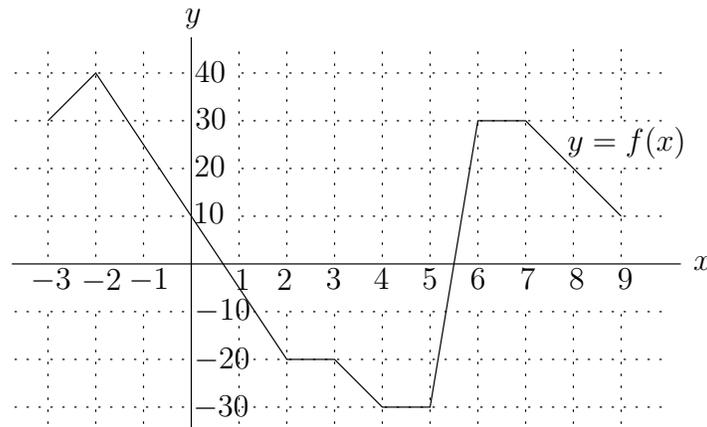
a) $\int_4^9 f(x) \, dx$ b) $\int_{-2}^2 f(x) \, dx$



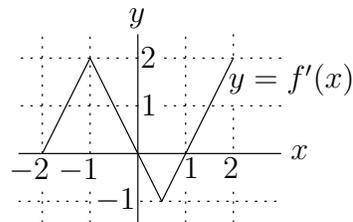
Question 6.20

Utilisez le graphe de la fonction f donné ci-dessous pour évaluer les intégrales suivantes.

$$\text{a) } \int_{-2}^5 f(x) dx \qquad \text{b) } \int_0^{10} f(x) dx$$

**Question 6.21**

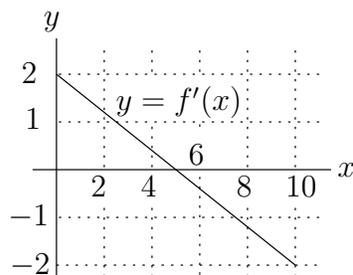
Le graphe de f' est donné ci-dessous.



Si $f(-1) = 2$, quelle est la valeur de $f(2)$?

Question 6.22

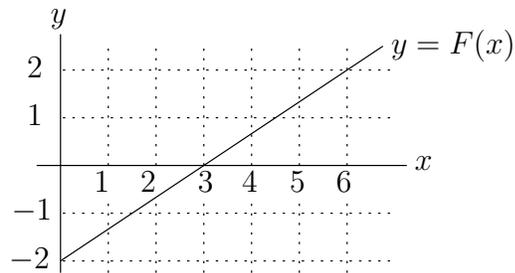
Le graphe de f' est donné ci-dessous.



Si $f(0) = 1$, tracez un graphe possible pour f . Soyez aussi précis que possible.

Question 6.23

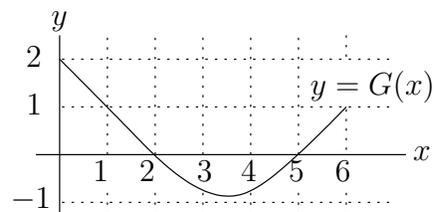
Le graphe de F est donné ci-dessous.



Tracez le graphe de la primitive f de F qui satisfait $f(1) = 3$.

Question 6.24

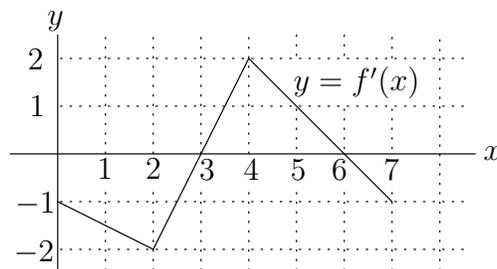
Le graphe de G est donné ci-dessous.



Tracez le graphe de la primitive g de G qui satisfait $g(1) = 10$.

Question 6.25

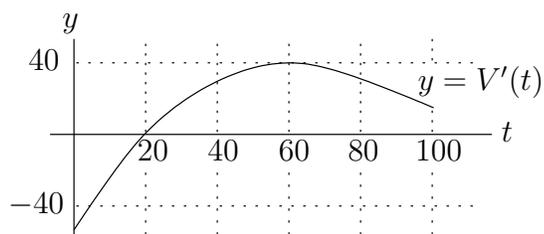
Le graphe de $f'(x)$ est donné ci-dessous. Nous supposons de plus que $f(0) = 2$.



- Trouvez tous les points critiques et points d'inflexion de $f(x)$ avec la valeur de $f(x)$ à ces points.
- Tracez le graphe de $f(x)$ en indiquant bien tous les points critiques et les points d'inflexion.

Question 6.26

Le graphe de la fonction V' est donné ci-dessous.



Tracez le graphe de V , la primitive de la fonction V' , qui passe par le point $(0, 1000)$.

6.8.3 Intégrales définies

Question 6.27

Évaluez les intégrales suivantes.

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt \quad , \quad \int_2^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt \quad \text{et} \quad \int_1^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt .$$

Si vous connaissez la valeur de deux des intégrales ci-dessus, montrez que vous connaissez la valeur de la troisième intégrale.

Question 6.28

Si $\int_2^8 f(x) dx = 5$ et $\int_5^8 f(x) dx = 7$, calculez les intégrales définies suivantes.

$$\text{a) } \int_2^5 f(x) dx \quad \text{b) } \int_5^8 (2f(x) + 3x) dx \quad \text{c) } \int_{-2/3}^{2/3} f(2 - 3t) dt$$

Question 6.29

Évaluez les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_1^5 \frac{5}{x^3} dx & \text{b) } \int_1^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \right) dx \\ \text{c) } \int_1^4 \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx & \text{d) } \int_1^2 \frac{3}{t^4} dt \end{array}$$

Question 6.30

Évaluez les intégrales définies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^5 3e^{x/5} dx & \text{b) } \int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2} \right)^4 dt & \text{c) } \int_1^{10} (1 + 2t)^{-4} dt \\ \text{d) } \int_0^2 \frac{1}{1 + 4t} dt & \text{e) } \int_0^1 x^2(1 + 2x^3)^5 dx & \text{f) } \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\ \text{g) } \int_1^e \frac{1}{x(1 + (\ln(x))^2)} dx & \text{h) } \int_1^e x^2 \ln(x) dx & \text{i) } \int_1^2 \frac{4x^2 - 14x + 10}{2x^2 - 7x + 3} dx \end{array}$$

Question 6.31

Utilisez la méthode d'intégration par parties pour obtenir une relation entre F_n et F_{n-1} où

$$F_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^n} dx.$$

Question 6.32

Évaluez les intégrales définies suivantes.

a) $\int_0^\pi (2 \sin(\theta) + 3 \cos(\theta))$

b) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x) \cos^3(x) dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2(x) \sec^4(x) dx$

e) $\int_0^2 \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 4} dx$

f) $\int_0^1 \frac{1}{(1 + 2x - x^2)^{1/2}} dx$

Question 6.33 

Évaluez les intégrales définies suivantes.

a) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3 \sqrt{t^2 - 1}} dx$

b) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{16 - t^2}} dt$

Question 6.34

Évaluez les intégrales définies suivantes en faisant le moins de calculs possible. En fait, dans certains cas, aucun calcul n'est nécessaire.

a) $\int_{-2}^2 (y^4 + 5y^3) dy$

b) $\int_{-a}^a x \sqrt{x^2 + a^2} dx$

Question 6.35  

Évaluez les intégrales définies suivantes en faisant le moins de calculs possible. En fait, dans certains cas, aucun calcul n'est nécessaire.

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 - 20 \sin(x)) dx$

b) $\int_2^5 \cos(2\pi(x - 2)) dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} x^{16} \sin(2x) dx$

Question 6.36  Vérifiez que $\frac{d}{dx} \int_a^x f(s) ds = f(x)$ pour $f(s) = (5s + 1)^7$ et a une constante.**Question 6.37**

Calculez les dérivées des fonctions suivantes.

a) $g(y) = \int_2^y t^2 \sin(t) dt$

b) $h(x) = \int_2^{1/x} \arctan(t) dt$

Suggestion : Utilisez le Théorème fondamental du calcul différentiel.

6.8.4 Intégrales impropres**Question 6.38**

Déterminez si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. Évaluez les intégrales impropres qui convergent.

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & \int_0^{\infty} e^{-3x} dx & \text{b)} & \int_0^{\infty} \frac{1}{(2+5x)^4} dx & \text{c)} & \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \\
\text{d)} & \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx & \text{e)} & \int_1^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}} dx & \text{f)} & \int_{-\infty}^0 3x^2 e^{-x^3} dx \\
\text{g)} & \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}} dx & \text{h)} & \int_0^{\infty} x e^{-x} dx & \text{i)} & \int_0^3 \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx \\
\text{j)} & \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx & \text{k)} & \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+3x)^{3/2}} dx & \text{l)} & \int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6} dx \\
\text{m)} & \int_0^2 \frac{1}{4-x^2} dx & \text{n)} & \int_1^2 \frac{3}{\sqrt[3]{x}-1} dx & \text{o)} & \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx \\
\text{p)} & \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx & \text{q)} & \int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx & &
\end{array}$$

Question 6.39 

Utilisez le test de comparaison des intégrales pour déterminer si les intégrales suivantes convergent.

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3} + x^3} dx \quad \text{b)} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/3} + x^3} dx \quad \text{c)} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + x^{4/3}} dx$$

Question 6.40 

Utilisez le test de comparaison pour déterminer si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. Donnez une borne supérieure pour la valeur des intégrales impropres qui convergent.

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & \int_0^1 \frac{1}{x^2 e^x} dx & \text{b)} & \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + e^x} dx & \text{c)} & \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^3 + 2} dx \\
\text{d)} & \int_1^{\infty} \frac{1 + \cos^2 x}{x^2} dx & \text{e)} & \int_0^1 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x^4 + 3x} dx & \text{f)} & \int_1^{\infty} \frac{x^2 \cos^2 x + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx \\
\text{g)} & \int_1^{\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3}{x^2 + 2x} dx & & & &
\end{array}$$



Applications de l'intégrale | 7

Nous présentons plusieurs des applications de l'intégrale d'une fonction dans ce chapitre. Au risque de ce répéter, les applications spécifiquement pour les sciences de la vie sont identifiées par le symbole \clubsuit alors que ceux spécifiquement pour les domaines de la physique et du génie sont identifiées par le symbole \spadesuit . Comme c'était le cas pour les applications de la dérivée d'une fonction au chapitre 5, la classification des applications est très académique et arbitraire. La majorité des applications dans ce chapitre proviennent de la physique et du génie. Il n'en reste pas moins que certaines de ces applications ont aussi une utilité dans les sciences de la vie.

7.1 Aire entre deux courbes

Pour estimer l'aire A de la région R entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$, nous pouvons procéder comme nous l'avons fait pour estimer l'aire sous la courbe $y = e^{-x}$ au chapitre précédent. Supposons que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x .

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta x = (b - a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Pour chaque valeur de i , nous choisissons x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et définissons le rectangle

$$R_i = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ et } g(x_i^*) \leq y \leq f(x_i^*)\}.$$

L'aire d'un tel rectangle est $(f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x$ (figure 7.1).

La somme de l'aire de chaque rectangle R_i nous donne une approximation de l'aire A de la région R entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$.

$$A \approx \sum_{i=0}^{k-1} (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \Delta x.$$

De plus, nous remarquons que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons que

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

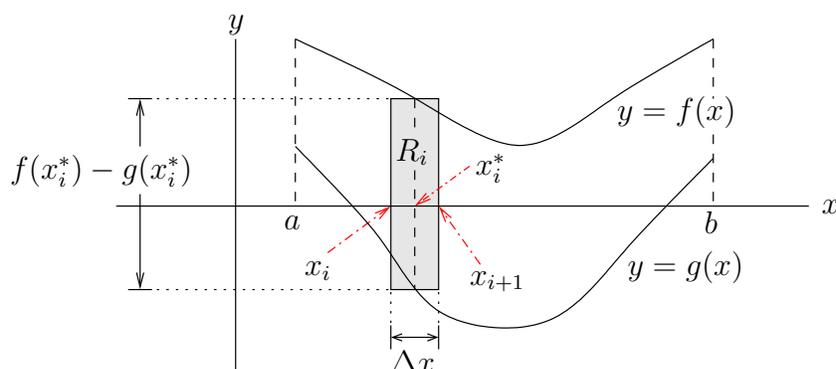


FIGURE 7.1 – Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann si les courbes ne se croisent pas.

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x , alors $f(x_i^*) - g(x_i^*) \geq 0$ est bien la hauteur du rectangle R_i . Par contre, dans le cas où $f(x) < g(x)$ pour certaines valeurs de x (figure 7.2), nous pourrions avoir que $f(x_i^*) < g(x_i^*)$ pour certaines valeurs de i . La hauteur du rectangle R_i est alors donnée par $|f(x_i^*) - g(x_i^*)|$. Nous obtenons le résultat suivant.

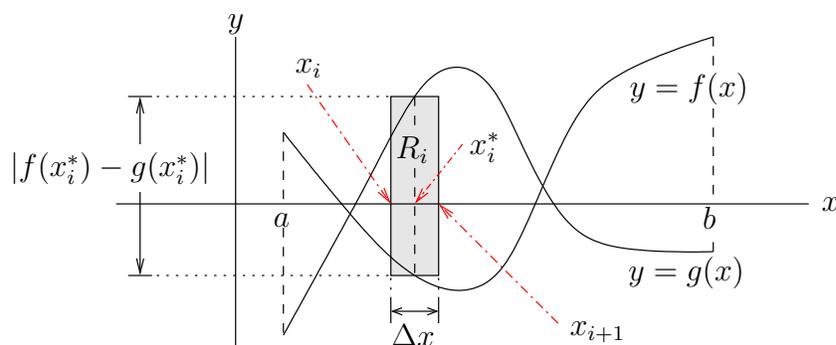


FIGURE 7.2 – Estimation de l'aire entre deux courbes à l'aide des sommes de Riemann si les courbes se croisent

Méthode 7.1.1

L'aire A de la région R entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et entre les droites $x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx .$$

La procédure que nous avons utilisée pour obtenir la formule ci-dessus peut évidemment

être modifiée pour donner la formule suivante.

Méthode 7.1.2

L'aire A de la région R entre les courbes $x = f(y)$ et $x = g(y)$, et entre les droites $y = a$ et $y = b$ est donnée par

$$A = \int_a^b |f(y) - g(y)| dy .$$

Exemple 7.1.3

Trouvons l'aire A de la région R bornée par les courbes $y = f(x) = x^2$ et $y = g(x) = 2 - x^2$, et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

Nous retrouvons le graphe de ces deux courbes à la figure 7.3. Remarquons que $f(x) < g(x)$ pour $0 \leq x < 1$ et $f(x) > g(x)$ pour $1 < x \leq 2$. Le point $(1, 1)$ est le point d'intersection des deux courbes que nous pouvons trouver en résolvant $f(x) = g(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_0^1 (2 - x^2 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - (2 - x^2)) dx = \int_0^1 (2 - 2x^2) dx + \int_1^2 (2x^2 - 2) dx \\ &= \left(2x - \frac{2}{3}x^3\right) \Big|_{x=0}^1 + \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x\right) \Big|_{x=1}^2 = 4 . \end{aligned}$$

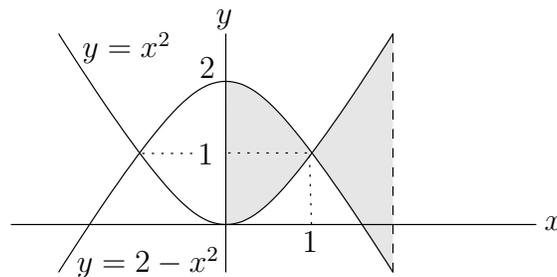


FIGURE 7.3 – Région bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 2 - x^2$, et les droites $x = 0$ et $x = 2$

Exemple 7.1.4

Trouvons l'aire A de la région R bornée par les courbes $y = f(x) = x$ et $y = g(x) = \sin(x)$, et les droites $x = -\pi/4$ et $x = \pi/2$.

Le dessin de la région R est donné à la figure 7.4. Remarquons que $f(x) > g(x)$ pour $0 < x \leq \pi/2$ et $f(x) < g(x)$ pour $-\pi/4 < x < 0$. Ainsi,

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-\pi/4}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi/4}^0 (\sin(x) - x) dx + \int_0^{\pi/2} (x - \sin(x)) dx \\
&= \left(-\cos(x) - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=-\pi/4}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + \cos(x) \right) \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{5\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2.
\end{aligned}$$

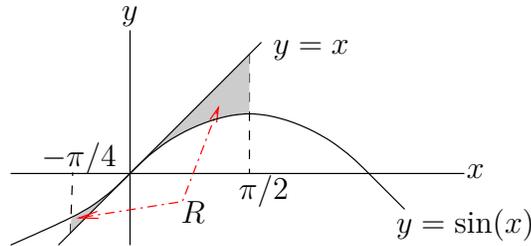


FIGURE 7.4 – Région bornée par les courbes $y = x$ et $y = \sin(x)$ pour $-\pi/4 \leq x \leq \pi/2$.

Exemple 7.1.5

Trouvons l'aire A de la région R bornée par la parabole $4x + y^2 = 0$ et la droite $y = 2x + 4$.

Pour trouver les valeurs de x aux points d'intersection de la parabole avec la droite, nous substituons $y = 2x + 4$ dans $4x + y^2 = 0$ pour obtenir $4x + (2x + 4)^2 = 4(x + 4)(x + 1) = 0$. Donc $x = -4$ ou $x = -1$. La parabole et la droite se coupent aux points $(-1, 2)$ et $(-4, -4)$. Le dessin de la région R est donné à la figure 7.5.

Remarquons que pour calculer l'aire $A = \int_{-4}^0 |f(x) - g(x)| dx$, il faudrait utiliser $f(x) = 2x + 4$ et $g(x) = -2\sqrt{-x}$ entre -4 et -1 , et $f(x) = 2\sqrt{-x}$ et $g(x) = -2\sqrt{-x}$ entre -1 et 0 . Il est donc plus simple d'utiliser une intégrale par rapport à y pour calculer l'aire de la région R .

Si nous résolvons $4x + y^2 = 0$ et $y = 2x + 4$ pour x , nous obtenons les fonctions $x = f(y) = -y^2/4$ et $x = g(y) = (y - 4)/2$. Nous avons $f(y) > g(y)$ pour $-4 < y < 2$. Ainsi,

$$A = \int_{-4}^2 |f(y) - g(y)| dy = \int_{-4}^2 \left(-\frac{y^2}{4} - \frac{y - 4}{2} \right) dy = \left(-\frac{y^3}{12} - \frac{(y - 4)^2}{4} \right) \Big|_{x=-4}^2 = 9.$$



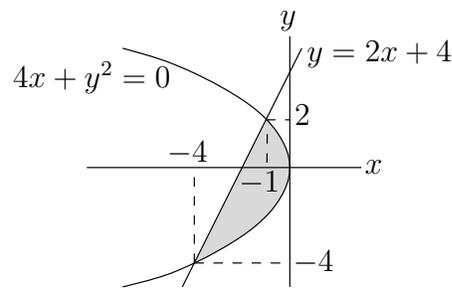


FIGURE 7.5 – Région bornée par la parabole $4x - y^2 = 0$ et la droite $y = 2x + 4$.

7.2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 7.2.1

La **valeur moyenne** d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

Pour justifier cette définition, rappelons que la formule pour calculer la moyenne de k nombres m_1, m_2, \dots, m_k est

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_i .$$

Pour estimer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle, il suffit de choisir un très grand nombre de points dans l'intervalle et de faire la moyenne des valeurs de la fonction évaluée à tous ces points. Plus nous utilisons de points, plus nous sommes près de la valeur moyenne de la fonction.

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta x = (b-a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$. Nous choisissons x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. La valeur moyenne M_f de f sur l'intervalle $[a, b]$ est approximativement la moyenne de $f(x_0^*), f(x_1^*), \dots, f(x_{k-1}^*)$. Nous avons donc

$$M_f \approx \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) .$$

Or $k = (b-a)/\Delta x$. Si nous substituons dans l'expression précédente, nous trouvons

$$M_f \approx \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i^*) \Delta x .$$

La somme que nous retrouvons dans l'expression précédente est une somme de Riemann pour $\int_a^b f(x) dx$. Ainsi, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

Exemple 7.2.2

Quelle est la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$?

$$M_f = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_{x=-1}^1 = \frac{1}{3} .$$



Comme pour la dérivée d'une fonction, il y a un théorème de la moyenne pour l'intégrale d'une fonction

Théorème 7.2.3 (Théorème de la moyenne pour l'intégrale)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

C'est-à-dire que $f(c)$ est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$.

La conclusion du théorème précédent est illustrée à la figure 7.6. Cette figure est une représentation typique de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle. L'aire sous la courbe $y = f(x)$ et au-dessus de la droite $y = M_f$ (i.e. la région en bleu) est égale à l'aire au-dessus de la courbe $y = f(x)$ et sous la droite $y = M_f$ (i.e. la région en rouge). En effet, puisque

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b M_f dx = M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

nous obtenons

$$0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - M_f) dx .$$

Pour que cette intégrale soit nulle, il faut que l'aire sous la courbe $y = f(x) - M_f$ et au-dessus de l'axe des x soit égale à l'aire au-dessus de la courbe $y = f(x) - M_f$ et sous l'axe des x . Avec une translation de M_f vers le haut, la courbe $y = f(x) - M_f$ devient le graphe de f et l'axe des x devient la droite $y = M_f$. L'énoncé sur l'égalité entre l'aire des régions en bleu et l'aire des régions en rouge est une conséquence de la propriété qu'ont les translations de préserver l'aire.

Exemple 7.2.4

Soit $f(x) = -x^2 + 4$, trouvons un point c de l'intervalle $[0, 2]$ tel que $f(c)$ est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 2]$.

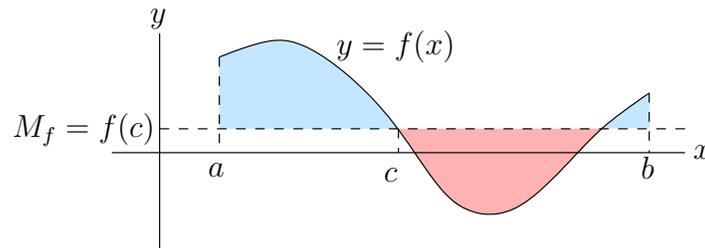


FIGURE 7.6 – Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c)$ est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$

$$M_f = \frac{1}{2} \int_0^2 (-x^2 + 4) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{x=0}^2 = \frac{8}{3}.$$

Le point c est donné par $f(c) = -c^2 + 4 = 8/3$. Si nous résolvons pour c dans l'intervalle $[0, 2]$, nous trouvons $c = 2/\sqrt{3}$.

Le graphe de f ainsi que la représentation de la valeur moyenne sont donnés à la figure 7.7.

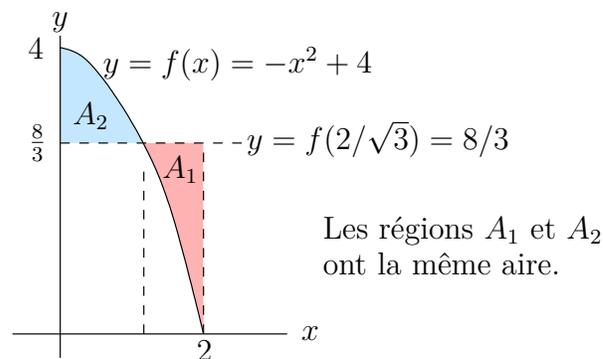


FIGURE 7.7 – Graphe de $f(x) = -x^2 + 4$. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, 2]$ est $8/3$. L'aire sous la courbe $y = f(x)$ et au-dessus de la droite $y = 8/3$ (en bleu) est égale à l'aire au dessus de la courbe $y = f(x)$ et sous la droite $y = 8/3$ (en rouge) pour $0 \leq x \leq 2$.

7.3 Volume d'un objet

Nous pouvons utiliser l'intégration pour calculer le volume V d'un solide S comme celui représenté à la figure 7.8. Supposons que le solide S soit contenu entre les plans $x = a$ et

$x = b$.

Pour estimer le volume V du solide S , nous partageons le solide S en fines tranches parallèles au plan y, z et nous estimons le volume de chacune de ces tranches. La somme de ces approximations nous donne une approximation du volume de S .

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta x = (b - a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

La i^e tranche du solide S qui est représenté à la figure 7.8 est donnée par l'intersection du solide S avec la région définie par $\{(x, y, z) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$.

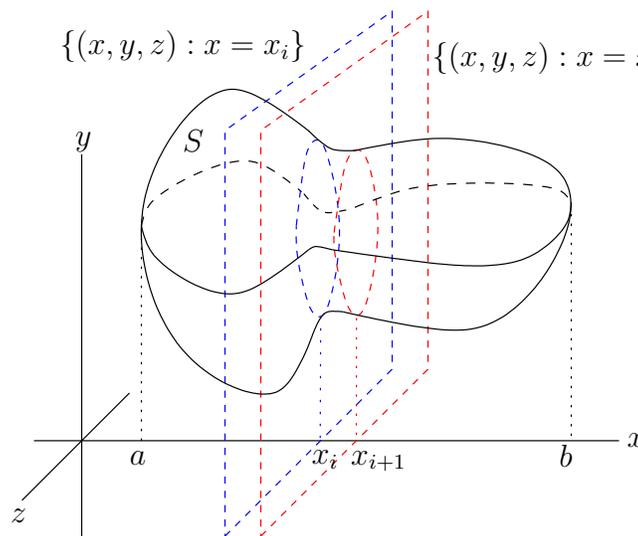


FIGURE 7.8 – La tranche du solide S pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Le volume de cette tranche est V_i .

Pour estimer le volume V_i de la i^e tranche, nous choisissons x_i^* dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Nous considérons le cylindre S_i qui est représenté à la figure 7.9, dont la hauteur est Δx et la base est la section B_i obtenue de l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le solide S .

Nous retrouvons à la figure 7.10 un exemple possible pour la section B_i du cylindre S_i ; notons que B_i n'est pas toujours un disque comme nous avons dans la figure. Les côtés du cylindre S_i sont parallèles à l'axe des x .

Le volume du cylindre S_i est $A(x_i^*)\Delta x$ où $A(x_i^*)$ est l'aire de la section B_i . Pour Δx petit, le volume V_i de la i^e tranche de S est approximativement le volume de S_i . Ainsi,

$$V_i \approx A(x_i^*)\Delta x$$

pour Δx petit. La somme des volumes des cylindres S_i donne un estimé du volume V de S .

$$V = \sum_{i=0}^{k-1} V_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} A(x_i^*)\Delta x$$

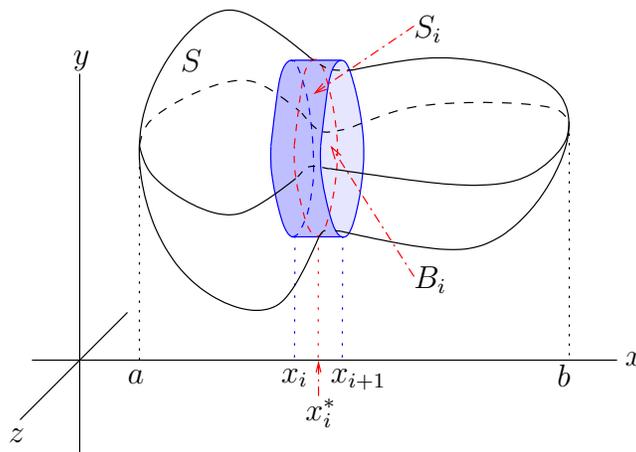


FIGURE 7.9 – S_i est approximativement une tranche du solide S . L'épaisseur de S_i est Δx .

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près du volume V du solide S . À la limite, nous obtenons le volume V de S .

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$\int_a^b A(x) dx$$

où $A(s)$ est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan $x = s$ avec le solide S . Ainsi, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons le résultat suivant.

Méthode 7.3.1 (des tranches)

Le volume V d'un solide S comme celui représenté à la figure 7.10 est donné par

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad (7.3.1)$$

où $A(s)$ est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan $x = s$ avec le solide S .

Exemple 7.3.2

Trouvons le volume V du tronc de pyramide S représenté à la figure 7.11 dont la base est un carré qui possède des côtés de longueur a et le sommet est aussi un carré mais qui possède des côtés de longueur b . La hauteur du tronc de pyramide est h .

Selon la façon dont nous tranchons S , nous obtenons des sections de niveaux de complexité différents. La façon de trancher S qui donne les sections les plus simples est de trancher horizontalement. Les sections sont alors des carrés.

Pour utiliser la formule (7.3.1), il faut trouver une formule pour l'aire $A(x)$ des sections obtenues par l'intersection de S avec le plan x constant. Comme nous pouvons le voir à partir

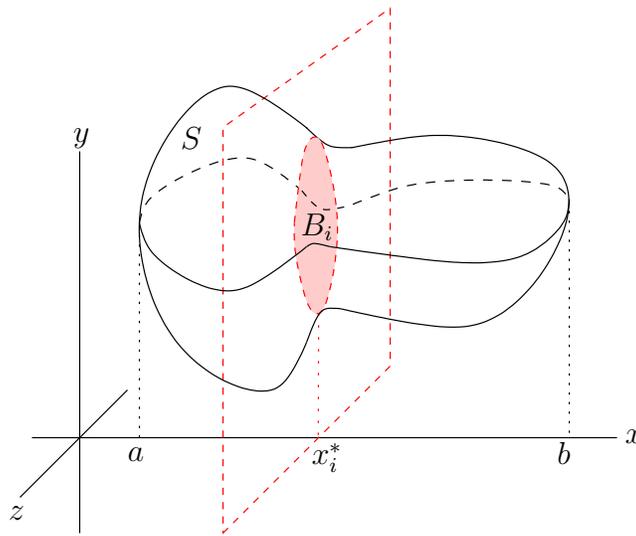


FIGURE 7.10 – La section B_i est engendrée par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le solide S . L'aire de la section est $A(x_i^*)$.

du dessin d'une coupe verticale de S que nous retrouvons à la figure 7.11, la longueur y d'un côté d'une section varie linéairement en fonction de x . Nous avons $y = a$ pour $x = 0$ et $y = b$ pour $x = h$. La droite qui passe par ces deux points est de pente $m = (b - a)/(h - 0) = (b - a)/h$. Ainsi, son équation est

$$y = \left(\frac{b-a}{h}\right)x + a$$

car $y = a$ lorsque $x = 0$. Nous obtenons

$$A(x) = \left(\left(\frac{b-a}{h}\right)x + a\right)^2.$$

Le volume V de S est donc

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \left(\left(\frac{b-a}{h}\right)x + a\right)^2 dx = \frac{h}{3(b-a)} \left(\left(\frac{b-a}{h}\right)x + a\right)^3 \Big|_{x=0}^h \\ &= \frac{h}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = \frac{h}{3} (b^2 + ab + a^2) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la substitution $y = (b-a)x/h + a$ pour évaluer l'intégrale. ♣

Exemple 7.3.3

Trouvons le volume V du solide S dont la base est la région du plan x,y bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$, et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés. Nous retrouvons une représentation de ces sections à la figure 7.12.

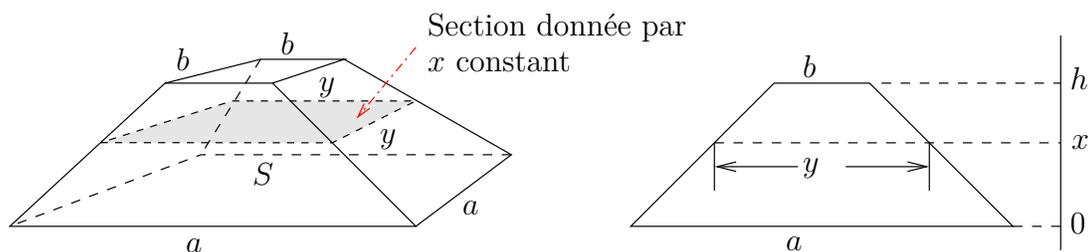
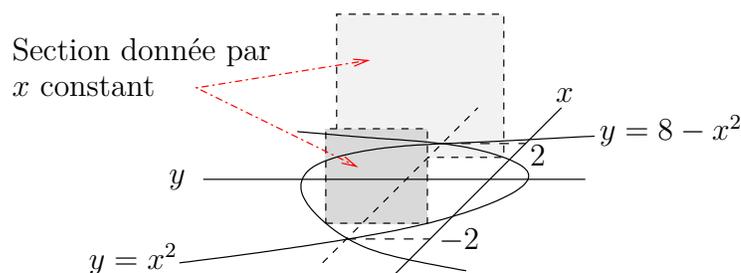


FIGURE 7.11 – Le tronc de pyramide et une section perpendiculaire de ce tronc.

Puisque les deux courbes se coupent à $x = -2$ et $x = 2$ (les solutions de $x^2 = 8 - x^2$), la base du solide est la région entre les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$ pour $-2 \leq x \leq 2$.

La section pour x constant est un carré dont la longueur des côtés est $(8 - x^2) - x^2 = 8 - 2x^2$. L'aire de cette section est donc $A(x) = (8 - 2x^2)^2$. Le volume du solide est

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 A(x) \, dx = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2)^2 \, dx = \int_{-2}^2 (64 - 32x^2 + 4x^4) \, dx \\ &= \left(64x - \frac{32}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^5 \right) \Big|_{x=-2}^2 = \frac{2^{11}}{15}. \end{aligned}$$

FIGURE 7.12 – Solide dont la base est bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$, et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.

7.3.1 Solides de révolution

Nous pouvons utiliser (7.3.1) pour trouver le volume d'un solide obtenu par la rotation d'une région plane autour d'un axe.

Supposons que la région R soit la région bornée par les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$ (figure 7.13).

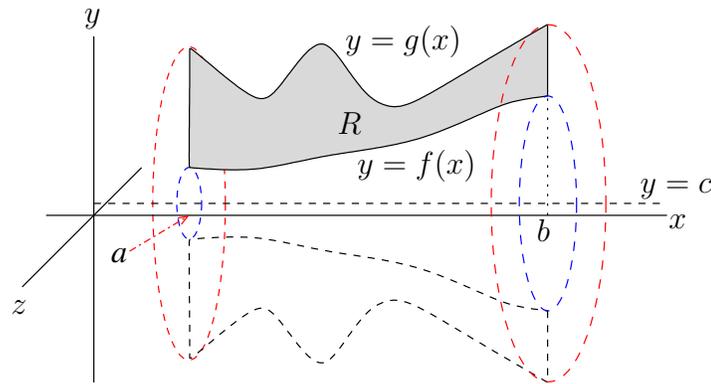


FIGURE 7.13 – La rotation de la région R autour de l'axe $y = c$ (et $z = 0$) donne une solide dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont les anneaux comme celui représenté à la figure 7.15

Si nous faisons la rotation de la région R autour de l'axe $y = c$ (et $z = 0$) qui ne coupe pas la région R , nous obtenons un solide S semblable à celui illustré à la figure 7.14.

Pour calculer le volume V du solide S , il faut trouver une formule pour l'aire $A(x)$ des sections perpendiculaires à l'axe des x . Si nous faisons la projection dans le plan y, z d'une section, nous trouvons un anneau centré au point $(c, 0)$ dont le petit rayon est $|f(x) - c|$ et le grand rayon par $|g(x) - c|$ (figure 7.15).

Puisque l'aire d'un disque de rayon r est donnée par πr^2 , l'aire $A(x)$ de notre anneau est l'aire du disque de rayon $|g(x) - c|$ moins l'aire du disque de rayon $|f(x) - c|$. Ainsi,

$$A(x) = \pi (g(x) - c)^2 - \pi (f(x) - c)^2 .$$

Nous obtenons donc la formule suivante pour calculer le volume du solide S .

Méthode 7.3.4 (des anneaux)

Soit R une région bornée par les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$. Soit S le solide généré par la rotation de la région R autour de l'axe $y = c$ qui ne coupe pas la région R . Le volume V du solide S est

$$V = \pi \int_a^b |(g(x) - c)^2 - (f(x) - c)^2| dx . \quad (7.3.2)$$

Exemple 7.3.5

Quelle est le volume V du solide S obtenu par la rotation autour de l'axe $y = -1$ de la région bornée par les courbes $y = x^2 + 1$ et $y = 3 - x^2$?

Nous retrouvons à la figure 7.16 le graphe des deux courbes $y = x^2 + 1$ et $y = 3 - x^2$, et la région R qui est bornée par ces deux courbes. Pour déterminer les points d'intersections de ces deux courbes, il faut résoudre l'équation $3 - x^2 = 1 + x^2$ pour trouver les valeurs de

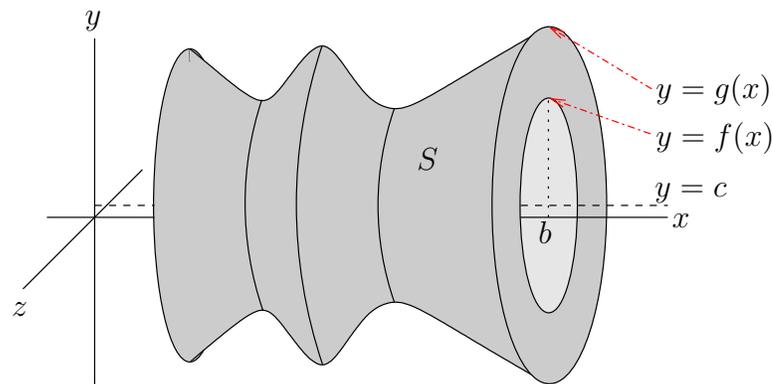


FIGURE 7.14 – Le solide S qui résulte de la rotation de la région R représenté à la figure 7.13 autour de l'axe $y = c$ (et $z = 0$)

x où la valeur de y est la même sur les deux courbes. Ces valeurs de x sont les solutions de l'équation quadratique $2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 0$. Donc $x = \pm 1$. Nous obtenons le point d'intersection $(-1, 2)$ pour $x = -1$ et le point d'intersection $(1, 2)$ pour $x = 1$.

Calculons le volume V du solide S à l'aide de la formule (7.3.2). Nous avons

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left((3 - x^2) - (-1) \right)^2 - \left((x^2 + 1) - (-1) \right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (4 - x^2)^2 - (x^2 + 2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (-12x^2 + 12) dx \\ &= \pi \left(-4x^3 + 12x \right) \Big|_{x=-1}^1 = 16\pi . \end{aligned}$$



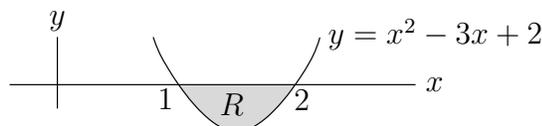
Exemple 7.3.6

Trouvons le volume V de chacun des solides S suivant.

Il est toujours préférable de dessiner la région qui fera une révolution autour de l'axe donné.

a) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des x de la région bornée par la courbe $y = x^2 - 3x + 2$ et l'axe des x .

Les valeurs de x aux points d'intersection de la parabole $y = x^2 - 3x + 2$ avec l'axe des x sont en fait les racines du polynôme $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$. Les racines sont 1 et 2. Le dessin suivant représente la région R bornée par la parabole $y = x^2 - 3x + 2$ et l'axe des x .



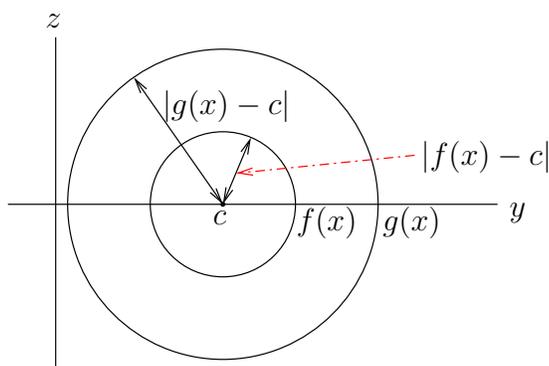


FIGURE 7.15 – Une section du solide S représenté à la figure 7.14 obtenue par l'intersection du solide S avec un plan où x est constant. Les sections sont donc perpendiculaires à l'axe des x .

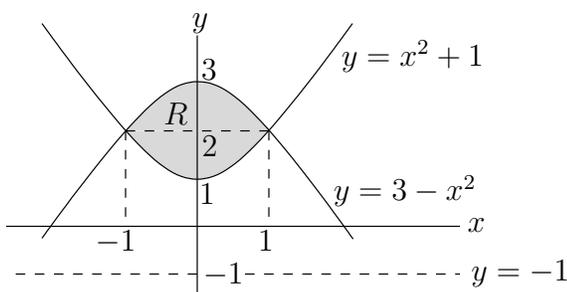


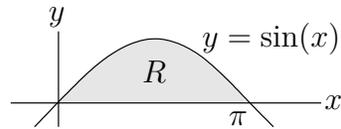
FIGURE 7.16 – La rotation autour de l'axe $x = -1$ de la région bornée par les deux courbes $y = x^2 + 1$ et $y = 3 - x^2$ va produire un solide S dans l'espace qui ressemblera à un bagel.

Calculons le volume V du solide de révolution S à l'aide de la formule (7.3.2). Nous avons

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x \right) \Big|_{x=1}^2 = \frac{\pi}{30}. \end{aligned}$$

b) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des x de la région bornée par la courbe $y = \sin(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$ et l'axe des x .

Le dessin suivant représente la région R bornée par la courbe $y = \sin(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$ et l'axe des x .

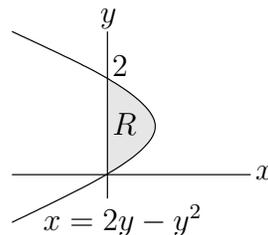


Le volume V du solide de révolution est donc

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} .$$

c) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des y de la région bornée par la courbe $x = 2y - y^2$ et l'axe des y .

Le dessin suivant représente la région R bornée par la parabole $x = y^2 - 2y$ et l'axe des y .

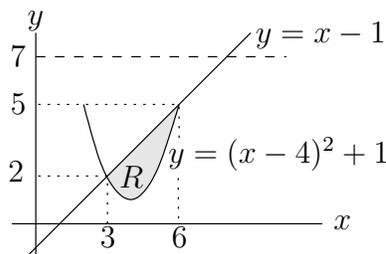


Nous pouvons évidemment écrire une formule identique à (7.3.2) où x est remplacé par y . Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$V = \pi \int_0^2 (2y - y^2)^2 \, dy = \pi \int_0^2 (y^4 - 4y^3 + 4y^2) \, dy = \pi \left(\frac{y^5}{5} - y^4 + \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15} .$$

d) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $y = 7$ de la région bornée par la parabole $y = (x - 4)^2 + 1$ et la droite $y = x - 1$.

Pour obtenir les valeurs de x aux points d'intersection de la parabole $y = (x - 4)^2 + 1$ et de la droite $y = x - 1$, il faut résoudre l'équation $x - 1 = (x - 4)^2 + 1$; c'est-à-dire, l'équation $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6) = 0$. Donc $x = 3$ ou $x = 6$. Nous obtenons les deux points d'intersection $(3, 2)$ et $(6, 5)$. Le dessin suivant représente la région R bornée par la parabole $y = (x - 4)^2 + 1$ et la droite $y = x - 1$.

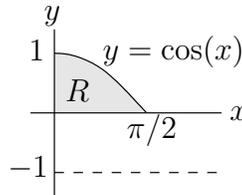


Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_3^6 \left(((x-4)^2 + 1 - 7)^2 - (x-1-7)^2 \right) dx \\ &= \pi \int_3^6 (x^4 - 16x^3 + 83x^2 - 144x + 36) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 4x^4 + \frac{83x^3}{3} - 72x^2 + 36x \right) \Big|_3^6 = 39.6\pi . \end{aligned}$$

e) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $y = -1$ de la région bornée par la courbe $y = \cos(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi/2$, et les droites $x = 0$ et $y = 0$.

Le dessin suivant représente la région R bornée par la courbe $y = \cos(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi/2$, l'axe des x et l'axe des y .



Ainsi, le volume V du solide de révolution est

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi/2} \left((\cos(x) + 1)^2 - (0 + 1)^2 \right) dx = \pi \int_0^{\pi/2} (\cos^2(x) + 2 \cos(x)) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) + 2 \cos(x) \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) + 4 \sin(x) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 4 \right) . \end{aligned}$$



Quelle sera le volume V du solide S représenté à la figure 7.17, obtenu par la rotation de la région R représentée à la figure 7.13 autour d'un axe $x = c$ qui ne coupe pas R ? Il est généralement inconcevable d'utiliser les sections provenant de l'intersection du solide S avec les plans perpendiculaires à l'axe des y (i.e. les plans où y est constant) car il est fort possible que ces sections soient formées de plusieurs anneaux.

Il faut donc retourner à la définition de l'intégrale pour développer une formule qui nous permettra de calculer le volume du solide S dans le cas présent.

Pour estimer le volume V du solide S , nous partageons le solide S en mince tubes dont l'axe est l'axe $x = c$ autour de laquelle la région R fait une rotation. Nous estimons le volume de chacun des tubes. La somme de ces approximations nous donne une approximation du volume de S .

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta x = (b - a)/k$ et $x_i = a + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

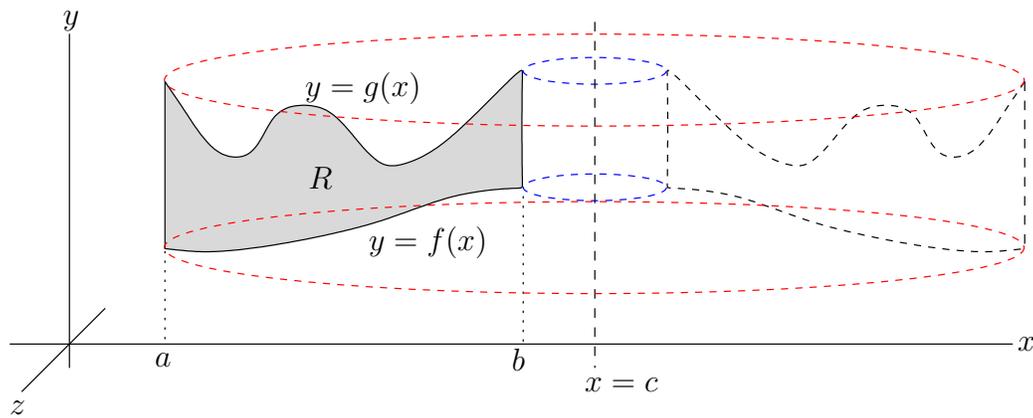


FIGURE 7.17 – La rotation de la région R autour de l'axe $x = c$ (et $z = 0$) donne un solide S .

Soit R_i , la région donnée par l'intersection de la région R avec l'ensemble $\{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$. Le i^e tube qui compose le solide S (figure 7.18) est obtenue par la rotation de la région R_i autour de l'axe $x = c$.

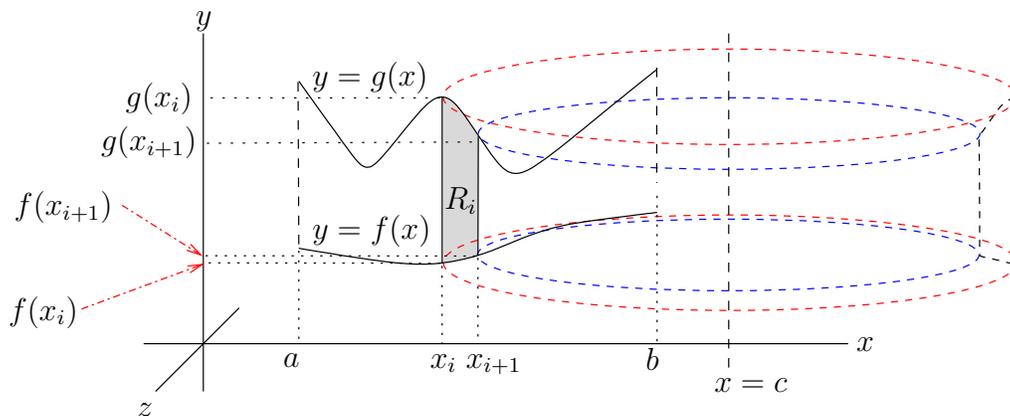


FIGURE 7.18 – la région R_i donnée par l'intersection de la région R avec l'ensemble $\{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$.

Pour estimer le volume du i^e tube, nous aurons besoin de la formule pour calculer l'aire d'un tube T comme celui représenté à la figure 7.19. Le volume V_T de ce tube est obtenu en soustrayant le volume du cylindre de rayon r_1 du volume du cylindre de rayon r_2 . Ainsi,

$$V_T = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) (r_2 - r_1). \quad (7.3.3)$$

Pour estimer le volume V_i du i^e tube, nous appliquons la formule (7.3.3) au tube S_i qui

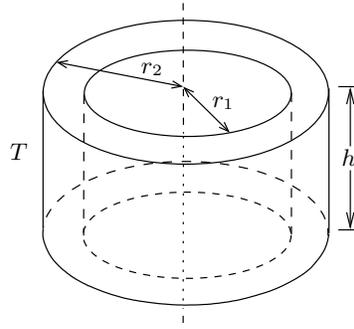


FIGURE 7.19 – Le volume de ce tube est obtenu en soustrayant le volume du cylindre de rayon r_1 du volume du cylindre de rayon r_2 .

est représenté à la figure 7.20. La valeur du rayon r_1 et celle du rayon r_2 dans la formule (7.3.3) sont $r_1 = c - x_{i+1}$ et $r_2 = c - x_i$. Nous avons alors que

$$r_2 - r_1 = x_{i+1} - x_i = \Delta x$$

et

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(c - x_{i+1}) + (c - x_i)}{2} = c - \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

où $(x_{i+1} + x_i)/2$ est le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Si nous posons

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \quad \text{et} \quad h = |f(x_i^*) - g(x_i^*)|,$$

alors le volume de S_i est

$$2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} (r_2 - r_1)h = 2\pi (c - x_i^*)|f(x_i^*) - g(x_i^*)|\Delta x$$

Pour Δx petit (i.e. pour des grandes valeurs de k), le volume V_i du i^e tube produit par la rotation de la région R_i autour de l'axe $x = c$ est approximativement le volume de S_i . Ainsi,

$$V_i \approx 2\pi (c - x_i^*)|f(x_i^*) - g(x_i^*)|\Delta x$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ et Δx petit.

La somme du volume de chaque tube S_i donne un estimé du volume V de S .

$$V = \sum_{i=0}^{k-1} V_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} 2\pi (c - x_i^*)|f(x_i^*) - g(x_i^*)|\Delta x.$$

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près du volume V du solide S . À la limite, nous obtenons le volume V de S .

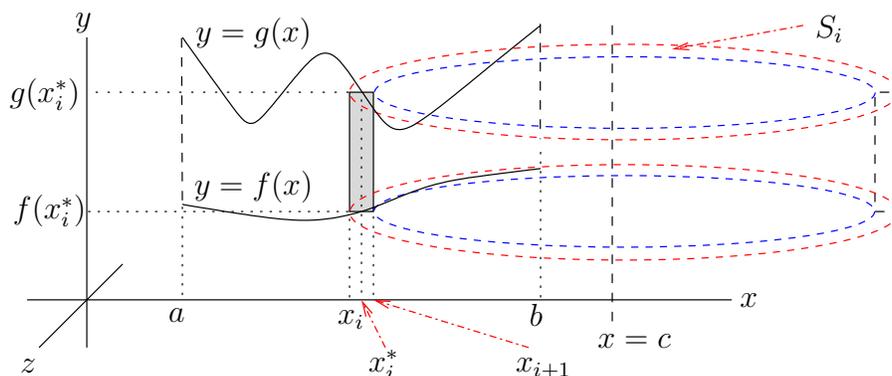


FIGURE 7.20 – Un tube S_i d'épaisseur Δx et de hauteur $|f(x_i^*) - g(x_i^*)|$.

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$2\pi \int_a^b (c - x)|f(x) - g(x)| dx . \quad (7.3.4)$$

Un raisonnement identique à celui qui a été utilisé pour développer (7.3.4) donne

$$2\pi \int_a^b (x - c)|f(x) - g(x)| dx$$

lorsque l'axe de rotation $x = c$ est à la gauche de la région R .

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons le résultat suivant.

Méthode 7.3.7 (des cylindres)

Soit R une région bornée par les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, et les droites $x = a$ et $x = b$. Soit S le solide généré par la rotation de la région R autour de l'axe $x = c$ qui ne coupe pas la région R . Le volume V du solide S est

$$V = 2\pi \int_a^b |c - x||f(x) - g(x)| dx . \quad (7.3.5)$$

Exemple 7.3.8

Quelle est le volume V du solide S obtenu de la rotation autour de l'axe $x = 2$ de la région R donnée à l'exemple 7.3.5 et illustrée à la figure 7.16.

Utilisons la formule (7.3.5) pour calculer le volume V de S . Nous avons

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^1 (2 - x) \left((3 - x^2) - (x^2 + 1) \right) dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (2 - x)(2 - 2x^2) dx = 2\pi \int_{-1}^1 (2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) dx \end{aligned}$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - x^2 + 4x \right) \Big|_{x=-1}^1 = \frac{32\pi}{3}.$$



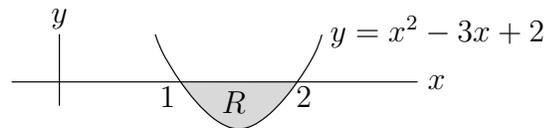
Exemple 7.3.9

Trouvons le volume V de chacun des solides S suivant.

Au risque de ce répéter, il est préférable de dessiner la région qui fera une révolution autour de l'axe donné.

a) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe des y de la région bornée par la courbe $y = x^2 - 3x + 2$ et l'axe des x .

Nous avons vu à l'exemple 7.3.6 que la région R bornée par la parabole $y = x^2 - 3x + 2$ et l'axe des x est la région représentée dans le dessin ci-dessous.

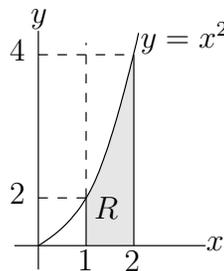


Nous pouvons calculer le volume V du solide S à l'aide de la formule (7.3.5). Nous avons

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x (0 - (x^2 - 3x + 2)) dx = 2\pi \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \\ &= 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right) \Big|_{x=1}^2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

b) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $x = 1$ de la région bornée par la courbe $y = x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

Le dessin suivant représente la région R qui est bornée par la parabole $y = x^2$, les droites $x = 1$ et $x = 2$, et l'axe des x .

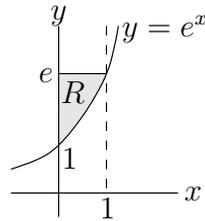


Ainsi,

$$V = 2\pi \int_1^2 (x-1)(x^2-0) dx = 2\pi \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{17\pi}{6}.$$

c) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $x = 1$ de la région bornée par la courbe $y = e^x$ et les droites $y = e$ et $x = 0$.

Le dessin suivant représente la région R qui est bornée par la courbe $y = e^x$, la droite $y = e$ et l'axe des y .

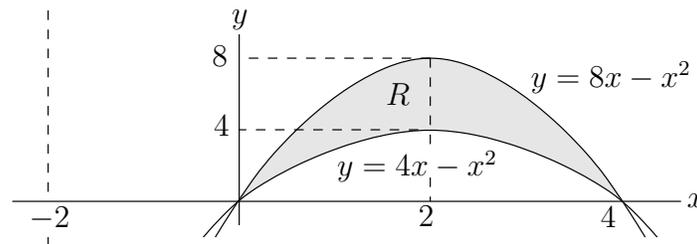


La formule (7.3.5) pour le volume d'un solide de révolution donne

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (1-x)(e - e^x) dx = 2\pi \int_0^1 (e - ex - e^x + xe^x) dx \\ &= 2\pi \left(ex - \frac{e}{2}x^2 - e^x + xe^x - e^x \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(2 - \frac{e}{2} \right). \end{aligned}$$

d) S est le solide obtenu de la rotation autour de l'axe $x = -2$ de la région bornée par les paraboles $y = 4x - x^2$ et $y = 8x - 2x^2$, et illustre la région R qui est bornée par ces deux paraboles.

Le dessin suivant contient les graphes des paraboles $y = 4x - x^2$ et $y = 8x - 2x^2$, et illustre la région R qui est bornée par ces deux paraboles.



Pour déterminer les valeurs de x aux points d'intersections de ces deux paraboles, il faut résoudre l'équation $4x - x^2 = 8x - 2x^2$. Ces valeurs de x sont les solutions de l'équation quadratique $x^2 - 4x = x(x - 4) = 0$; c'est-à-dire, $x = 0$ ou $x = 4$. Nous avons le point d'intersection $(0, 0)$ pour $x = 0$ et le point d'intersection $(4, 0)$ pour $x = 4$. Les deux graphes se coupent sur l'axe des x .

Nous pouvons calculer le volume V du solide S à l'aide de la formule (7.3.5). Nous avons

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 (x+2) \left((8x - 2x^2) - (4x - x^2) \right) dx = 2\pi \int_0^4 (x+2) (4x - x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^4 (-x^3 + 2x^2 + 8x) dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right) \Big|_{x=0}^4 = \frac{4^4\pi}{3}. \end{aligned}$$



7.4 Masse d'un objet

Comme à la section précédente pour le calcul du volume d'un solide, nous pouvons utiliser l'intégration pour calculer la masse M d'un solide S comme celui représenté à la figure 7.8.

Nous supposons que la densité du solide varie de façon continue en fonction de x seulement. C'est très proche de la réalité lorsque le solide S est un tube de petit diamètre. Soit $\rho(s)$ la densité du solide pour la section où $x = s$.

Pour estimer la masse M du solide S , nous partageons le solide S en fines tranches parallèles au plan y, z et nous estimons la masse de chacune de ces tranches. La somme de ces approximations nous donne une approximation de la masse de S .

Nous utilisons les tranches (figure 7.8), les cylindres (figure 7.9) et les sections (figure 7.10) qui ont été définies à la section précédente. Nous pouvons assumer que la densité de la i^e tranche est approximativement constant à $\rho(x_i^*)$; c'est-à-dire que $\rho(x) = \rho(x_i^*)$ pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Si Δx est très petit, il est raisonnable de supposer que la densité $\rho(x)$ ne changera presque pas pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

Comme la masse d'un objet de densité constante est le produit de sa densité par son volume, la masse M_i de la i^e tranche est approximativement la masse du solide S_i pour lequel nous assumons que la densité est $\rho(x_i^*)$; c'est-à-dire,

$$M_i \approx \rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$$

où $A(s)$ est l'aire de la section engendrée par l'intersection du plan $x = s$ avec le solide S . La somme de la masse de chaque solide S_i donne une estimation de la masse M de S .

$$M = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} \rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x .$$

Plus k sera grand (et donc Δx petit), plus la somme ci-dessus sera près de la masse M du solide S . À la limite, nous obtenons la masse M de S .

Mais, ces sommes représentent aussi des sommes de Riemann pour l'intégrale

$$\int_a^b \rho(x)A(x) dx .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons le résultat suivant.

Méthode 7.4.1

Soit S est solide dont la densité varie seulement dans une direction. Nous pouvons supposer que cet direction est donnée par l'axe des x et que $\rho(x)$ est la « densité » de la section $x = s$ engendrée par l'intersection du plan $x = s$ avec le solide S . Si $A(s)$ est l'aire de cette section, alors le masse du solide S est

$$M = \int_a^b \rho(x)A(x) dx . \quad (7.4.1)$$

7.5 Travail

La force exercée sur un objet qui se déplace en ligne droite est donnée par le produit de sa masse par son accélération. Ainsi, si m est la masse en kilogrammes de l'objet et $x(t)$ est sa position en mètres au temps t en secondes, l'accélération de l'objet en m/s^2 est

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$$

et la force en Newtons exercée sur l'objet au temps t est

$$F(t) = m a(t) = m \frac{d^2x}{dt^2}(t).$$

L'abréviation pour un Newton est la lettre N. Ainsi, $\text{N} = \text{kg m/s}^2$.

Le travail en joules fait pour déplacer un objet en ligne droite sur une distance d , lorsque la force F exercée est constante durant tout le déplacement, est donnée par

$$W = F d. \tag{7.5.1}$$

L'abréviation pour un joule est la lettre J. Ainsi, $\text{J} = \text{N m}$.

Avec ces deux résultats de physique, nous sommes en mesure de répondre aux questions suivantes.

7.5.1 Travail pour déplacer un objet

Un objet se déplace en ligne droite sous l'effet d'une force qui varie avec la distance parcourue. Si cette force est de $F(x)$ N lorsque l'objet est à x m de son point de départ, qu'elle est le travail nécessaire pour déplacer l'objet sur une distance de L m à partir de l'origine, son point de départ ?

Si la force était constante, la formule (7.5.1) résoudrait le problème. Malheureusement, ce n'est pas le cas présentement.

Divisons l'intervalle $[0, L]$ en k sous-intervalles de longueur $\Delta x = L/k$. Chaque intervalle est donc de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = i \Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Si le sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est très court, nous pouvons supposer que la force F est presque constante sur cet intervalle et est égale à $F(x_i^*)$ où $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$. Le travail pour déplacer l'objet de x_i à x_{i+1} est donc $F(x_i^*) \Delta x$ grâce à la formule (7.5.1).

Ainsi, le travail W pour déplacer l'objet de L m à partir de l'origine est donc approximativement

$$W \approx \sum_{i=0}^{k-1} F(x_i^*) \Delta x ;$$

la somme du travail fait pour déplacer l'objet sur chacun des sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. Cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^L F(x) dx .$$

Donc, si k tend vers l'infini, nous trouvons que le travail pour déplacer l'objet de L m à partir de l'origine est donnée par

$$W = \int_0^L F(x) dx .$$

Méthode 7.5.1

Le travail nécessaire pour déplacer un objet d'un point $x = a$ à un point $x = b$ (en ligne droite) est

$$W = \int_a^b F(x) dx ,$$

où $F(x)$ est la force exercée sur l'objet lorsqu'il occupe la position x .

Exemple 7.5.2

Un objet se déplace en ligne droite sous l'effet d'une force. Si cette force est de $F(x) = 5x^2 + 3x + 1$ N lorsque l'objet est à x mètres de son point de départ, qu'elle est le travail nécessaire pour déplacer l'objet sur une distance de 6 mètres à partir de l'origine ?

Le travail est donnée par

$$W = \int_0^6 (5x^2 + 3x + 1) dx = \left(\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \right) \Big|_{x=0}^6 = 420 \text{ J} .$$

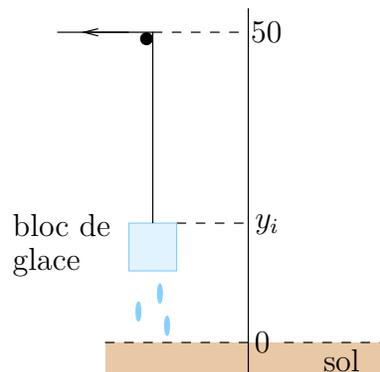


FIGURE 7.21 – Travail pour lever le bloc de glace jusqu'à une hauteur de 50 mètres. Le bloc de glace est levé à la vitesse de 1.5 m/min et il fond à une vitesse de 4 kg/min. Il faut aussi tenir compte dans ce problème de la masse de la corde qui est de 0.5 kg/m.

Exemple 7.5.3

Nous voulons lever un bloc de glace de 100 kg à partir du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres. Le bloc de glace fond à une vitesse de 4 kg/min et la vitesse à laquelle nous levons le

bloc est de 1.5 m/min. Si la masse de la corde est de 0.5 kg/m, quel est le travail nécessaire pour lever le bloc à la hauteur désirée? Le montage est illustré à la figure 7.21.

Commençons par éliminer le temps dans l'énoncé du problème. Le bloc de glace font à une vitesse de 4 kg/min et en une minute le bloc monte de 1.5 mètres. La masse du bloc diminue donc de 4 kg par 1.5 mètres; c'est-à-dire de $8/3$ kg/m.

Divisons l'intervalle $[0, 50]$ en k sous-intervalles de longueur $\Delta y = 50/k$. Chaque intervalle est donc de la forme $[y_i, y_{i+1}]$ où $y_i = i\Delta y$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous choisissons $y_i^* \in [y_i, y_{i+1}]$ pour tout i .

Si le sous-intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ est très court, nous pouvons assumer que le bloc de glace n'a pas le temps de fondre entre y_i et y_{i+1} mètres et donc que sa masse est constante et égale à $(100 - (8/3)y_i^*)$ kg car le bloc font à $8/3$ kg/m. Le travail pour lever le bloc de y_i à y_{i+1} mètres, une distance de Δy , est approximativement

$$9.8 \left(100 - \frac{8}{3}y_i^* \right) \Delta y .$$

De même, si le sous-intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ est très court, nous pouvons assumer que la corde que nous devons lever entre y_i et y_{i+1} est de longueur constante égale à $(50 - y_i^*)$ mètres. La masse de cette portion de la corde est de $0.5(50 - y_i^*)$ kg. Le travail pour lever cette portion de la corde de y_i à y_{i+1} mètres, une distance de Δy , est approximativement

$$9.8(0.5(50 - y_i^*))\Delta y .$$

Le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde de y_i à y_{i+1} mètres est donc approximativement

$$9.8 \left(100 - \frac{8}{3}y_i^* \right) \Delta y + 9.8(0.5(50 - y_i^*))\Delta y = 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y_i^* \right) \Delta y .$$

Ainsi, le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres est approximativement

$$W \approx \sum_{i=0}^{k-1} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y_i^* \right) \Delta y .$$

Cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^{50} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y \right) dy .$$

Donc, si k tend vers l'infini, nous trouvons que le travail pour lever l'ensemble formé du bloc de glace et de la corde du sol jusqu'à une hauteur de 50 mètres est donnée par

$$W = \int_0^{50} 9.8 \left(125 - \frac{19}{6}y \right) dy .$$

Ce qui donne

$$W = 9.8 \left(125y - \frac{19}{12}y^2 \right) \Big|_{y=0}^{50} = 22,458.\bar{3} \text{ J} .$$



Une autre situation où nous pouvons avoir à calculer le travail pour déplacer un objet est lorsque cet objet est attaché à un ressort.

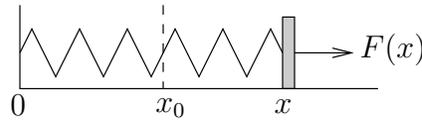


FIGURE 7.22 – Lois de Hooke pour les ressorts

Nous considérons un mécanisme comme celui représenté à la figure 7.22 où nous ignorons toute friction et où la gravité peut être négligée. La **lois de Hooke** pour les ressorts dit que la force $F(x)$ nécessaire pour maintenir un ressort à une longueur de x m est $F(x) = k(x - x_0)$, où x_0 est la longueur du ressort au repos et k est une constante positive. Si $x > x_0$, la force est dans la direction positive alors que, si $x < x_0$, la force est dans la direction négative.

Exemple 7.5.4

Une force de 20 N est nécessaire pour maintenir un ressort à une longueur de 10 m. Si la longueur au repos du ressort est 5 m, calculons le travail nécessaire pour étirer le ressort de 15 à 20 m.

Si $F(x) = k(x - 5)$ est la force nécessaire pour maintenir un ressort à une longueur de x m, nous obtenons de $F(10) = 20 = 5k$. Donc $k = 4$. Le travail nécessaire pour étirer le ressort de 15 à 20 m est

$$W = \int_{15}^{20} 4(x - 5) \, dx = 2(x - 5)^2 \Big|_{15}^{20} = 2(15^2 - 10^2) = 250 \text{ J} .$$

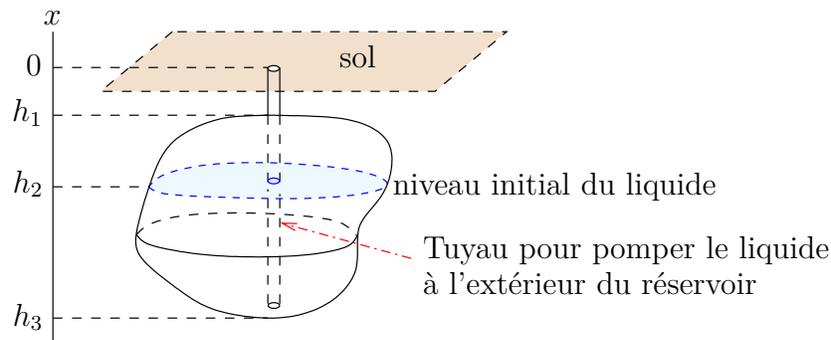
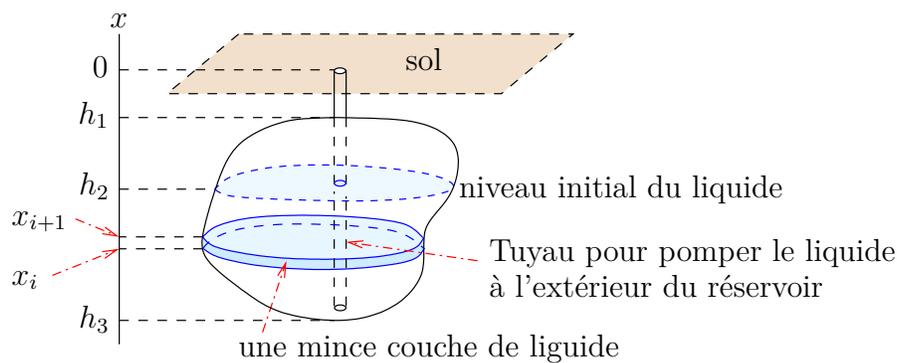


7.5.2 Travail pour vider un réservoir

Un réservoir rempli d'un liquide non visqueux est enfoui h_1 m sous le sol. Ce réservoir est illustré à la figure 7.23. Quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir de son contenu si le niveau initial du liquide est à h_2 m sous le sol? Pour les besoins de la discussion, la distance positive est vers le haut et 0 est le niveau du sol. Tout autre choix serait acceptable et conduirait à des formules équivalents.

Pour obtenir une formule qui nous permettra de trouver le travail fait pour vider le réservoir, nous divisons l'intervalle $h_3 \leq x \leq h_2$ en k sous-intervalles de longueur $\Delta x = (h_2 - h_3)/k > 0$. Chaque sous-intervalle est de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = h_3 + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

Utilisons (7.5.1) pour estimer le travail fait pour retirer du réservoir la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} (figure 7.24).

FIGURE 7.23 – Un réservoir de forme quelconque est enfoui à h_1 mètres sous le sol.FIGURE 7.24 – Une mince couche de liquide pour x entre x_i et x_{i+1}

Soit x_i^* un point de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Si Δx est très petit, nous pouvons estimer le volume de la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} (figure 7.24) par le volume du solide V_i qui est représenté à la figure 7.25. V_i est un solide borné par les plans $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$, et dont les sections horizontales sont tous identiques à la section produite par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le réservoir. Nous pouvons assumer que la paroi de V_i pour $x_{i+1} \leq x \leq x_i$ est verticale.

Le volume de la mince couche de liquide entre x_i et x_{i+1} est donc approximativement le volume du solide V_i ; c'est-à-dire,

$$A(x_i^*)\Delta x \quad (7.5.2)$$

où $A(x_i^*)$ est l'aire de la section produite par l'intersection du plan $x = x_i^*$ avec le réservoir.

En supposant que la densité $\rho(x)$ du liquide à x m sous le sol ne varie presque pas pour x entre x_i et x_{i+1} , nous pouvons assumer que la densité du liquide dans la mince couche est constante et égale à $\rho(x_i^*)$. Ainsi, la masse de la mince couche entre x_i et x_{i+1} est approximativement $\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$.

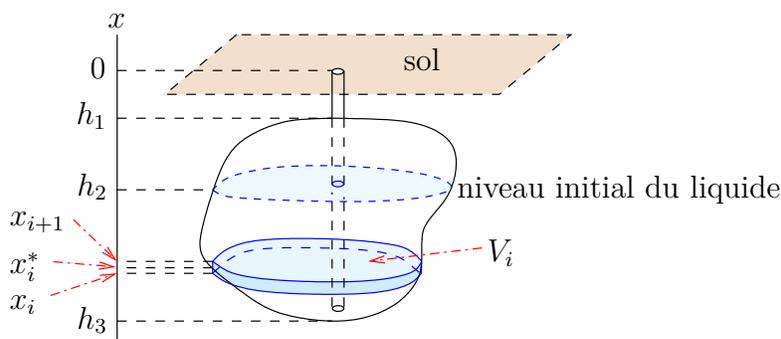


FIGURE 7.25 – Le volume de la mince couche de liquide représenté à la figure 7.24 peut être estimé par le volume du solide V_i bornée par les plans $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$, et ayant une paroi verticale.

La force exercée sur la mince couche de liquide est approximativement

$$9.8\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x$$

où 9.8 m/s^2 est l'accélération terrestre.

Grâce au résultat (7.5.1), le travail fait pour déplacer la mince couche de liquide jusqu'au niveau du sol (donc pour retirer cette couche de liquide du réservoir) est approximativement

$$9.8 \underbrace{(0 - x_i^*)}_{\text{profondeur}} \rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x = -9.8x_i^*\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x .$$

Il ne faut pas oublier que $x_i^* < 0$ pour tout i par construction.

Si nous faisons cela pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, nous trouvons que le travail W fait pour vider le réservoir est approximativement

$$W \approx -9.8 \sum_{i=0}^{k-1} x_i^*\rho(x_i^*)A(x_i^*)\Delta x .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$-9.8 \int_{h_3}^{h_2} x\rho(x)A(x) dx .$$

Donc, si k tend vers plus l'infini, nous trouvons que le travail fait pour vider le réservoir est

$$W = -9.8 \int_{h_3}^{h_2} x\rho(x)A(x) dx . \quad (7.5.3)$$

Remarque 7.5.5

Lors de la discussion précédente, nous avons assumé que la densité du liquide variait seulement en fonction de la profondeur. Cette hypothèse est réaliste. Le lecteur a certainement

déjà remarqué la séparation qui se produit dans les vinaigrettes à salade où l'eau, le vinaigre et l'huile se partagent en couches bien distinctes.

De plus, nous supposons qu'il y a une prise d'air, qui n'est pas incluse dans le dessin du réservoir à la figure 7.23, pour permettre à l'air d'occuper l'espace libérée par le liquide qui s'échappe du réservoir par le tuyau. Autrement, le réservoir se déformerait suite au retrait du liquide.

Finalement, le liquide est aspiré près du fond du réservoir. Nous pourrions croire que le calcul du travail fait pour retirer la mince couche de liquide à la profondeur x_i^* devrait être fait sur une distance plus grande que x_i^* . Ce n'est pas le cas. La pression dû à l'attraction terrestre maintient au même niveau le liquide dans le réservoir et dans le tuyau. Le niveau du liquide dans le tuyau est la profondeur de la mince couche de liquide qui est retirée du réservoir à ce moment. Aucun travail n'est fait par la pompe pour amener le liquide dans le tuyau au niveau du liquide dans le réservoir. ♠

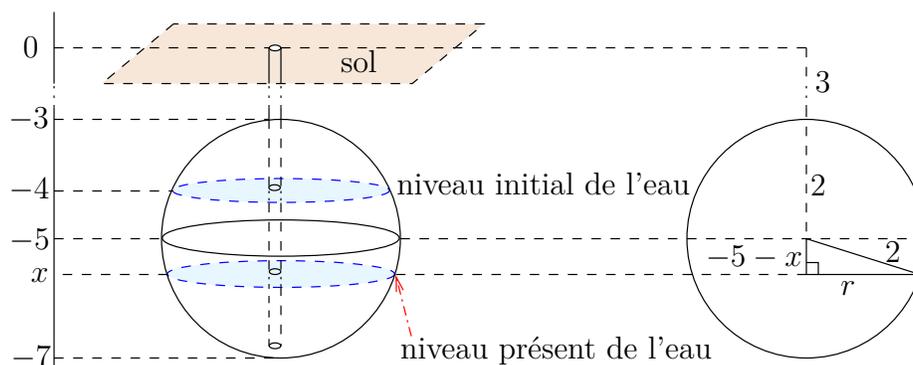


FIGURE 7.26 – Un réservoir sphérique de 2 mètres de rayon enfoui à 3 mètres sous le sol.

Exemple 7.5.6

Un réservoir d'eau de forme sphérique est enfoui à 3 m sous le sol. Le rayon du réservoir est de 2 m (figure 7.26). Quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir de son contenu si le niveau initial de l'eau est au trois quarts du réservoir? La densité de l'eau est constante et égale à 1000 kg/m^3 .

Dans la formule (7.5.3), nous avons que $h_3 = -7$, $h_2 = -4$ et $\rho(x) \equiv 1000$. Il ne manque que $A(x)$ qui, dans le cas présent, représente l'aire d'une section où x est constant. Comme nous pouvons le déduire à partir du dessin à droite dans la figure 7.26, cette section est un cercle de rayon $r(x) = \sqrt{2^2 - (-5 - x)^2}$. Ainsi,

$$A(x) = \pi r^2(x) = \pi(2^2 - (-5 - x)^2) = \pi(-21 - 10x - x^2).$$

Le travail fait pour vider le réservoir est

$$W = -9,800\pi \int_{-7}^{-4} x(-21 - 10x - x^2) dx = -9,800\pi \left(-\frac{21}{2}x^2 - \frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Bigg|_{x=-7}^{-4}$$

$$= \pi(4.6305 \times 10^5) \text{ J}.$$



Exemple 7.5.7

Un réservoir en forme de cône inversé est enfoui à 2 m sous le sol. La base du cône a un rayon de 3 m et le cône a une hauteur de 5 m (figure 7.27). Si le cône est rempli d'eau dont la densité est de 1000 kg/m^3 , quel est le travail nécessaire pour vider ce réservoir ?

Dans la formule (7.5.3), nous avons que $h_2 = -2$, $h_3 = -7$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x . L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s^2 . Les sections horizontales sont des cercles de rayon $r = \frac{3}{5}(7+x)$. Donc $A(x) = \frac{9\pi}{25}(7+x)^2$.

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$\begin{aligned} W &= - \int_{-7}^{-2} 9,800 \left(\frac{9\pi}{25} \right) x(7+x)^2 dx = -9,800 \left(\frac{9\pi}{25} \right) \int_{-7}^{-2} (x^3 + 14x^2 + 49x) dx \\ &= -9,800 \left(\frac{9\pi}{25} \right) \left(\frac{x^4}{4} + \frac{14x^3}{3} + \frac{49x^2}{2} \right) \Big|_{-7}^{-2} = \pi(4.7775 \times 10^5) \text{ J}. \end{aligned}$$

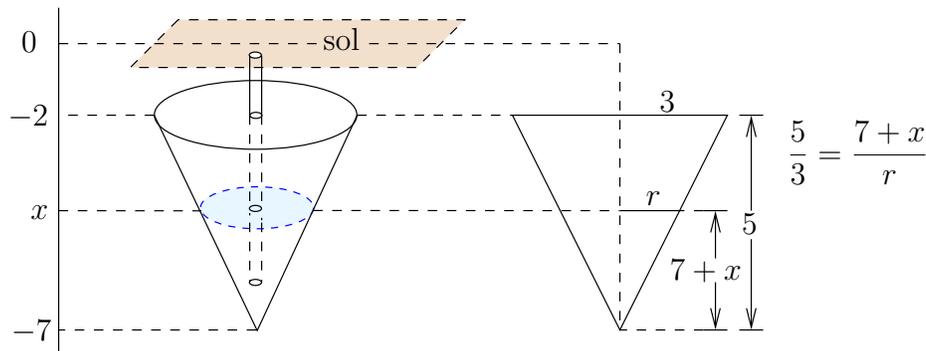


FIGURE 7.27 – Un réservoir conique dont la base à 3 mètres de rayon et la hauteur est de 5 mètres est enfoui à 2 mètres sous le sol.

Exemple 7.5.8

Un réservoir dont les sections verticales dans une direction sont des triangles renversés est enfoui à 2 m sous le sol (figure 7.28). Si le niveau d'eau initial dans le réservoir est au $2/3$ d'eau, quelle est le travail nécessaire pour vider ce réservoir ? La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

Dans la formule (7.5.3), nous avons $h_2 = -3$ car le réservoir est rempli au $2/3$, $h_3 = -5$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x . L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s^2 . Les sections horizontales sont des rectangles dont l'un des côtés est de 8 m de long et le deuxième est de $2r = 5+x$ m de long. Donc $A(x) = 8(5+x)$.

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$\begin{aligned} W &= - \int_{-5}^{-3} 9,800(8x(5+x)) dx = -9,800 \times 8 \int_{-5}^{-3} (x^2 + 5x) dx \\ &= -9,800 \times 8 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_{-5}^{-3} = 5.74933\bar{3} \times 10^5 \text{ J} . \end{aligned}$$

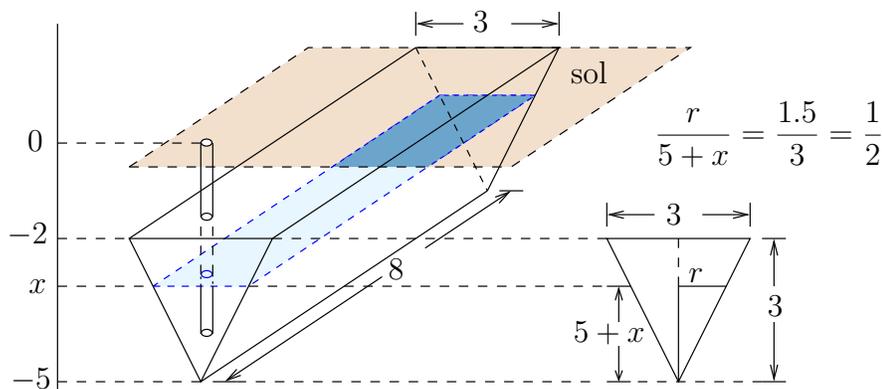


FIGURE 7.28 – Un réservoir dont les sections verticales dans une direction sont des triangles est enfoui à 2 m sous le sol. Les triangles ont une hauteur de 3 m et une base de 3 m.

Exemple 7.5.9

Un réservoir cylindrique est enfoui sur le côté à 5 mètres de profondeur (figure 7.29). Le cylindre a un rayon de 2 mètres et une longueur de 9 mètres. Si nous supposons que le cylindre est rempli d'eau, quel est le travail nécessaire pour vider le réservoir? La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

Dans la formule (7.5.3), nous avons que $h_2 = -5$, $h_3 = -9$ et $\rho(x) = 1000$ pour tout x . L'attraction terrestre est toujours 9.8 m/s^2 . Les sections horizontales sont des rectangles dont l'un des côtés est de 9 m de long et le deuxième est de $2r = 2\sqrt{2^2 - (x+7)^2}$ m de long. Donc $A(x) = 18\sqrt{2^2 - (x+7)^2}$.

Le travail nécessaire pour vider le réservoir est

$$W = - \int_{-9}^{-5} 9,800(18x\sqrt{2^2 - (x+7)^2}) dx = -9,800 \times 18 \int_{-2}^2 (u-7)\sqrt{2^2 - u^2} du$$

où nous avons utilisé la substitution $u = x + 7$ qui donne $u = -2$ lorsque $x = -9$, $u = 2$ lorsque $x = -7$ et $du = dx$. Or,

$$\int_{-2}^2 u\sqrt{2^2 - u^2} du = 0$$

car $u\sqrt{2^2 - u^2}$ est une fonction impaire que nous intégrons sur un intervalle symétrique à l'origine. Pour évaluer $-7 \int_{-2}^2 \sqrt{2^2 - u^2} du$, nous posons $u = 2 \sin(t)$ pour $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Donc $u = -2$ pour $t = -\pi/2$, $u = 2$ pour $t = \pi/2$ et $du = 2 \cos(t) dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned} -7 \int_{-2}^2 \sqrt{2^2 - u^2} du &= -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4 - 4 \sin^2(t)} 2 \cos(t) dt = -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^2(t) dt \\ &= -7 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(1 + \cos(2t)) dt = -14 \left(t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -14\pi . \end{aligned}$$

Donc

$$W = -9,800 \times 18 \times (-14\pi) = 2469600\pi \text{ j} .$$

♣

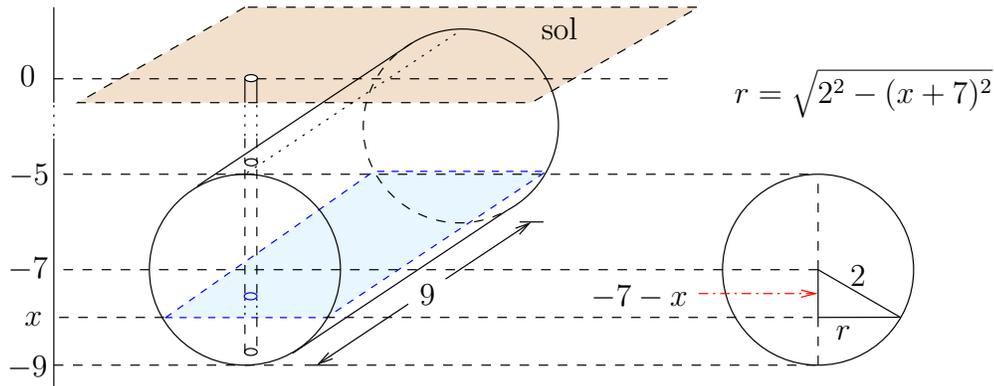


FIGURE 7.29 – Un réservoir cylindrique est enfoui sur le côté à 5 mètres de profondeur. Le cylindre a un rayon de 2 mètres et une longueur de 9 mètres.

7.6 Force et pression hydrostatique

Pour un liquide donné (e.g. l'eau dans l'océan), plus nous sommes profond plus la pression exercée par le liquide augmente. Si $\rho(x)$ est la densité d'un liquide en kg/m^3 à une profondeur de x mètres et 9.8 m/s^2 est l'attraction terrestre en m/s^2 , alors la pression $p(x)$ en N/m^2 à une profondeur de x mètres est donnée par la formule

$$p(x) = 9.8 x \rho(x) .$$

La force en Newtons exercée sur une surface de *très petite hauteur* à la profondeur de x mètres est approximativement

$$F(x) = p(x)A(x)$$

où $A(x)$ est l'aire en m^2 de la surface. Nous avons supposé dans le raisonnement précédent que la *hauteur* de la surface est très petite. Si la *hauteur* de la surface est grande comme celle représenté à la figure 7.30, il faut décomposer la surface en minces tranches horizontales de *très petite hauteur* et calculer la force sur chacune de ces tranches.

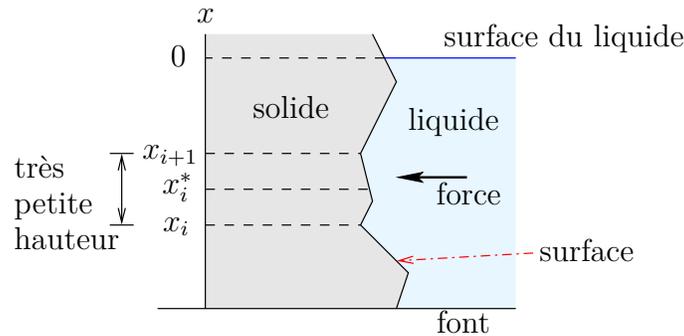


FIGURE 7.30 – Vue transversale d'une surface verticale soumise à la force exercée par la pression.

Supposons que l'origine soit à la surface du liquide et la direction positive soit vers le haut comme nous l'avons fait pour le calcul du travail à la section précédente. Nous désirons calculer la force exercée sur une surface entre h_3 et h_2 mètres de profondeur.

Partageons le segment $[h_3, h_2]$ en k sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $\Delta x = (h_2 - h_3)/k > 0$ où $x_i = h_3 + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

la pression à une profondeur de x_i^* mètres, où $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$, est

$$p(x_i^*) = 9.8 \underbrace{(0 - x_i^*)}_{\text{profondeur}} \rho(x_i^*) = -9.8 x_i^* \rho(x_i^*) .$$

Il ne faut pas oublier que $x_i^* < 0$ par construction. Nous obtenons que la force exercée sur la surface entre x_i et x_{i+1} mètres est approximativement

$$F(x_i^*) = p(x_i^*)A(x_i^*) = -9.8 x_i^* \rho(x_i^*)A(x_i^*) .$$

où $A(x_i^*)$ est approximativement l'aire de la surface entre x_i et x_{i+1} mètres. Puisque l'aire de la surface entre x_i et x_{i+1} mètres tend vers 0 lorsque la longueur $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ tend vers 0, nous pouvons exprimer $A(x_i^*)$ comme le produit $S(x_i^*)\Delta x$ où S est une fonction qu'il faut déterminer pour chaque type de surfaces. Dans les cas simple, $S(x_i^*)$ sera une longueur. Cependant, ce ne sera pas toujours le cas comme nous verrons dans les exemples qui suivent.

Si nous faisons la somme de la force exercée sur la surface entre x_i et x_{i+1} mètres pour $i = 0, 1, \dots, k-1$, nous trouvons que la force F exercée sur la surface entre h_3 et h_2 mètres de profondeur est approximativement

$$F \approx \sum_{j=0}^{k-1} -9.8 x_j^* \rho(x_j^*) S(x_j^*) \Delta x .$$

La somme dans l'expression précédente est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$- \int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \rho(x) S(x) dx .$$

Ainsi, si nous considérons la limite lorsque k tend vers plus l'infini, nous trouvons que la force F exercée sur la surface verticale entre h_3 et h_2 mètres de profondeur est

$$F = - \int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \rho(x) S(x) dx . \quad (7.6.1)$$

Exemple 7.6.1

Un réservoir de forme cylindrique repose sur le côté au fond d'un lac de 30 mètres de profondeur (figure 7.31). Le réservoir a 2 mètres de diamètre et 5 mètres de longueur. Calculons la force sur les deux extrémités du réservoir et sur le long du cylindre si le réservoir est vide. L'attraction terrestre est de 9.8 m/s^2 et la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

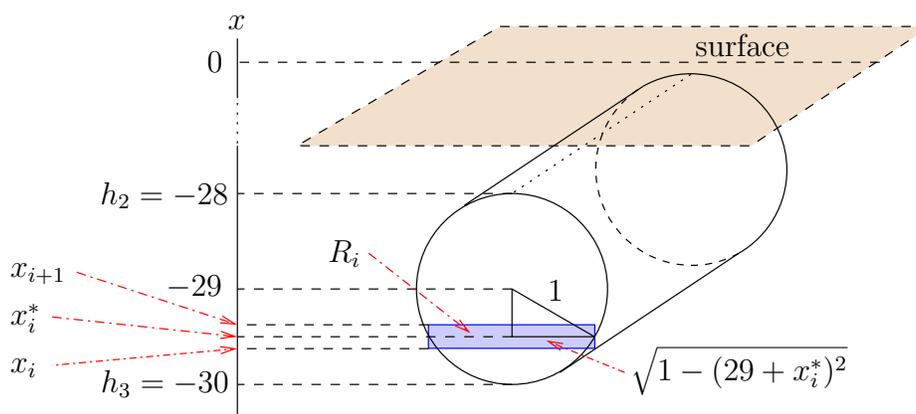


FIGURE 7.31 – La force exercée sur une des extrémités d'un réservoir circulaire qui repose au fond d'un lac de 30 mètres de profondeur.

i) Si nous utilisons l'information fournie dans le dessin à la figure 7.31, nous avons que l'aire $A(x_i^*)$ de la surface de l'extrémité du réservoir entre x_i et x_{i+1} mètres est approximativement l'aire du rectangle R_i de base $2\sqrt{1 - (x_i^* + 29)^2}$ et de hauteur Δx . Donc $A(x_i^*) \approx S(x_i^*)\Delta x$ où

$$S(x) = 2\sqrt{1 - (x + 29)^2} .$$

La formule (7.6.1) avec $h_3 = -30$ et $h_2 = -28$ nous donne la force F exercée sur une des extrémités du réservoir.

$$F = - \int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \rho(x) S(x) dx = -2 \times 9,800 \int_{-30}^{-28} x \sqrt{1 - (x + 29)^2} dx .$$

Si $y = x + 29$, alors $dy = dx$, $y = -1$ pour $x = -30$ et $y = 1$ pour $x = -28$. Donc

$$F = -19,600 \int_{-1}^1 (y - 29) \sqrt{1 - y^2} dy$$

$$= -19,600 \int_{-1}^1 y\sqrt{1-y^2} dy + 19,600 \times 29 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy .$$

Or $y\sqrt{1-y^2}$ est une fonction impaire que nous intégrons sur un intervalle symétrique à l'origine. Donc

$$\int_{-1}^1 y\sqrt{1-y^2} dy = 0 .$$

Pour calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy ,$$

il suffit de noter que c'est la formule pour calculer l'aire d'une demi-disque de rayon 1. Sa valeur est donc $\pi/2$. Nous pouvons aussi vérifier cela en utilisant la substitution trigonométrique $y = \sin(\theta)$ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Ainsi, $dy = \cos(\theta) d\theta$, $\sin(\pi/2) = 1$ et $\sin(-\pi/2) = -1$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \cos(\theta) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right) = \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

Nous trouvons que $F = 19,600 \times 29 \times \frac{\pi}{2} = 284,200\pi$ Newtons.

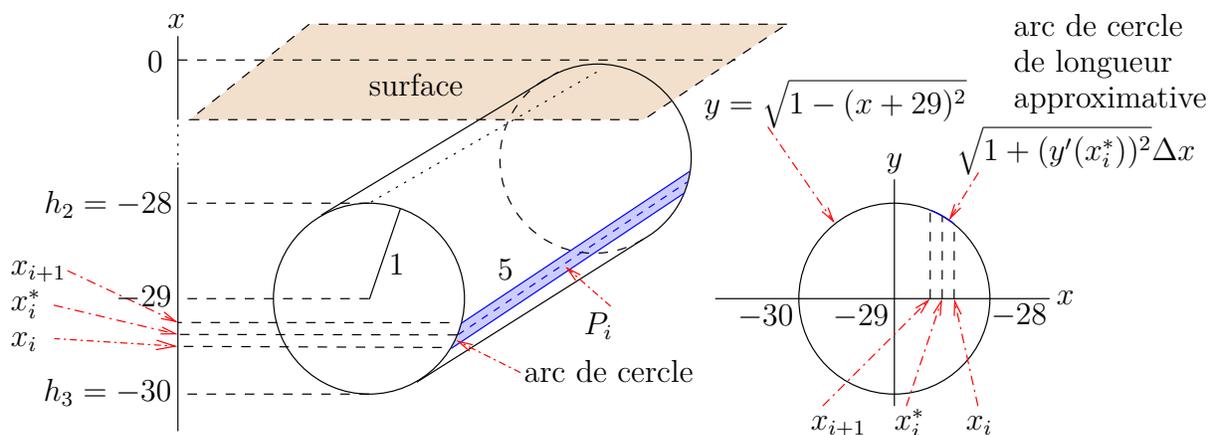


FIGURE 7.32 – La force exercée sur la surface courbée externe d'un réservoir circulaire qui repose au fond d'un lac de 30 mètres de profondeur.

ii) Pour calculer la force exercée sur le côté courbé du cylindre illustré à la figure 7.32, il faut calculer l'aire $A(x_i^*)$ de la surface courbée P_i du réservoir entre x_i et x_{i+1} mètres. Cette

surface représente un rectangle dont deux des côtés ont 5 mètres de longueur et la longueur des deux autres côtés est la longueur de l'arc de cercle $y = \sqrt{1 - (x + 29)^2}$ pour x entre x_i et x_{i+1} .

Nous montrerons à la section sur le calcul de la longueur d'une courbe que, si Δx est assez petit, la longueur de l'arc de cercle $y = \sqrt{1 - (x + 29)^2}$ pour x entre x_i et x_{i+1} est approximativement $\sqrt{1 + (y'(x_i^*))^2} \Delta x$ pour un nombre x_i^* entre x_i et x_{i+1} . Donc

$$A(x_i^*) \approx 5\sqrt{1 + (y'(x_i^*))^2} \Delta x = \frac{5}{\sqrt{1 - (x_i^* + 29)^2}} \Delta x$$

car $y'(x) = -(x + 29)/\sqrt{1 - (x + 29)^2}$. Ainsi, $A(x_i^*) \approx S(x_i^*) \Delta x$ où

$$S(x) = \frac{5}{\sqrt{1 - (x + 29)^2}}.$$

Il découle de (7.6.1) avec $h_3 = -30$ et $h_2 = -28$ que la force exercée sur l'un des deux côtés courbés est

$$F = - \int_{h_3}^{h_2} 9.8 x \rho(x) S(x) dx = -5 \times 9,800 \int_{-30}^{-28} \frac{x}{\sqrt{1 - (x + 29)^2}} dx.$$

Si $y = x + 29$, alors $dy = dx$, $y = -1$ pour $x = -30$ et $y = 1$ pour $x = -28$. Donc

$$F = -49,000 \int_{-1}^1 \frac{y - 29}{\sqrt{1 - y^2}} dy = -49,000 \int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} dy + 49,000 \times 29 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy.$$

Puisque $y/\sqrt{1 - y^2}$ est une fonction impaire que nous intégrons sur un intervalle symétrique à l'origine, nous avons

$$\int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} dy = 0.$$

De plus,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \arctan(y) \Big|_{y=-1}^1 = \pi.$$

Nous trouvons que $F = 49,000 \times 29 \pi = 1,421,000\pi$ Newtons. ♣

7.7 Centre de masse

Pour cette section, nous assumons que le lecteur sait ce qu'est un vecteur et connaît les opérations de bases sur les vecteurs. Le matériel que nous retrouvons dans les deux premières sections du chapitre 10 suivit amplement.

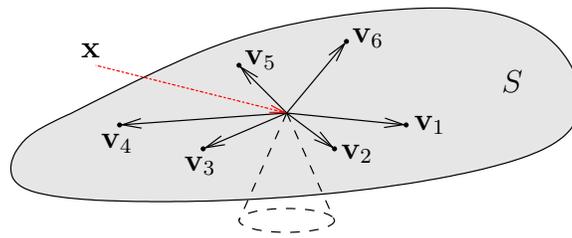


FIGURE 7.33 – Centre de masse d’une surface plane dont la masse est concentrée en un nombre fini de points

Le **centre de masse** d’une mince surface plane S est le point de la surface pour lequel la surface sera en état d’équilibre si nous la déposons sur un cône de telle sorte que la pointe du cône soit en contact avec ce point.

Supposons que la masse de la surface plane S soit concentrée en n points de S (figure 7.33). Si m_j est la masse au point \mathbf{v}_j pour $1 \leq j \leq n$, nous cherchons le point \mathbf{x} de S tel que

$$\sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{x}) = \mathbf{0} . \quad (7.7.1)$$

La somme des forces exercées sur le point \mathbf{x} est nulle. Si $\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, nous obtenons des coordonnées de (7.7.1) que

$$\sum_{j=1}^n m_j (p_j - p) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n m_j (q_j - q) = 0 .$$

Donc

$$p = \frac{\sum_{j=1}^n m_j p_j}{\sum_{j=1}^n m_j} \quad \text{et} \quad q = \frac{\sum_{j=1}^n m_j q_j}{\sum_{j=1}^n m_j} .$$

$M_x = \sum_{j=1}^n m_j q_j$ est le **moment par rapport à l’axe des x** et $M_y = \sum_{j=1}^n m_j p_j$ est le **moment par rapport à l’axe des y** . La masse totale est $m = \sum_{j=1}^n m_j$. Le **centre de masse** est

$$\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right) .$$

Supposons maintenant que la surface plane S soit de densité constante ρ .¹ De plus, supposons que la surface S soit de la forme $\{(x, y) : g(x) \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ pour deux fonctions continues f et g (figure 7.34).

1. Les unités de la densité sont de la forme masse/aire car nous assumons que la surface n’a pas d’épaisseur ou, du moins, que nous pouvons ignorer l’épaisseur de la surface.

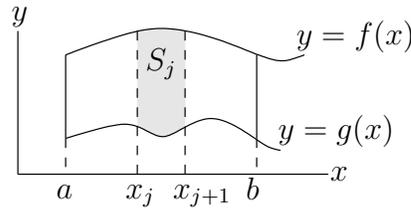


FIGURE 7.34 – Centre de masse d'une surface plane de densité constante

Pour estimer le moment par rapport à l'axe des y de S , partageons le segment $[a, b]$ en k sous intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ de longueur $\Delta x = (b - a)/k$ où $x_j = a + j\Delta x$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Choisissons $x_j^* \in [x_j, x_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$. Nous avons donc

$$M_y \approx \sum_{j=0}^{k-1} x_j^* \rho (f(x_j^*) - g(x_j^*)) \Delta x$$

car x_j^* est la distance approximative entre l'axe des y et les points de la portion $S_j = \{(x, y) : g(x) \leq y \leq f(x), x_j \leq x \leq x_{j+1}\}$ de S , et $\rho (f(x_j^*) - g(x_j^*)) \Delta x$ est la masse approximative de la portion S_j de S .

De même, nous pouvons estimer le moment par rapport à l'axe des x de S à l'aide de la formule

$$M_x \approx \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f(x_j^*) + g(x_j^*))}{2} \rho (f(x_j^*) - g(x_j^*)) \Delta x = \sum_{j=0}^{k-1} \rho \frac{1}{2} (f^2(x_j^*) - g^2(x_j^*)) \Delta x$$

où $(f(x_j^*) + g(x_j^*)) / 2$ est la distance moyenne entre l'axe des x et les points de la portion S_j de S et, comme précédemment, $\rho (f(x_j^*) - g(x_j^*)) \Delta x$ est la masse approximative de la portion S_j de S .

Lorsque $k \rightarrow \infty$, nous obtenons les formules

$$M_y = \rho \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx \quad \text{et} \quad M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

pour le **moment par rapport à l'axe des x** et le **moment par rapport à l'axe des y** respectivement.

La masse de S peut être estimée à l'aide de la formule

$$m \approx \sum_{j=0}^{k-1} \rho (f(x_j^*) - g(x_j^*)) \Delta x .$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, nous obtenons que la masse de S est donnée par

$$m = \rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx .$$

Le centre de masse est $\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$.

Exemple 7.7.1

Trouvons le centre de masse de la surface bornée par les courbes $y = 1 - x^2$ et $y = 0$. La densité de la surface est $\rho = 10$.

La courbe $y = 1 - x^2$ coupe l'axe des x aux points $x = -1$ et $x = 1$. La masse de la surface est donc

$$m = \int_{-1}^1 10(1 - x^2) dx = 10 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{40}{3}.$$

Le moment par rapport à l'axe des x est

$$M_x = \frac{10}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = 5 \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = 5 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{3}.$$

et le moment par rapport à l'axe des y est

$$M_y = 10 \int_{-1}^1 x(1 - x^2) dx = 0$$

car la fonction $h(x) = x(1 - x^2)$ est impaire et le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'axe des y . Il n'est pas surprenant que M_y soit nul car la surface est symétrique par rapport à l'axe des y et elle est de densité constante.

Le centre de masse est $\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right) = (0, 2/5)$. ♣

7.8 Débit sanguin ♣

Le modèle de Poiseuille pour la distribution de vitesse d'un liquide visqueux et incompressible qui s'écoule dans un tube de rayon constant R cm et de longueur L cm (figure 7.35) est

$$v(r) = \frac{P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad , \quad 0 \leq r \leq R,$$

où $v(r)$ cm/s est la vitesse du liquide à une distance r cm de l'axe central du tube, P dyn/cm² est la différence de pression entre les deux extrémités du tube et η est le coefficient de viscosité du liquide. Dans ce modèle, nous supposons que la vitesse varie seulement en fonction de la distance par rapport à l'axe du tube. Nous supposons de plus que la vitesse est nulle sur la paroi du tube. Ce sont de bonnes suppositions si le tube est un vaisseau sanguin et le liquide est du sang. La formule pour la vitesse donnée ci-dessus est une approximation de la solution de l'équation de Navier et Stokes en mécanique des fluides ([2]).

Calculons le débit dans le tube; c'est-à-dire, le volume de liquide qui passe par une section du tube par unité de temps. Pour ce faire, nous utilisons la technique des sommes de Riemann.

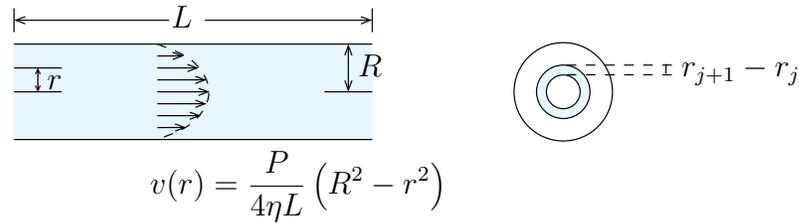


FIGURE 7.35 – La distribution de vitesse d'après le modèle de Poiseuille

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta r = R/k$ et $r_j = j\Delta r$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[0, R]$ en sous-intervalles de la forme $[r_j, r_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Nous considérons l'anneau définie par $r_j \leq r \leq r_{j+1}$. Pour estimer D_j , le volume de liquide qui passe au travers de cet anneau par unité de temps, nous supposons que la vitesse du liquide est presque constante dans cet anneau. L'aire de l'anneau définie par $r_j \leq r \leq r_{j+1}$ est

$$\pi r_{j+1}^2 - \pi r_j^2 = 2\pi \left(\frac{r_{j+1} + r_j}{2} \right) (r_{j+1} - r_j) = 2\pi r_j^* \Delta r ,$$

où $r_j^* = (r_{j+1} + r_j)/2$. Ainsi,

$$D_j \approx 2\pi r_j^* v(r_j^*) \Delta r .$$

Nous avons donc que D , le volume de liquide qui passe par une section du tube par unité de temps, est donné approximativement par

$$D = \sum_{j=0}^{k-1} D_j \approx 2\pi \sum_{j=0}^{k-1} r_j^* v(r_j^*) \Delta r .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$2\pi \int_0^R r v(r) dr .$$

Donc, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons

$$D = 2\pi \int_0^R r v(r) dr .$$

Pour le modèle de Poiseuille, le débit est donc donné par la formule

$$D = 2\pi \int_0^R r v(r) dr = \frac{\pi P}{2\eta L} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi P}{2\eta L} \left(\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi P R^4}{8\eta L} .$$

Les unités de D sont les cm^3/s .

Exemple 7.8.1

Nous voulons mesurer le diamètre de l'aorte ascendante d'une patiente afin de déterminer le

risque de celle-ci d'avoir un accident cardio-vasculaire. Nous ne voulons pas avoir recours à une chirurgie.

Si nous déterminons le débit cardiaque D (i.e. le débit sanguin dans l'aorte ascendante), alors la formule $D = \frac{\pi P R^4}{8\eta L}$ peut être utilisée pour déterminer le rayon R de l'aorte car la pression sanguine P peut être mesurée, η est une constante connue pour le sang, et L est la longueur de l'aorte ascendante. Pour un adulte de grandeur moyenne, $L \approx 6$ cm, $P \approx 106,658$ dyn/cm² et $\eta \approx 0.027$ s dyn/cm².

Pour mesurer expérimentalement le débit cardiaque, nous injectons A mg d'un produit de contraste dans le coeur (naturellement, pas directement dans le coeur) et nous mesurons le débit sanguin dans l'aorte ascendante. Nous estimons qu'il faut T secondes pour que le coeur de la patiente se vide du produit de contraste. Nous allons utiliser les sommes de Riemann pour calculer la quantité total du produit de contraste qui passe par l'aorte ascendante pendant la période de temps T .

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta t = T/k$ et $t_j = j\Delta t$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de la forme $[t_j, t_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Soit $c(t)$ la concentration du produit de contraste en mg/cm³ au temps t dans l'aorte ascendante. Si nous supposons que la concentration du produit de contraste est presque constante entre t_j et t_{j+1} , la quantité Q_i du produit de contraste qui passe par l'aorte ascendante entre t_i et t_{i+1} est approximativement

$$Q_i \approx c(t_i) \left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \Delta t$$

car $\left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \Delta t$ représente le volume de sang qui passe par l'aorte ascendante durant la période de temps Δt . La quantité total Q du produit de contraste qui passe par l'aorte ascendante durant les T secondes est donc donnée approximativement par

$$Q = \sum_{i=0}^{k-1} Q_i \approx \sum_{i=0}^{k-1} c(t_i) \left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \Delta t .$$

C'est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\left(\frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \right) \int_0^T c(t) dt .$$

Donc, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons

$$Q = \frac{\pi R^4 P}{8\eta L} \int_0^T c(t) dt .$$

Or, nous aurons $Q = A$ après T secondes. Le débit est donc

$$D = \frac{\pi R^4 P}{8\eta L} = A / \left(\int_0^T c(t) dt \right) .$$

Supposons que 6 mg du produit de contraste soit injecté dans le coeur de la patiente, et que la concentration du produit de contraste mesurée à intervalle régulier donne les résultats suivants.

t	(s)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$c(t)$	(mg/cm ³)	0	0.021	0.045	0.073	0.058	0.036	0.028	0.014	0.006	0.002	0

Évaluons le débit sanguin avec les sommes à droite. De plus, si $P \approx 106,658$ dyn/cm², $L = 6$ cm et $\eta \approx 0.027$, déterminons le diamètre de l'aorte ascendante de cette patiente.

Posons $t_i = \frac{i}{2}$ pour $i = 0, 1, \dots, 10$. Nous avons

$$\int_0^5 c(t) dt \approx \sum_{i=1}^{10} c(t_i) \Delta t = \frac{1}{2} (0.021 + 0.045 + \dots + 0) = 0.1415 \text{ s mg/cm}^3 .$$

Le débit est donc

$$D = \frac{6}{0.1415} \approx 42.4028 \text{ cm}^3/\text{s} .$$

Nous déduisons de la formule $D = \frac{\pi P R^4}{8 \eta L}$ que

$$R = \left(\frac{8 \eta L D}{\pi P} \right)^{1/4} \approx 0.11317 \text{ cm} .$$

Le diamètre de l'aorte ascendante est donc approximativement de 0.2263 cm. Pour un adulte de grandeur normale, le diamètre de l'aorte ascendante est beaucoup plus grand (au moins 10 fois plus grand). La patiente est à risque. ♣

7.9 Applications à l'économie

Avant de donner un exemple de l'utilité de l'intégrale en économie, il faut introduire quelques concepts de base.

Si nous déposons dans un compte en banque la somme de M_0 dollars et que le taux d'intérêt est de $I\%$ par année, après un an nous aurons

$$M_1 = M_0 + \frac{I}{100} M_0 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100} \right) \text{ dollars} .$$

C'est le montant en banque au début de l'année plus les intérêts pour l'année. Après deux ans nous aurons

$$M_2 = M_1 + \frac{I}{100} M_1 = M_1 \left(1 + \frac{I}{100} \right) \text{ dollars} .$$

C'est le montant en banque au début de la deuxième année plus les intérêts pour l'année. Donc

$$M_2 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100} \right)^2 \text{ dollars} .$$

Par induction, après n années, nous obtenons le résultat suivant.

Méthode 7.9.1

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé annuellement** au taux de $I\%$, alors le montant M_n dans le compte après n années est donnée par la formule

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{I}{100}\right)^n \text{ dollars .}$$

Si nous déposons dans un compte en banque la somme de M_0 dollars et que le taux d'intérêt est de $I\%$ par année calculé k fois par année, à la fin de la première période de l'année (i.e. au premier versement des intérêts), nous aurons

$$M_{0,1} = M_0 + \frac{I}{100k} M_0 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right) \text{ dollars .}$$

C'est le montant en banque au début de la première période plus les intérêts pour la période qui sont $1/k$ des intérêts de l'année. À la fin de la deuxième période de l'année (i.e. au deuxième versement des intérêts), nous aurons

$$M_{0,2} = M_{0,1} + \frac{I}{100k} M_{0,1} = M_{0,1} \left(1 + \frac{I}{100k}\right) \text{ dollars .}$$

C'est le montant en banque au début de la deuxième période plus les intérêts pour la période qui sont encore $1/k$ des intérêts de l'année. Il est naturellement assumé que l'année est divisée en k périodes de même durées. Nous avons donc

$$M_{0,2} = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^2 \text{ dollars .}$$

Par induction, à la fin de l'année (c'est à dire à la fin de la k^e période ou, si vous préférez, au k^e versement), nous aurons

$$M_1 = M_{0,k} = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^k \text{ dollars .}$$

De même, à la fin de la deuxième année, nous aurons

$$M_2 = M_1 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^k \text{ dollars .}$$

Donc

$$M_2 = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{2k} \text{ dollars .}$$

Par induction, nous obtenons le résultat suivant.

Méthode 7.9.2

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé k fois par année** au taux de $I\%$, alors le montant M_n dans le compte après n années est donnée par la

formule

$$M_n = M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{nk} \text{ dollars .}$$

Dans le cas précédent où l'intérêt est composé k fois par année, si le nombre k de périodes devient de plus en plus grand (tend vers plus l'infini), nous obtenons la formule suivante.

Méthode 7.9.3

Si M_0 est le dépôt initial (en dollars) et si l'intérêt est **composé de façon continue** au taux $I\%$ par année, alors le montant M_n dans le compte après n année est donnée par la formule

$$M_n = M_0 e^{(nI)/100} . \quad (7.9.1)$$

Dans le cas continue, n peut être un nombre réel. Nous ne sommes plus limité aux entiers comme dans les deux premiers cas.

Pour démontrer la formule (7.9.1), il suffit de noter que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_0 \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{nk} = \lim_{k \rightarrow \infty} M_0 \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100k/I}\right)^{100k/I}}_{\rightarrow e \text{ lorsque } k \rightarrow \infty} \right)^{nI/100} = M_0 e^{nI/100} .$$

7.9.1 Valeurs présentes et futures

Définition 7.9.4

La **valeur future** d'un montant M_0 est le montant obtenu après t années si le montant M_0 est placé aujourd'hui dans un compte en banque dont le taux d'intérêt est de $I\%$ par année.

Par exemple, si l'intérêt est composé de façon continue, la valeur future après n année est $M_n = M_0 e^{nI/100}$.

Définition 7.9.5

La **valeur présente** d'un montant M_t est le montant M_0 qu'il faut placer aujourd'hui dans un compte en banque dont le taux d'intérêt est de $I\%$ pour obtenir M_t dans t années.

Par exemple, si l'intérêt est composé de façon continue, la valeur présente de M_t dollars dans t années est $M_0 = M_t e^{-In/100}$. Si l'intérêt est composé k fois par année, la valeur présente de M_n dollars dans n années est $M_0 = M_n \left(1 + \frac{I}{100k}\right)^{-kn}$.

Exemple 7.9.6

Vous venez de gagner \$1,000,000 à la loterie. Le montant vous est donné en quatre versements égaux ; le premier versement aujourd'hui, le deuxième dans un an à partir d'aujourd'hui, le troisième dans deux ans à partir d'aujourd'hui, etc. En Assumant que le taux d'intérêt pour les prochaines années est de 4% composé de façon continue, avez-vous réellement gagné \$1,000,000 ?

Il faut déterminer la valeur présente de l'argent qui vous est donné. La valeur présente du montant de \$250,000 qui vous sera donné dans un an est $250,000 e^{-4/100}$, la valeur présente du montant de \$250,000 qui vous sera donné dans deux ans est $250,000 (e^{-4/100})^2$, etc.

La valeur présente de montant que vous avez gagné à la loterie est donc

$$\begin{aligned} & 250,000 + 250,000 e^{-4/100} + 250,000 (e^{-4/100})^2 + 250,000 (e^{-4/100})^3 \\ &= 250,000 \left(\frac{1 - (e^{-4/100})^4}{1 - e^{-4/100}} \right) = 942,706.56 \text{ dollars .} \end{aligned}$$



En raison de leur très grand volume de vente, nous pouvons supposer que le taux de revenu d'une grande entreprise (e.g. Une chaîne de restaurants ou de magasins à rayons) est donné par une fonction continue $R(t)$ où t est le temps. Puisque $R(t)$ est un taux de revenu, ses unités sont des dollars/jour, des dollars/année, des euros/mois, etc. Le temps t utilise les mêmes unités de temps que ceux utilisé pour le taux de revenu. Par exemple, si le taux de revenu est en dollars/jour, le temps t sera en jours.

Si l'entreprise investi ses revenus dans un compte dont le taux d'intérêt est de $I\%$ composé de façon continue, quelle sera la valeur future V_f des placements de cette entreprise au temps T ?

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta t = T/k$ et $t_i = i\Delta t$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Pour $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, nous choisissons t_i^* dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, les revenus sont approximativement de $R(t_i^*) \Delta t$. La valeur future de ces revenus est alors approximativement $e^{I(T-t_i^*)/100} R(t_i^*) \Delta t$ car ces revenus sont investis pour une période d'environ $T - t_i^*$.

La somme des valeurs futures estimées pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ donne l'approximation suivant de la valeur future V_f des placements de l'entreprise pour une période T .

$$V_f \approx \sum_{i=0}^{k-1} e^{I(T-t_i^*)/100} R(t_i^*) \Delta t .$$

Remarquons que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons le résultat suivant.

Méthode 7.9.7

Si $R(t)$ représente le taux investi dans un compte au temps t et si le taux d'intérêt est de $I\%$ composé de façon continue, alors la valeur future V_f des investissements après une période T est donnée par la formule

$$V_f = \int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt .$$

De façon semblable, nous pouvons obtenir la valeur présente V_p des gains d'une grande entreprise pour une période de temps T . Nous assumons que le taux d'intérêt sur les placements est de $I\%$ composé de façon continue.

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta t = T/k$ et $t_i = i\Delta t$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, nous choisissons t_i^* dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, les revenus sont approximativement de $R(t_i^*) \Delta t$. La valeur présente de ces revenus est alors approximativement $e^{-I t_i^*/100} R(t_i^*) \Delta t$.

La somme des valeurs présentes estimées pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ donne l'approximation suivante de la valeur présente V_p des revenus de l'entreprise pour une période T .

$$V_p \approx \sum_{i=0}^{k-1} e^{-I t_i^*/100} R(t_i^*) \Delta t .$$

Remarquons que cette somme est une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_0^T e^{-I t/100} R(t) dt .$$

Ainsi, si k tend vers plus l'infini, nous obtenons le résultat suivant.

Méthode 7.9.8

Si $R(t)$ représente le taux investi dans un compte au temps t et si le taux d'intérêt est de $I\%$ composé de façon continue, alors la valeur présente V_p des investissements pour une période T est donnée par la formule

$$V_p = \int_0^T e^{-I t/100} R(t) dt .$$

Exemple 7.9.9

Si le taux de revenus d'une chaîne de locations de voitures est $R(t) = 10,000$ dollars/jour, quelle sera la valeur future des revenus de cette chaîne de locations dans 10 ans si elle investit ses revenus à un taux d'intérêt de 5% composé de façon continue.

Nous avons que la valeur future V_f est

$$V_f = \int_0^T e^{I(T-t)/100} R(t) dt ,$$

où $T = 10$, $I = 5$ et $R(t) = 10,000$ pour tout t . Donc

$$\begin{aligned} V_f &= \int_0^{10} 10,000 e^{5(10-t)/100} dt = -2 \times 10^5 e^{5(10-t)/100} \Big|_{t=0}^{10} \\ &= -2 \times 10^5 (1 - e^{0.5}) \approx 129,744.25 \text{ dollars.} \end{aligned}$$



7.9.2 Surplus du consommateur et du producteur

Soit $D(q)$ le prix par unité que le consommateur est prêt à payer s'il y a q unités d'un certain produit disponibles sur le marché et soit $P(q)$ le prix par unité que le producteur (manufacturier, fermier, ...) est prêt à demander s'il y a q unités de ce produit disponibles sur le marché.

Il est raisonnable de penser que D est une fonction décroissante. Quand le nombre d'unités disponibles sur le marché est grand, les consommateurs espèrent que les vendeurs vont baisser le prix par unité pour pouvoir écouler leur stock. Par contre, la fonction P sera probablement croissante. Si les marchands commandent un grand nombre d'unités, les producteurs vont augmenter le prix par unité pour bénéficier de l'enjouement pour le produit et pour pouvoir augmenter leur production.

Nous retrouvons à la figure 7.36 le graphe de D et celui de P . Dans cette figure, q_0 est le nombre maximal d'unité que le marché peut supporter (tous ceux susceptibles d'acheter le produit en ont déjà fait l'achat), p_0 est le prix minimal par unité que le producteur est prêt à demander, et p_1 est le prix maximal par unité que le consommateur est prêt à payer. Le point q^* est le **point d'équilibre** pour le nombre d'unités sur le marché. À ce point, les consommateurs et producteurs tirent avantage du prix de p^* par unité.

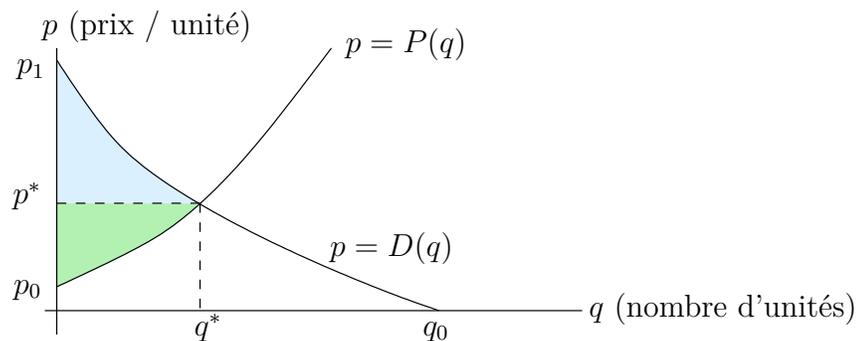


FIGURE 7.36 – La région en bleu représente le surplus du consommateur alors que la région en vert représente le surplus du producteur.

Le **surplus du consommateur** S_c est le montant économisé par les consommateurs s'ils

payent p^* au lieu du prix par unité qu'ils auraient été prêt à payer normalement pour $q < q^*$.

$$S_c = \int_0^{q^*} D(q) \, dq - p^* q^* .$$

C'est l'aire de la région en bleu représenté à la figure 7.36.

Le **surplus du producteur** S_p est le revenu additionnel fait par les producteurs ou manufacturiers s'ils demandent p^* au lieu du prix par unité qu'ils auraient été prêt à demander normalement pour $q < q^*$.

$$S_c = p^* q^* - \int_0^{q^*} P(q) \, dq .$$

C'est l'aire de la région en vert représenté à la figure 7.36.

Exemple 7.9.10

En mai 2003, nous retrouvons sur le marché 50 unités d'un modèle de voiture de luxe que le consommateur (pour ce genre de voitures) était prêt à acheter pour \$370,000 l'unité. Nous avons estimé que le point d'équilibre pour le nombre d'unités était de 350 voitures au prix de \$250,000 par unités. Quelle a été le surplus du consommateur si le prix par unité que le consommateur est prêt à payer est une fonction affine du nombre d'unités disponibles ?

Le graphe de D est une droite qui passe par les points $(50, 370,000)$ et $(q^*, p^*) = (350, 250,000)$. L'équation de cette droite est

$$P(q) = \frac{370,000 - 250,000}{50 - 350} (p - 350) + 250,000 = -400(p - 350) + 250,000 .$$

Le surplus du consommateur est

$$\begin{aligned} S_c &= \int_0^{350} (-400(p - 350) + 250,000) \, dp - 350 \times 250,000 \\ &= \left(-200(p - 350)^2 + 250,000 p \right) \Big|_{p=0}^{350} - 350 \times 250,000 = 24,500,000 \text{ dollars.} \end{aligned}$$



7.10 Test de l'intégrale

Il est possible de déterminer si une série de termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge à l'aide d'une intégrale impropre.

Théorème 7.10.1 (Le test de l'intégrale)

Soit $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une fonction continue et décroissante. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est une série dont les termes sont donnés par $a_n = f(n)$ pour tout n , alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

La démonstration de ce théorème est simple et repose sur les deux graphes donnés à la figure 7.37.

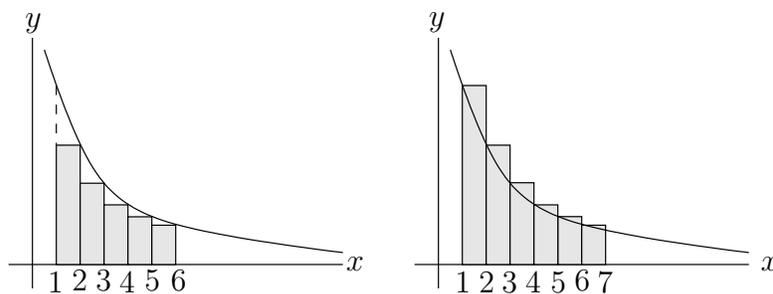


FIGURE 7.37 – La justification du test de l'intégrale pour déterminer si une série converge.

Posons $T_n = \int_1^n f(x) dx$ et $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Les sommes S_n sont les sommes partielles de la séries.

La région en gris dans le dessin à gauche dans la figure 7.37 représente la valeur de la somme $\sum_{k=2}^6 a_k = S_6 - a_1$ alors que la région en gris dans le dessin à droite dans la figure 7.37

représente la valeur de la somme $\sum_{k=1}^6 a_k = S_6$.

A) Supposons que $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge. Cela implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$. Or, à partir du dessin à droite dans la figure 7.37, nous obtenons que $0 \leq T_n \leq S_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = +\infty$$

et nous concluons que la séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Cela implique que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

B) Supposons que $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge. Cela implique que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ existe et est réel. Or, à partir du dessin à gauche dans la figure 7.37, nous obtenons que $0 \leq S_n - a_1 \leq T_n$ pour tout $n \geq 2$. Donc $0 \leq S_n \leq T_n + a_1$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante (car $a_n \geq 0$ pour tout n) et bornée par

$$a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = a_1 + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Il découle du théorème 2.1.20 que la suite $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. C'est à dire que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Remarque 7.10.2

Dans la cas où la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, et donc l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge, nous pouvons utiliser une intégrale pour estimer $S - S_n$ où S est la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Notons en passant que la suite des sommes partielles $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite croissante car les termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sont positifs, Donc $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots \leq S$.

Nous pouvons conclure à partir du dessin à la figure 7.38 que

$$0 \leq S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x) dx .$$

La région en gris représente la somme $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. ♠

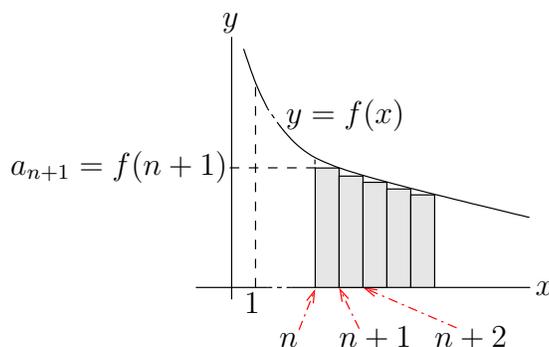


FIGURE 7.38 – Le test de l'intégrale donne une approximation de la somme d'une série de terme positifs convergente. La région en gris représente la différence entre la somme S de la série et sa n^e somme partielle S_n .

Exemple 7.10.3

Utilisons le test de l'intégrale pour fournir une autre démonstration de la proposition 2.2.16

Si $p \leq 0$, alors la suite $\{n^{-p}\}_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas vers zéro. Donc, par le théorème 2.2.20, la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ diverge.

Nous pouvons donc supposer que $p > 0$. La proposition 2.2.16 est alors une conséquence immédiate du résultat que nous avons obtenu à la proposition 6.5.4; c'est-à-dire que l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge si seulement et seulement si $p > 1$.

Considérons $f(x) = 1/x^p$. Nous avons que $f(x) > 0$ pour $x > 0$ et $f(x)$ est une fonction continue et décroissante pour $x > 0$ car $f'(x) = -px^{-p+1} < 0$ pour $x > 0$. Nous pouvons donc utiliser le test de l'intégrale pour conclure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ converge} \Leftrightarrow p > 1 .$$



Exemple 7.10.4

Déterminons si la série $\sum_{n=1}^{\infty} n5^{-n}$ converge ou diverge.

Cette série est de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = f(n)$ pour $f(x) = x5^{-x}$.

Nous avons que $f(x) > 0$ pour tout $x \geq 1$ et f est une fonction continue et décroissante; en fait, $f'(x) = (1 - x \ln(5))5^{-x} < 0$ pour $x \geq 1$.

Considérons l'intégrale $\int_1^q x5^{-x} dx$. Cette intégrale se calcule à l'aide de la méthode d'intégration par parties. Nous avons que $x5^{-x} = u(x)v(x)$ pour $u(x) = x$ et $v'(x) = 5^{-x}$. Donc $u'(x) = 1$, $v(x) = -5^{-x}/\ln(5)$ et

$$\begin{aligned} \int_1^q x5^{-x} dx &= \int_1^q u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_{x=1}^q - \int_1^q u'(x)v(x) dx \\ &= -\frac{x5^{-x}}{\ln(5)} \Big|_{x=1}^q + \int_1^q \frac{5^{-x}}{\ln(5)} dx = -\frac{x5^{-x}}{\ln(5)} \Big|_{x=1}^q - \frac{5^{-x}}{(\ln(5))^2} \Big|_{x=1}^q \\ &= -\frac{q5^{-q}}{\ln(5)} + \frac{1}{5 \ln(5)} - \frac{5^{-q}}{(\ln(5))^2} + \frac{1}{5(\ln(5))^2} . \end{aligned}$$

Grâce à la Règle de l'Hospital, $\lim_{q \rightarrow \infty} q5^{-q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{q}{5^q} = 0$. De plus, $\lim_{q \rightarrow \infty} 5^{-q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{5^q} = 0$.
Donc

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q x5^{-x} dx = \frac{1}{5 \ln(5)} + \frac{1}{5(\ln(5))^2} .$$

Puisque $\int_1^q x5^{-x} dx$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n5^{-n}$ converge. ♣

Exemple 7.10.5

Déterminons si la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ converge ou diverge.

Cette série est de la forme $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ où $a_n = f(n)$ pour $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

Nous avons que $f(x) > 0$ pour tout $x \geq 2$ et f est une fonction continue et décroissante car $x \ln(x)$ est croissante pour $x \geq 2$.

Considérons l'intégrale $\int_2^q \frac{1}{x \ln(x)} dx$. Cette dernière intégrale se calcul à l'aide de la méthode de substitution. Si $u = \ln(x)$, alors $du = \frac{1}{x} dx$, $u = \ln(q)$ lorsque $x = q$ et $u = \ln(2)$ lorsque $x = 2$. Ainsi,

$$\int_2^q \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(q)} \frac{1}{u} du .$$

Or, cet intégrale diverge d'après la proposition 6.5.4; c'est le cas $p = 1$. Donc, grâce au test de l'intégrale, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge. ♣

7.11 Exercices

7.11.1 Aire entre deux courbes

Question 7.1

Calculez l'aire de chacune des régions décrient ci-dessous.

- La région entre la droite $y = 2x$ et la courbe $y = x^2$ pour $0 \leq x \leq 2$.
- La région entre la droite $y = 2x$ et la courbe $y = x^2$ pour $0 \leq x \leq 4$.
- La région entre les courbes $y = e^x$ et $y = \frac{e^{2x}}{2}$ pour $0 \leq x \leq 1$.
- La région bornée par la droite $y = \frac{3}{2} + x$ et la courbe $y = \frac{x^2}{2}$.
- La région bornée par la droite $y = x$ et la courbe $y = 7x - 3x^2$.
- La région bornée par la courbe $y^2 = x$ et la droite $x - y = 2$.
- La région bornée par la courbe $y = f(x) = \frac{x}{1+x}$ et la droite $y = g(x) = \frac{x}{2}$.
- La région bornée par les courbes $y = (x - 2)^2$ et $y = 10 - x^2$.

Question 7.2

Trouvez l'aire entre les courbes $y = f(x) = \sin(2x)$ et $y = g(x) = \cos(2x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

Question 7.3

Le taux de croissance (instantané) d'une population de bactéries au temps t en minutes est donné par la formule $r(t) = \frac{1000}{(2 + 3t)^{3/4}}$ bactéries/heure.

- Si la population initiale est de 10^6 bactéries, quelle est le nombre de bactéries après T minutes?
- Est-ce que cette population de bactéries peut supporter ce taux de croissance? En d'autre mots, est-ce que le nombre de bactéries tend vers une valeur finie lorsque T tend vers plus

l'infini ?

c) Si la population initiale est toujours de 10^6 bactéries comme en (a), combien de temps s'écoule-t-il avant que nous atteignons 2×10^6 bactéries ? Est-ce que ce résultat pourrait justifier une réponse différente en (b) ?

7.11.2 Valeur moyenne d'une fonction

Question 7.4

Calculez la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x - x^3$ pour $-1 \leq x \leq 1$. Tracez le graphe de f sur l'intervalle $[-1, 1]$ et la droite horizontale qui représente la valeur moyenne.

Question 7.5

Le taux (instantané) auquel l'eau est versé dans un bocal après t minutes est donné par la formule $r(t) = 4t(3 - t)$ litres/minute.

a) Quelle est le volume d'eau qui a été versé dans le bocal au cours des deux premières minutes (i.e. $0 \leq t \leq 2$) ?

b) Quelle est le taux moyen auquel l'eau est versé dans le bocal au cours des deux première minute ?

c) Comparez le taux moyen calculé en (b) avec le taux au cours de la première minute $0 \leq t \leq 1$ minute. Lequel est le plus grand ?

d) Tracez le graphe du taux instantané en fonction du temps (i.e. de r) et la droite horizontal qui correspond au taux moyen durant les deux premières minutes.

Question 7.6

Le taux (instantané) auquel l'eau entre un réservoir varie dans le temps et est donné par la formule $r(t) = 360t - 39t^2 + t^3$ où t est en heures et r est en litres/heure. Quelle est le volume d'eau qui a entré dans le réservoir au cours des 15 premières heures (i.e. pour $0 \leq t \leq 15$) ? Quelle est le taux moyen au cours des 15 premières heures ?

Question 7.7 🔧

Si le taux d'énergie produite par une réaction (chimique) au temps t en heures est donnée par $E(t) = |360t - 39t^2 + t^3|$ joules/heure, Calculer l'énergie totale produite entre $t = 0$ heure et $t = 24$ heures. Calculez le taux moyen de production d'énergie durant cette période.

Suggestion : Les racines du polynôme $360t - 39t^2 + t^3$ sont 0, 15 et 24.

Question 7.8 🌲

Un très mince fils de 2 mètres de longueur est formé d'une substance organique dont la densité linéaire à une distance de x cm d'une de ses extrémités est de $\rho(x)$ g/cm où

$$\rho(x) = 1 + 2 \times 10^{-8} x^2(240 - x) .$$

a) Trouvez la densité maximale et minimale le long du fils. À quel endroit avons-nous la plus forte densité ?

b) Quelle est la masse totale du fils ?

- c) Quelle est la densité linéaire moyenne du fils? Comparez avec la valeur maximale et minimale que vous avez trouvée en (a).
- d) Dans une même figure, tracez le graphe de la densité et la droite horizontale qui correspond à la densité moyenne.

7.11.3 Volume d'un objet

Question 7.9

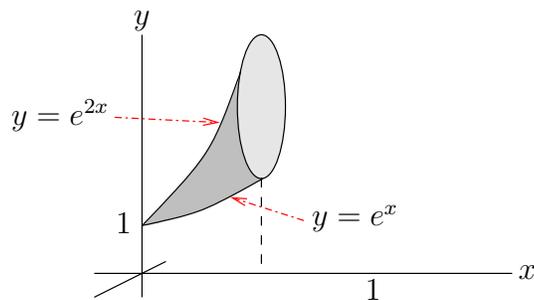
Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume du cône droit de hauteur 3 dont la base est un disque de rayon 2.

Question 7.10

Utilisez la méthode des tranches pour trouver un somme de Riemann qui approche le volume d'un cône de hauteur h dont la base est un disque de rayon r . Déduire de votre somme une formule exacte pour calculer le volume d'un cône.

Question 7.11

Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume de la corne représentée ci-dessous pour $0 \leq x \leq 1$. Les sections transversales sont des cercles.



Question 7.12

Utilisez la méthode des tranches pour trouver le volume d'un ballon de football (ayant la forme d'un ellipsoïde) de 30 cm de longueur et de 18 cm de diamètre dans sa partie la plus large. Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du volume du ballon de football pour en déduire une intégrale définie pour le volume du ballon de football.

Question 7.13

- a) Quel est le volume du solide dont la base est la région $\{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1\}$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des y sont des demi-cercles?
- b) Quel est le volume du solide dont la base est la région $\{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 2\}$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des demi-cercles?
- c) Quel est le volume du solide dont la base est la région bornée la courbe $y = -x^2$, et les droites $y = 3x$ et $x = 2$, et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés?

Question 7.14

Nous considérons la région R bornée par l'axe des x , la courbe $y = x^{1/3}$ et la droite $x = 1$.

- a) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de l'axe des x .
- b) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de la droite $y = -3$.
- c) Trouvez le volume du solide produit en faisant la rotation de la région R autour de la droite $y = 7$.
- d) Trouvez le volume du solide dont la base est la région R et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.
- e) Trouvez le volume du solide dont la base est la région R et les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des demi-cercles.

Question 7.15

Pour chacun des problèmes suivants, trouvez le volume du solide produit par la rotation de la région donnée autour de l'axe donné.

- a) La région est bornée par la courbe $y = \cos(x)$, l'axe des x , et les droites $x = 0$ et $x = \pi$. L'axe de rotation est l'axe des x .
- b) La région est bornée par la courbe $y = \cos(x/2)$, l'axe des x , et les droites $x = -\pi$ et $x = \pi$. L'axe de rotation est l'axe des x .
- c) La région est bornée par la courbe $y = x^{3/2}$, l'axe des x et la droite $x = 1$. L'axe de rotation est l'axe des x .
- d) La même région qu'en (c) mais l'axe de rotation est l'axe des y .
- e) La région est bornée par la courbe $y = 1/x$, l'axe des x , et les droites $x = 1$ et $x = 2$. L'axe de rotation est l'axe des x .

Question 7.16

Trouvez le volume du solide que nous obtenons dans chacun des cas suivants.

- a) Si nous faisons la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2$ et la droite $y = x$ autour de l'axe $y = -1$.
- b) Si nous faisons la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2$ et la droite $y = 2x$ autour de l'axe $x = 4$.
- c) Si nous faisons la rotation de la région bornée par la courbe $y = \sqrt{x}$ et la droite $y = x$ autour de l'axe des x .
- d) Si nous faisons la rotation de la région bornée par les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$ autour de l'axe des y ?
- e) Si nous faisons la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2 - 6x + 9$ et la droite $y = 4$ autour de l'axe $x = -1$.
- f) Si nous faisons la rotation de la région bornée par la courbe $y = x^2 - 8x + 16$ et la droite $y = 4$ autour de l'axe $x = -2$.
- g) Si nous faisons la rotation de la région bornée par la courbe $y = -x^2 + 10x - 25$ et la droite $y = -4$ autour de l'axe $x = -1$.
- h) Si nous faisons la rotation de la région bornée par les courbes $x = y^2 - 4y + 2$ et $x = -y^2 + 4y - 4$ autour de la droite $x = 1$.
- i) Si nous faisons la rotation de la région bornée par la courbe $y = 2/x$ et la droite $y = 3 - x$ autour de l'axe des x .

Question 7.17

Si nous faisons la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 1$ autour de l'axe $y = 3$, nous obtenons un tore (une objet de la forme d'un bagel). Quelle est le volume de ce tore ?

7.11.4 Masse d'un objet

Question 7.18

La densité de l'huile à une distance de r mètres du centre d'une nappe d'huile circulaire sur la surface de l'océan est donnée par $\rho(r) = 50/(1+r)$ kg/m².

- Si la nappe d'huile a un rayon de 1,000 m, donnez une somme de Reimann qui approche la masse total de l'huile dans la nappe.
- En transformant la somme donnée en (a) en une intégrale, trouvez la valeur exacte de la masse totale d'huile dans la nappe.
- Quelle est la valeur de r pour laquelle nous avons la moitié de la masse totale d'huile.

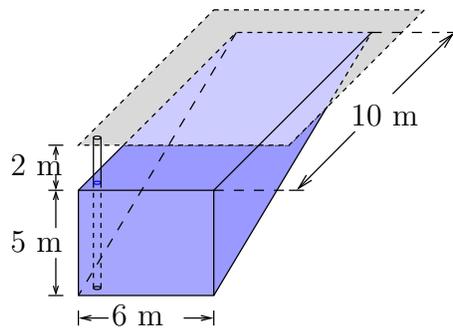
7.11.5 Travail

Question 7.19

Un travailleur est en haut d'un échafaudage de 30 mètres de hauteur. Il doit lever à l'aide d'une corde une chaudière de ciment à partir du sol jusqu'à une hauteur de 10 mètres. La chaudière a une masse de 50 kg et la corde a une masse de 0.5 kg/m. Trouvez le travail total nécessaire pour lever cette chaudière.

Question 7.20

Le réservoir représenté ci-dessous est rempli d'eau.



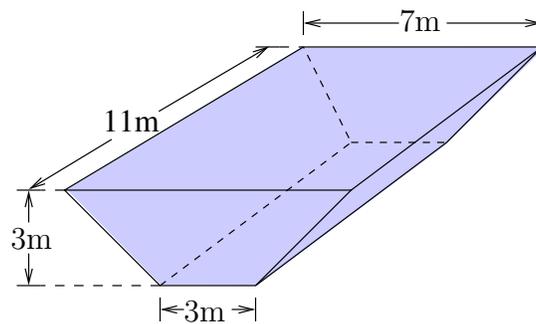
Calculez le travail nécessaire pour vider ce réservoir s'il est enfoui 2 m sous le niveau du sol. La densité de l'eau est de 1000 kg/m³ et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8$ m/s².

Question 7.21

Une piscine représenté ci-dessous est remplie d'eau. Calculez le travail nécessaire pour vider cette piscine. La densité de l'eau est de 1000 kg/m³ et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8$ m/s².

Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du travail fait pour vider le réservoir et en déduire une intégrale définie pour calculer le travail fait pour

vider le réservoir. Finalement vous devez calculer cette intégrale. Vous devez bien définir toutes vos variables.

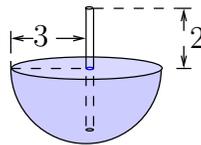


Question 7.22

Une citerne de forme rectangulaire possède les dimensions suivantes : 3 m de long, 1 m de large et 2 m de haut. La citerne est plein d'eau. Calculez le travail nécessaire pour pomper la moitié de l'eau à une hauteur de 1 m au-dessus du citerne. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Question 7.23

Un réservoir à la forme d'une demi-sphère renversée dont le rayon est de 3 m.



Si ce réservoir est à 2 m sous le sol et il est plein d'eau, calculez le travail nécessaire pour vider ce réservoir. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

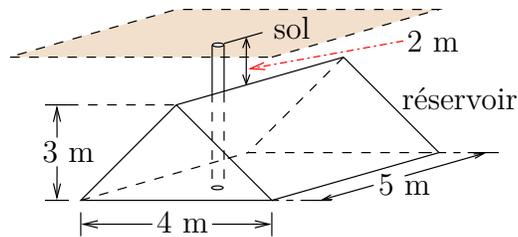
Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du travail fait pour vider le réservoir et en déduire une intégrale définie pour calculer le travail fait pour vider le réservoir. Finalement vous devez calculer cette intégrale. Vous devez bien définir toutes vos variables.

Question 7.24

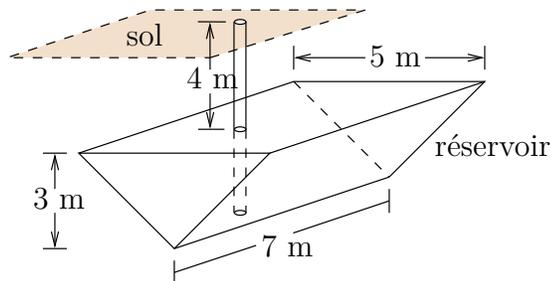
Les réservoirs ci-dessous sont plein d'huile dont la densité est de 570 kg/m^3 . Quelle est le travail nécessaire pour vider chacun des réservoirs ?

Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation du travail fait pour vider le réservoir et en déduire une intégrale définie pour calculer le travail fait pour vider le réservoir. Finalement vous devez calculer cette intégrale.

a) le réservoir est enfoui 2 mètres sous le sol.



a) le réservoir est enfoui 4 mètres sous le sol.



Question 7.25

Un réservoir cylindrique de deux mètres de rayon et de six mètres de hauteur (donc l'axe du cylindre est vertical) est à moitié rempli d'eau. Trouvez le travail nécessaire pour vider le réservoir si nous pompions l'eau à partir d'un point trois mètres au dessus réservoir. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

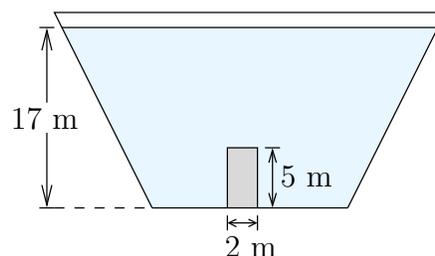
7.11.6 Force

Question 7.26

Un réservoir rectangulaire de 20 mètres de longueur, 10 mètres de largeur et 15 mètres de profondeur est rempli d'eau. Quelle est la force totale exercée sur le front et sur chaque coté du réservoir? La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Question 7.27

Un barrage à une porte rectangulaire à sa base. La porte a une largeur de 2 m et une hauteur de 5 m. Quelle est la pression hydrostatique (i.e. la force) exercée sur la porte si la hauteur de l'eau derrière le barrage est de 17 m. La densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'accélération dû à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.



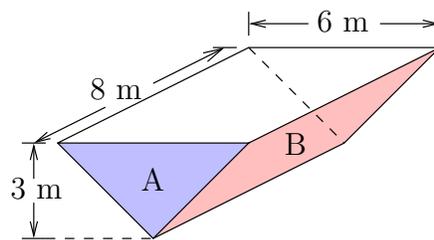
Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation de la pression sur la porte et en déduire une intégrale définie pour calculer la pression sur la porte. Finalement vous devez calculer cette intégrale. Vous devez bien définir toutes vos variables.

Question 7.28

Une piscine représenté ci-dessous est remplie d'eau. Calculez la force exercée par la pression sur les deux côtés suivants de la piscine.

Dans chacun des cas, vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation de la force exercée sur le coté et en déduire une intégrale définie pour la force exercée sur le coté. Finalement, vous devez évaluer cette intégrale. Prenez soin de bien définir toutes vos variables.

- Pour le coté A de la piscine
- Pour le coté B de la piscine.



Question 7.29

Un cylindre fermé aux extrémités se retrouve sur le côté au fond d'un lac. Le diamètre du cylindre est de 10 cm et sa longueur de 20 cm. Si la profondeur du lac est de 6 mètres, quelle est la force exercée sur les extrémités du cylindre ? Il faut se rappeler que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

Vous devez trouver une somme de Riemann qui donne une approximation de la force exercées sur les extrémités et en déduire une intégrale définie pour calculer la force exercées sur les extrémités. Finalement vous devez calculer cette intégrale. Vous devez bien définir toutes vos variables.

7.11.7 Centre de masse

Question 7.30

Trouvez la position du centre de masse de la région plane bornée par la courbe $y = x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 2$. La densité est constante.

Question 7.31

Trouvez la position du centre de masse de la région bornée par les courbes $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 2$. La densité est constante et égale à 3 kg/m^2 .

7.11.8 Applications à l'économie

Question 7.32

Si \$5000 est investi à un taux de 7% d'intérêt, quelle est la valeur de l'investissement après 2 ans si l'intérêt est calculé mensuellement ? De façon continue ?

Question 7.33

Un placement garantie un revenu de $100 + 10t$ dollars par année pour une période de dix ans où t est le nombre d'années depuis la date du placement que nous assumons comme étant aujourd'hui. Trouvez la valeur présente de ce placement à la fin des dix ans si le taux d'intérêt est de 5% par année, composé de façon continue.

Question 7.34

Nous savons qu'un bon vin prend de la valeur avec l'âge. Supposer que vous êtes un marchand de vin et que vous savez que le prix d'une bouteille de votre vin sera de $P(1 + 20\sqrt{t})$ dollars dans t années où P dollars est le prix présent d'une bouteille de votre vin. Si le taux d'intérêt est de 5% par année, composé de façon continue, qu'elle est le meilleur temps pour vendre votre vin ?

Question 7.35

On vous doit une certaine somme d'argent. On vous offre deux options pour vous rembourser. Pour la première option, on vous offre de payer cette dette en quatre versements de \$5,000 chacun sur une période de trois ans en commençant maintenant avec le premier versement de \$5,000. Pour la deuxième option, on vous offre de payer la dette en un seul versement de \$23,000 dans exactement trois ans à partir de maintenant. Si on suppose que le taux d'intérêt est de 6% par année, composé de façon continue, quelle option de remboursement est le plus profitable ?

7.11.9 Test de l'intégrale

Question 7.36

Utilisez le test de l'intégrale pour déterminer si les séries suivantes converge ou diverge. Bien justifier que vous pouvez utiliser ce test.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n^2} \qquad \text{b) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$

Question 7.37

Utilisez le test de l'intégrale pour déterminer les valeurs de k pour lesquelles la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^k}$ converge.

Question 7.38

Démontrez que la séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}}$ converge et trouvez une petite valeur N pour que la somme

partielle $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{8/3}}$ soit une approximation de la valeur de la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}}$ avec une erreur inférieure à 10^{-3} .



Ce chapitre est d'une nature plus théorique que les chapitres précédents. Les séries entières vont nous permettre de définir plusieurs fonctions qui sont solutions d'équations différentielles, le sujet du chapitre 9 et qui est normalement étudié plus profondément après les premiers cours de calcul différentiel et intégral. Nous présentons dans ce chapitre plusieurs techniques pour déterminer si une série entière converge. Finalement, ceux pour qui la théorie les intéresse pourront apprécier la définition rigoureuse de la fonction e^x donnée dans la dernière section du chapitre.

8.1 Convergence des séries entières

Définition 8.1.1

Une **série entière au voisinage de** $c \in \mathbb{R}$ (ou **près de** c) est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n .$$

où $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de nombres réels. Les nombres a_n pour $n = 0, 1, 2, \dots$ sont appelés les **coefficients** de la série et $a_n(x-c)^n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ sont les **termes de la série**.

Pour chaque valeur de x , nous avons une série de nombres réels pour laquelle il faut déterminer la convergence.

Définition 8.1.2

Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

une série entière au voisinage de c . Nous disons que la série entière **converge** pour une valeur de x si la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n(x-c)^n$$

existe pour cette valeur de x . Nous dénotons cette limite par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. La somme

$\sum_{n=0}^k a_n(x-c)^n$ est une **somme partielle** de la série.

le contexte détermine si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ fait référence à la série entière où la limite de la série entière pour une valeur de x .

Selon la valeur de x , la série peut converger (absolument ou conditionnellement) ou diverger.

Exemple 8.1.3

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout x .

Les termes de cette série sont $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

pour tout x . Donc, par le test du quotient, la série converge absolument pour tout x . 

Exemple 8.1.4

Montrons que la série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-5)^n(x-2)^n}{n^2+1}$ converge absolument pour $9/5 < x < 11/5$.

Les termes de la série sont de la forme $a_n = \frac{(-5)^n(x-2)^n}{n^2+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}|x-2|^{n+1}/((n+1)^2+1)}{5^n|x-2|^n/(n^2+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5|x-2|(n^2+1)}{n^2+2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5|x-2|(1+1/n^2)}{1+2/n+2/n^2} = 5|x-2| < 1 \end{aligned}$$

pour $9/5 < x < 11/5$. Donc, par le test du quotient, la série converge absolument pour $9/5 < x < 11/5$. De plus, le test du quotient dit que la série diverge pour $x < 9/5$ et $x > 11/5$ car nous avons alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1.$$



À l'exemple précédent, nous avons montré que la série convergeait pour $|x-2| < 1/5$ et divergeait pour $|x-2| > 1/5$. Le théorème suivant confirme que c'est typique des séries entières.

Théorème 8.1.5

Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels et c un nombre réel. Soit que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ diverge pour toute valeur de $x \neq c$ ou il existe un nombre $R > 0$ ($R = \infty$ est admissible) tel que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge absolument pour $|x-c| < R$ et diverge pour $|x-c| > R$.

Remarque 8.1.6

Le théorème précédent ne dit rien au sujet de la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ pour $|x-c| = R$. Il faut utiliser les tests de convergence qui ont été présentés aux sections 2.2.1 et 2.2.2 pour déterminer la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ pour ces valeurs de x . ♠

Exemple 8.1.7 (Suite de l'exemple 8.1.4)

Nous avons montré que la série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-5)^n(x-2)^n}{n^2+1}$ convergeait pour $|x-2| < 1/5$ et divergeait pour $|x-2| > 1/5$. Avons-nous convergence pour $x = 9/5$ et $x = 11/5$?

Si $x = 9/5$, nous obtenons la série de termes positifs

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Cette dernière série converge car $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après la proposition 2.2.16.

Si $x = 11/5$, nous obtenons la série alternée

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Cette série satisfait le test des séries alternées et donc converge. En effet, c'est une série de la forme $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ avec $a_n = 1/(n^2+1)$. Nous avons $a_n > 0$ et $a_{n+1} < a_n$ pour tout n . De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. ♣

Définition 8.1.8

Le **rayon de convergence** d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ est le nombre R tel que la série converge pour $|x-c| < R$ et diverge pour $|x-c| > R$.

L'**intervalle de convergence** est $\left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \text{ converge} \right\}$.

Exemple 8.1.9 (Suite de l'exemple 8.1.7)

Le rayon de convergence de la série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-5)^n (x-2)^n}{n^2+1}$ est $1/5$ et l'intervalle de convergence est $\left[\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right]$. ♣

Le théorème suivant est une conséquence du test du quotient pour les séries de nombres.

Théorème 8.1.10

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ est donnée par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

si cette limite existe. Si la limite est 0, alors $R = \infty$.

Exemple 8.1.11

Trouvons le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} x^n. \quad (8.1.1)$$

C'est une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ où

$$a_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}.$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n+2)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}}{\frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n-2}{2n+1} \right| = 1,$$

le rayon de convergence de (8.1.1) est $R = 1$.

Pour $x = 1$, nous obtenons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}. \quad (8.1.2)$$

C'est une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où

$$a_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} = \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{2n}{2n-1} > 1$$

pour tout n . Puisque la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ des termes de la série ne tend pas vers 0, la série (8.1.2) ne converge pas.

Pour $x = -1$, nous obtenons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}. \quad (8.1.3)$$

C'est une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où

$$a_n = (-1)^n \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} = (-1)^n \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{2n}{2n-1}.$$

Donc $a_n > 1$ pour n pair et $a_n < -1$ pour n impair. Comme pour la série précédente, la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ des termes de la série ne converge pas vers 0. La série (8.1.3) ne converge donc pas.

L'intervalle de convergence est $] - 1, 1[$. ♣

8.2 Fonctions définies par des séries

Théorème 8.2.1

Considérons la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ dont le rayon de convergence est $R > 0$, et la fonction $f :]c-R, c+R[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n, \quad c-R < x < c+R.$$

Alors f est différentiable sur l'intervalle $]c-R, c+R[$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1}, \quad c-R < x < c+R. \quad (8.2.1)$$

Cette série converge au moins pour $c-R < x < c+R$.

De plus, si $c-R < a < b < c+R$, l'intégrale de f entre a à b existe et est donnée par

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1} \right) \Big|_{x=a}^b. \quad (8.2.2)$$

Cette série numérique converge.

Remarque 8.2.2

En d'autres mots, l'équation (8.2.1) dit que pour dériver une fonction donnée par une série

entière, il suffit de dériver chacun des termes de la série car

$$\frac{d}{dx} a_n (x - c)^n = n a_n (x - c)^{n-1} .$$

Alors que l'équation (8.2.2) dit que pour intégrer une fonction donnée par une série entière il suffit d'intégrer chacun des termes de la série car

$$\int_a^b a_n (x - c)^n dx = \frac{a_n}{n + 1} (x - c)^{n+1} \Big|_{x=a}^b .$$



Si nous remplaçons x par t , a par c et b par x dans l'équation (8.2.2), nous obtenons

$$\int_c^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n + 1} (t - c)^{n+1} \Big|_{t=c}^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n + 1} (x - c)^{n+1} .$$

Puisque $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ est une primitive de f , nous pouvons énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 8.2.3

Considérons la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ dont le rayon de convergence est $R > 0$, et la fonction $f :]c - R, c + R[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \quad , \quad c - R < x < c + R .$$

Une primitive de f sur l'intervalle $]c - R, c + R[$ est donnée par

$$\int f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n + 1} (x - c)^{n+1} + C$$

où C est une constante. La série précédente converge au moins pour $c - R < x < c + R$.

Exemple 8.2.4

La série géométrique que nous avons vu à l'exemple 2.2.7 est

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1 . \quad (8.2.3)$$

En dérivant des deux cotés, nous obtenons

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad , \quad |x| < 1 .$$

C'est une série convergente pour $|x| < 1$ qui représente la fonction $1/(1 - x)^2$ pour $|x| < 1$. En intégrant des deux cotés de (8.2.3), nous obtenons

$$-\ln |1 - x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C \quad , \quad |x| < 1 .$$

Pour $x = 0$, cette équation donne $0 = -\ln(1) = C$. Donc

$$\ln|1-x| = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

C'est une série convergente pour $|x| < 1$ qui représente la fonction $\ln|1-x|$ pour $|x| < 1$. ♣

8.3 Séries de Taylor et de MacLaurin

À la section 5.5, nous avons vu le théorème de Taylor qui, pour une fonction donnée, donne un polynôme qui permet d'estimer cette fonction. Plus précisément, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, f est $(k+1)$ fois différentiable sur $]a, b[$ où $k \geq 0$, et x et c sont dans l'intervalle $]a, b[$, alors il existe $\xi = \xi(k, c, x)$ entre x et c tel que

$$f(x) = p_k(x) + r_k(x), \quad (8.3.1)$$

où

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n \quad \text{et} \quad r_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x-c)^{k+1}. \quad (8.3.2)$$

Si f est infiniment différentiable, est-il vrai que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n \quad (8.3.3)$$

pour $x \in]a, b[$? Non, ce n'est pas toujours vrai. L'expression en (8.3.3) peut être fautive de plusieurs façons.

1. La série en (8.3.3) peut ne pas converger pour $x \neq c$.
2. La série en (8.3.3) peut converger pour certaines valeurs de x mais la limite de la série peut être différente de $f(x)$ à ces valeurs de x .

Exemple 8.3.1

Pour illustrer la deuxième cas où (8.3.3) peut être faux, considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

A partir de la définition de la dérivée d'une fonction, nous pouvons montrer que $\frac{d^n f}{dx^n}(0) = 0$ pour tout $n > 0$. Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

C'est une série qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. En fait, cette série converge vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$. Malheureusement, pour $x \neq 0$, cette série ne converge pas vers $f(x) \neq 0$. ♣

Exemple 8.3.2

Bien souvent l'intervalle de convergence de la série de Taylor est une fraction du domaine de la fonction. Considérons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

pour $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Puisque

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

nous avons que $f^{(n)}(0) = n!$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

C'est la série géométrique qui converge seulement pour $|x| < 1$ (l'exemple 2.2.7). Pour $|x| < 1$, la série converge bien vers $f(x)$ mais la fonction f est définie pour tout $x \neq 1$. 

Malgré les points négatifs que nous venons de soulever, l'expression (8.3.3) est très importante.

Définition 8.3.3

Soit $f;]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable. La **série de Taylor de f près de $c \in]a, b[$** est la série

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) (x-c)^n. \quad (8.3.4)$$

Lorsque $c = 0$, cette série est aussi appelée la **série de MacLaurin de f** .

Le symbole \sim indique seulement que la série est associée à la fonction f . Nous ne savons pas si la série converge ou si elle converge vers $f(x)$ pour $x \in]a, b[$ près de c .

Méthode 8.3.4

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable et $c \in]a, b[$. Pour déterminer si la série de Taylor de f près de c converge et si elle converge vers $f(x)$ pour $x \in]a, b[$ près de c , il faut démontrer que le reste $r_k(x)$ définie en (8.3.2) satisfait

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi(k, c, x)) (x-c)^{k+1} = 0$$

pour x près de c .

Remarque 8.3.5 

Le reste r_k pour le Théorème de Taylor, théorème 5.5.2, est aussi donné par la formule suivante.

$$r_k(x) = \frac{1}{k!} \int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt. \quad (8.3.5)$$

Le Théorème de Taylor est parfois présenté avec cette formule pour le reste.

La démonstration de la formule (8.3.5) est une suite d'intégrations par parties. Si f est suffisamment différentiable, alors

$$r_k(x) = \frac{1}{k!} \int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt = \int_c^x g(t)h'(t) dt$$

où $g(t) = \frac{(x-t)^k}{k!}$ et $h'(t) = f^{(k+1)}(t)$. Donc $g'(t) = -\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$, $h(t) = f^{(k)}(t)$ et

$$\begin{aligned} r_k(x) &= g(t)h(t) \Big|_c^x - \int_c^x g'(t)h(t) dt = \left(\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right) \Big|_c^x + \int_c^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt \\ &= -\frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(c) + \int_c^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt. \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Nous utilisons encore une fois la méthode d'intégration par parties. Nous avons

$$\int_c^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt = \int_c^x g(t)h'(t) dt$$

où $g(t) = \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$ et $h'(t) = f^{(k)}(t)$. Donc $g'(t) = -\frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!}$, $h(t) = f^{(k-1)}(t)$ et

$$\begin{aligned} \int_c^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt &= g(t)h(t) \Big|_c^x - \int_c^x g'(t)h(t) dt \\ &= \left(\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(t) \right) \Big|_c^x + \int_c^x \frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} f^{(k-1)}(t) dt \\ &= -\frac{(x-c)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(c) + \int_c^x \frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} f^{(k-1)}(t) dt. \end{aligned}$$

En combinant ce dernier résultat avec (8.3.6), nous obtenons

$$r_k(x) = -\frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(c) - \frac{(x-c)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(c) + \int_c^x \frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} f^{(k-1)}(t) dt.$$

Après k intégrations par parties, nous obtenons

$$r_k(x) = -\frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(c) - \frac{(x-c)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(c) - \dots - (x-c)f'(c) + \int_c^x f'(t) dt.$$

Puisque $\int_c^x f'(t) dt = f(x) - f(c)$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{(x-c)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(c) + \frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(c) + r_k(x). \end{aligned}$$

Pour la formule du reste donnée au théorème 5.5.2, supposons que $c < x$. La démonstration dans le cas $c > x$ est identique. Soit

$$m = \min\{f^{(k+1)}(t) : c \leq t \leq x\} \quad \text{et} \quad M = \max\{f^{(k+1)}(t) : c \leq t \leq x\} .$$

Nous avons donc

$$\frac{m}{k!} \int_c^x (x-t)^k dt \leq r_k(x) = \frac{1}{k!} \int_c^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt \leq \frac{M}{k!} \int_c^x (x-t)^k dt .$$

Ce qui donne

$$-\frac{m}{(k+1)!} (x-t)^{k+1} \Big|_c^x \leq r_k(x) \leq -\frac{M}{(k+1)!} (x-t)^{k+1} \Big|_c^x$$

et, plus précisément,

$$\frac{m}{(k+1)!} (x-c)^{k+1} \leq r_k(x) \leq \frac{M}{(k+1)!} (x-c)^{k+1} .$$

Finalement, nous avons

$$m \leq \frac{(k+1)!}{(x-c)^{k+1}} r_k(x) \leq M .$$

Le théorème des valeurs intermédiaires peut être utilisé pour trouver $\xi = \xi(k, c, x)$ entre c et x tel que

$$f^{(k+1)}(\xi) = \frac{(k+1)!}{(x-c)^{k+1}} r_k(x) .$$

Ainsi,

$$r_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x-c)^{k+1} .$$



Exemple 8.3.6

À l'exemple 8.3.2, nous avons vu que la série de MacLaurin de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. À l'exemple 2.2.7, nous avons aussi vu que cette série tend vers $f(x)$ pour $-1 < x < 1$.

Utilisons la formule du reste r_k donnée en (8.3.2) pour démontrer d'une autre façon que la série géométrique tend vers $f(x)$ pour x près de 0. En effet, puisque

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

nous avons que

$$|r_k(x)| = \left| \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) x^{k+1} \right| = \left| \frac{1}{(1-\xi)^{k+2}} x^{k+1} \right| = \frac{|x|^{k+1}}{|1-\xi|^{k+2}} .$$

Pour $-1 < x < 0$, nous avons que $\xi < 0$ car ξ est entre x et 0 pour tout k . Ainsi,

$$0 \leq |r_k(x)| = \frac{|x|^{k+1}}{|1 - \xi|^{k+2}} < |x|^{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty$$

car $|x| < 1$. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |r_k(x)| = 0 \quad \text{pour } -1 < x < 0.$$

Pour $0 \leq x < 1/2$, toujours en utilisant le fait que ξ est entre 0 et x , nous avons que

$$0 \leq \frac{|x|^{k+1}}{|1 - \xi|^{k+2}} < \frac{|x|^{k+1}}{|1 - x|^{k+2}} = \left(\frac{x}{1 - x}\right)^{k+1} \frac{1}{1 - x} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty$$

car

$$0 \leq \frac{x}{1 - x} < 1 \quad \text{pour } 0 \leq x < 1/2.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |r_k(x)| = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x < 1/2.$$

Démontrer à l'aide de la formule du reste que la série converge aussi pour $1/2 \leq x < 1$ demande une analyse plus poussée que nous ne ferons pas. ♣

Exemple 8.3.7

Trouvons la série de MacLaurin de $\cos(x)$ et montrons qu'elle converge vers $\cos(x)$ pour tout x . Nous allons faire de même pour $\sin(x)$.

i) Soit $f(x) = \cos(x)$. Puisque

$$f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f^{(4)}(x) = \cos(x) = f(x),$$

nous avons que

$$f^{(4m)}(x) = \cos(x), \quad f^{(4m+1)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(4m+2)}(x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad f^{(4m+3)}(x) = \sin(x)$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots$ Donc

$$f^{(4m)}(0) = \cos(0) = 1, \quad f^{(4m+1)}(0) = -\sin(0) = 0, \quad f^{(4m+2)}(0) = -\cos(0) = -1 \\ \text{et } f^{(4m+3)}(0) = \sin(0) = 0$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots$ En résumé, $f^{(n)}(0) = 0$ lorsque n est impaire, $f^{(n)}(0) = 1$ lorsque $n = 0, 4, 8, \dots$ et $f^{(n)}(0) = -1$ lorsque $n = 2, 6, 10, \dots$ La série de MacLaurin de $\cos(x)$ est donc

$$\cos(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Montrons que cette série converge vers $\cos(x)$ pour tout x en montrant que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) x^{k+1} = 0$$

pour tout x . Puisque $|f^{(k+1)}(\xi)| = |(-1)^{(k+1)/2} \cos(\xi)| \leq 1$ pour k impaire et $|f^{(k+1)}(\xi)| = |(-1)^{k/2+1} \sin(\xi)| \leq 1$ pour k pair, nous avons

$$0 \leq |r_k(x)| \leq \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty$$

quel que soit x (remarque 8.3.8 ci-dessous). Il découle du théorème des gendarmes que $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0$ pour tout x .

ii) Soit $g(x) = \sin(x)$. Puisque

$$g'(x) = \cos(x), \quad g''(x) = -\sin(x), \quad g^{(3)}(x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad g^{(4)}(x) = \sin(x) = g(x),$$

nous avons que

$$g^{(4m)}(x) = \sin(x), \quad g^{(4m+1)}(x) = \cos(x), \quad g^{(4m+2)}(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad g^{(4m+3)}(x) = -\cos(x)$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots$. Ainsi,

$$g^{(4m)}(0) = \sin(0) = 0, \quad g^{(4m+1)}(0) = \cos(0) = 1, \quad g^{(4m+2)}(0) = -\sin(0) = 0 \\ \text{et} \quad g^{(4m+3)}(0) = -\cos(0) = -1$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots$. En résumé, $g^{(n)}(0) = 0$ lorsque n est paire, $g^{(n)}(0) = 1$ lorsque $n = 1, 5, 9, \dots$ et $g^{(n)}(0) = -1$ lorsque $n = 3, 7, 11, \dots$. La série de MacLaurin de $\sin(x)$ est donc

$$\sin(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Montrons que cette série converge vers $\sin(x)$ pour tout x en montrant que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\xi) x^{k+1} = 0$$

pour tout x . Puisque $|g^{(k+1)}(\xi)| = |(-1)^{(k+1)/2} \sin(\xi)| \leq 1$ pour k impaire et $|g^{(k+1)}(\xi)| = |(-1)^{k/2} \cos(\xi)| \leq 1$ pour k pair, nous avons

$$0 \leq |r_k(x)| \leq \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty$$

quel que soit x (remarque 8.3.8 ci-dessous). Il découle du théorème des gendarmes que $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0$ pour tout x . 

Remarque 8.3.8

Dans l'exemple précédent, nous avons utilisé le fait que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \right| = 0$$

pour tout x . Pour démontrer ce résultat, il faut faire référence à l'exemple 8.1.3 où il a été démontré que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergeait pour tout x . Il découle du théorème 2.2.20 que le terme général $\frac{x^n}{n!}$ de la série tend vers 0 pour tout x lorsque n tend vers plus l'infini ; c'est-à-dire,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$



Exemple 8.3.9

Trouvons la série de Taylor de $f(x) = \sin(x)$ près de $\pi/4$ et montrons qu'elle converge vers $f(x)$ pour tout x .

Nous avons vu à l'exemple précédent que

$$f^{(4m)}(x) = \sin(x), \quad f^{(4m+1)}(x) = \cos(x), \quad f^{(4m+2)}(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad f^{(4m+3)}(x) = -\cos(x)$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{(4m)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f^{(4m+1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ f^{(4m+2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad f^{(4m+3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots$. Nous remarquons de plus que

$$\begin{aligned} n = 4m &\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4m(4m-1)}{2} = 2m(4m-1) \quad \text{est pair,} \\ n = 4m + 1 &\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4m+1)4m}{2} = 2m(4m+1) \quad \text{est pair,} \\ n = 4m + 2 &\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4m+2)(4m+1)}{2} = (2m+1)(4m-1) \quad \text{est impair et} \\ n = 4m + 3 &\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4m+3)(4m+2)}{2} = (4m+3)(2m+1) \quad \text{est impair.} \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\sin(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n.$$

Pour démontrer la convergence, nous montrons que le reste $r_k(x)$ dans le Théorème de Taylor tend vers 0 lorsque k tend vers plus l'infini quel que soit le choix de x ; c'est-à-dire,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) x^{k+1} = 0$$

pour tout x . Puisque $|f^{(k+1)}(\xi)| = |(-1)^{(k+1)/2} \sin(\xi)| \leq 1$ pour k impaire et $|f^{(k+1)}(\xi)| = |(-1)^{k/2} \cos(\xi)| \leq 1$ pour k pair, nous avons

$$0 \leq |r_k(x)| \leq \left| \frac{1}{(k+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{k+1} \right| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty$$

quel que soit x (remarque 8.3.8). ♣

Exemple 8.3.10

Trouvons la série de McLaurin de $f(x) = \ln(1-x)$ et montrons qu'elle converge vers $f(x)$ pour $|x| < 1/2$.

Nous avons

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{2}{(1-x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1-x)^4}, \dots$$

Par induction, nous pouvons montrer que

$$f^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}, \quad n > 0.$$

Puisque $f(0) = 0$ et $f^{(n)}(0) = -(n-1)!$ pour $x = 0$, nous avons

$$\ln(1-x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{(n-1)!}{n!} \right) x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Pour démontrer la convergence, il faut montrer que le reste $r_k(x)$ dans le Théorème de Taylor tend vers 0 lorsque k tend vers plus l'infini quel que soit $x \in]-1/2, 1/2[$; c'est-à-dire,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) x^{k+1} = 0$$

pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$. C'est une conséquence de la relation suivante.

$$0 \leq |r_k(x)| = \left| \frac{1}{k+1} \left(\frac{x}{1-\xi} \right)^{k+1} \right| \leq \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty \quad (8.3.7)$$

quel que soit $x \in]-1/2, 1/2[$. Pour obtenir l'inégalité en (8.3.7), nous remarquons que $|x| < 1/2 < 1 - \xi$ pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$ car ξ est entre 0 et x . ♣

Considérons une fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \text{pour } |x-c| < R$$

où $R > 0$. Est-ce que cette série est la série de Taylor de f près de c ? C'est à dire, est-ce que $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Nous avons

$$f(c) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \Big|_{x=c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k (x-c)^k \Big|_{x=c} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0) = a_0.$$

Grâce à la règle de dérivation des séries, nous avons que

$$f'(c) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1} \Big|_{x=c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n k a_k (x-c)^{k-1} \Big|_{x=c} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1) = a_1,$$

$$\begin{aligned}
f''(c) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-c)^{k-2} \Big|_{x=c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=2}^n k(k-1) a_k (x-c)^{k-2} \Big|_{x=c} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (2 a_2) = 2 a_2, \\
f^{(3)}(c) &= \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k (x-c)^{k-3} \Big|_{x=c} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) a_k (x-c)^{k-3} \Big|_{x=c} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 \times 2 a_3) = 3! a_3
\end{aligned}$$

et, en générale,

$$\begin{aligned}
f^{(m)}(c) &= \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2) \dots (k-m+1) a_k (x-c)^{k-m} \Big|_{x=c} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=m}^n k(k-1)(k-2) \dots (k-m+1) a_k (x-c)^{k-m} \Big|_{x=c} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (m! a_m) = m! a_m.
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Proposition 8.3.11

Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \text{pour } |x-c| < R$$

où $R > 0$. Alors

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En d'autres mots, la série qui définit la fonction f est la série de Taylor de f près de c . Un corollaire de la proposition précédente est le suivant.

Corollaire 8.3.12

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n \quad \text{pour } |x-c| < R$$

où $R > 0$, alors,

$$a_n = b_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En fait, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n \quad \text{pour } |x-c| < R,$$

alors

$$a_n = b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En d'autres mots, une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut avoir au plus une représentation en série entière près de c .

Ce dernier corollaire peut nous aider à trouver la série de Taylor de certaines fonction sans avoir à calculer une dérivée.

Exemple 8.3.13

Trouvons la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$.

La série géométrique est

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1.$$

Si $u = -x^3$, alors

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}, \quad |x| < 1.$$

C'est la série cherchée. ♣

Exemple 8.3.14

Trouvons la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \frac{1}{7+2x}$.

Remarquons que

$$f(x) = \frac{1}{7+2x} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{2x}{7}\right)} \right).$$

Si nous substituons $u = -2x/7$ dans la série géométrique

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1,$$

nous trouvons

$$f(x) = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2x}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{7^{n+1}} x^n, \quad \left|\frac{2x}{7}\right| < 1.$$

C'est la série cherchée. Elle converge vers $f(x)$ pour $|x| < 7/2$. ♣

Exemple 8.3.15

Soit $f(x) = \sin(x/3)$. Trouvons la série de MacLaurin de cette fonction et montrons que cette série converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si nous substituons $u = x/3$ dans la série de MacLaurin

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1} \quad \text{pour } u \in \mathbb{R},$$

nous trouvons

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1} (2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$



Exemple 8.3.16

Trouvons la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \frac{1}{(x-1)(1-2x)}$.

La méthode des fractions partielles nous permet d'exprimer f de la façon suivante.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(1-2x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{1-2x}$$

où A et B sont des constantes. Pour déterminer A et B , nous exprimons les fractions sur un dénominateur commun.

$$\frac{1}{(x-1)(1-2x)} = \frac{A(1-2x)}{(x-1)(1-2x)} + \frac{B(x-1)}{(1-2x)(x-1)}.$$

Les numérateurs de chaque coté de l'égalité doivent donc être égaux ; c'est-à-dire,

$$1 = A(1-2x) + B(x-1).$$

Si nous substituons $x = 1/2$ dans cette équation, nous trouvons $1 = -B/2$. Donc $B = -2$. De même, si nous substituons $x = 1$ dans cette équation, nous trouvons $1 = -A$. Donc $A = -1$. Nous avons ainsi que

$$f(x) = -\frac{1}{x-1} - \frac{2}{1-2x}.$$

Le premier terme peut être représenté par la série géométrique.

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

Pour trouver la série représentant le deuxième terme, nous utilisons encore la série géométrique

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1$$

avec $u = 2x$ pour obtenir

$$\frac{2}{1-2x} = 2 \left(\frac{1}{1-2x} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n, \quad |2x| < 1.$$

Cette dernière série converge pour $|x| < 1/2$ alors que la série pour le premier terme de f converge pour $|x| < 1$. Donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{n+1}) x^n, \quad |x| < 1/2.$$

Nous avons additionné les séries en additionnant les coefficients de x^n pour $n = 0, 1, 2, \dots$



Exemple 8.3.17

Si $f(x) = \frac{1}{(x-1)(1-2x)}$, quelle est la valeur de $f^{(100)}(0)$?

Nous avons vu à l'exemple précédent que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{n+1}) x^n \quad , \quad |x| < 1/2 .$$

Or, d'après le corollaire 8.3.12, le coefficient de x^{100} est

$$\frac{1}{100!} f^{(100)}(0) = (1 - 2^{101}) .$$

Donc

$$f^{(100)}(0) = 100! (1 - 2^{101}) .$$



Il est aussi possible d'utiliser les séries entières pour évaluer des intégrales.

Exemple 8.3.18

Évaluons l'intégrale $\int_0^{0.5} \cos(x^2) dx$ avec une précision de 10^{-8} .

La série de MacLaurin de $\cos(u)$ est

$$\cos(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} u^{2n} \quad , \quad u \in \mathbb{R} .$$

Si nous substituons $u = x^2$, nous trouvons

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (x^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n} \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \cos(x^2) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \int_0^{0.5} x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \Big|_0^{0.5} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{4n+1} (4n+1) (2n)!} . \end{aligned}$$

C'est une série alternée de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ où $a_n = \frac{1}{2^{4n+1} (4n+1) (2n)!}$. Notez que cette série satisfait le Test des séries alternées (i.e. le théorème 2.2.42), ce qui prouve qu'elle converge en accord avec la conclusion du théorème 8.2.1. De plus, si $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ et

$S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n$ est la N^e somme partiel, alors $|S - S_N| \leq a_{N+1}$.

La somme partiel S_N donnera une approximation de $\int_0^{0.5} \cos(x^2) dx$ avec une précision de 10^{-8} si nous choisissons N tel que $|S - S_N| \leq a_{N+1} < 10^{-8}$. Nous avons

$$a_{N+1} = a_3 = \frac{1}{13 \times 2^{13} \times 6!} \approx 1.3042 \times 10^{-8} \not< 10^{-8}$$

pour $N = 2$ et

$$a_{N+1} = a_4 = \frac{1}{17 \times 2^{17} \times 8!} \approx 1.1 \times 10^{-11} < 10^{-8}$$

pour $N = 3$. La somme partiel

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{n=0}^3 (-1)^n \frac{1}{2^{4n+1} (4n+1) (2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \times 2^5 \times 2!} + \frac{1}{9 \times 2^9 \times 4!} - \frac{1}{13 \times 2^{13} \times 6!} \\ &\approx 0.4968840292. \end{aligned}$$

est donc l'approximation cherchée. ♣

8.4 Série du binôme

Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$\binom{k}{0} = 1.$$

Si k est un entier non négatif, la **formule du binôme** est

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \dots + kx^{k-1} + x^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n. \quad (8.4.1)$$

Pour cette raison, $\binom{k}{n}$ est appelé un **coefficient du binôme**. Ceux qui auraient déjà étudié la combinatoire reconnaissent certainement le coefficient du binôme puisqu'il représente le nombre de possibilités de choisir n éléments d'un ensemble de k éléments distincts en ignorant l'ordre.

De plus, la série géométrique

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1,$$

avec $u = -x$ donne

$$(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^n, \quad |x| < 1,$$

car

$$\begin{aligned} \binom{-1}{n} &= \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\dots(-1-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n n!}{n!} = (-1)^n, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Qu'arrive-t-il si k est un nombre réel? Existe-t-il une formule semblable à la formule du binôme si k est un nombre réel quelconque? Le théorème suivant répond à ces questions.

Théorème 8.4.1 (Série du binôme)

Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n, \quad |x| < 1. \quad (8.4.2)$$

Remarque 8.4.2

La formule (8.4.1) où k est un entier non négatif est incluse dans la formule (8.4.2). En effet, si k est un entier positif,

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} = 0 \quad \text{pour } n > k$$

car un des facteurs au numérateur est nul. ♠

Démonstration (Théorème 8.4.1)

Soit $f(x) = (1+x)^k$ où $k \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(1+x)^{k-1}, \\ f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2}, \\ f^{(3)}(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3}, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Par induction, nous trouvons

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)(1+x)^{k-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La série de MacLaurin de f est donc

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n.$$

Montrons que cette série converge pour $|x| < 1$. Pour ce faire, nous calculons le rayon de convergence R . Nous avons une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où $a_n = \binom{k}{n}$. Donc

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n)}{(n+1)!}}{\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{k-n}{n+1} \right| = 1$$

et ainsi $R = 1$.

Il reste à montrer que la série du binôme converge bien vers $(1+x)^k$. Pour ce faire, nous ne prouverons pas que le reste $r_k(x)$ définie en (8.3.2) tend vers 0 lorsque k tend vers plus l'infini pour $x \in]-1, 1[$. Nous allons utiliser le fait que l'équation différentielle

$$(1+x)y' = k y \quad , \quad y(0) = 1 \quad (8.4.3)$$

à une unique solution près de l'origine.

Remarquons que $f(x) = (1+x)^k$ est une solution de (8.4.3) pour $|x| < 1$. De plus, si nous posons

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n \quad , \quad |x| < 1 \quad ,$$

nous avons que

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^{n-1} \quad , \quad |x| < 1 \quad .$$

Ainsi,

$$(1+x)g'(x) = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^n \quad , \quad |x| < 1 \quad .$$

Si nous remplaçons n par $m+1$ dans la première série, nous obtenons

$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m+1} (m+1) x^m + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^n \\ &= k + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{k}{m+1} (m+1) x^m + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^n \quad , \quad |x| < 1 \quad . \end{aligned}$$

Comme le nom m donné à l'indice de la première série est arbitraire, nous pouvons remplacer m par n dans cette série. Nous obtenons

$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) &= k + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n+1} (n+1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} n x^n \\ &= k + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{k}{n+1} (n+1) + \binom{k}{n} n \right) x^n \quad , \quad |x| < 1 \quad . \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 & \binom{k}{n+1} (n+1) + \binom{k}{n} n \\
 &= \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)!} (n+1) + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} n \\
 &= \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} (k-n) + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} n \\
 &= k \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} = k \binom{k}{n} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1+x)g'(x) = k + k \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = k g(x) \quad , \quad |x| < 1 .$$

Puisque $g(0) = 1$, nous avons que g est une solution de (8.4.3) pour $|x| < 1$. Par unicité des solutions $f(x) = g(x)$ pour $|x| < 1$; c'est-à-dire,

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n \quad , \quad |x| < 1 .$$

■

Exemple 8.4.3

Trouvons la série de MacLaurin de la fonction $\frac{x^2}{(1-x^3)^{1/2}}$.

Si nous substituons $u = -x^3$ et $k = -1/2$ dans la série du binôme

$$(1+u)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} u^n \quad , \quad |u| < 1 ,$$

nous trouvons

$$(1-x^3)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{3n} \quad , \quad |x| < 1 .$$

Or

$$\begin{aligned}
 (-1)^n \binom{-1/2}{n} &= (-1)^n \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right)}{n!} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \dots \left(\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} .
 \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - x^3)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^{3n}, \quad |x| < 1,$$

et

$$\frac{x^2}{(1 - x^3)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^{3n+2}, \quad |x| < 1.$$



8.5 Définition de l'exponentiel et de son inverse

Donnons une définition rigoureuse de b^x pour $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ dans le but d'illustrer le niveau de sophistication mathématique associé à b^x . Cette définition a l'avantage d'être mieux adaptée au calcul algébrique que la Définition 1.6.1.

La définition de b^x pour $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ requière la série entière de la fonction exponentielle e^x .

Proposition 8.5.1

Soit $E : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, la fonction définie par

$$E(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme nous avons démontré à l'aide du test de d'Alembert à l'exemple 8.1.3.

La fonction E possède les propriétés suivantes.

1. $E(0) = 1$.
2. $E(a + b) = E(a) E(b)$ pour tous nombres réels a et b .
3. $\frac{dE}{dx}(x) = E(x)$ pour tout x .

Définition 8.5.2

Le nombre e est définie par

$$e \equiv E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}.$$

Nous pouvons montrer que c'est le même nombre e que nous avons défini précédemment par la formule

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Le nombre e est irrationnel ; c'est-à-dire que e ne peut être écrit comme une fraction m/n avec m et n des entiers.

À l'aide des deux premières propriétés de la proposition précédente, nous pouvons vérifier que $e^x = E(x)$ pour x un nombre rationnel, Pour cette raison, et puisque E est continue et croissante, nous pouvons montrer que la définition suivante de e^x correspond à la Définition 1.6.1.

Définition 8.5.3

$$e^x \equiv E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Il découle de cette définition que e^x satisfait les propriétés des exposants : $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{xy} = (e^x)^y$, etc.

Définition 8.5.4

La fonction inverse de e^x est alors définie par

$$y = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

pour $x > 0$.

Nous pouvons montrer avec cette définition que $\ln(x)$ satisfait les propriétés des logarithmes : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(x^y) = y \ln(x)$, etc.

Définition 8.5.5

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, nous définissons b^x par

$$b^x \equiv e^{x \ln(b)}$$

Pour $x > 0$ et $b > 0$, nous définissons $\log_b(x)$ par

$$\log_b x \equiv \frac{\ln(x)}{\ln(b)} .$$

Ces définitions coïncident avec les définitions traditionnelles de b^x et $\log_b(x)$ respectivement. Par exemple, si x est un entier positif,

$$e^{x \ln(b)} = \underbrace{e^{\ln(b)} \times e^{\ln(b)} \times \dots \times e^{\ln(b)}}_{x \text{ fois}} = \underbrace{b \times b \times \dots \times b}_{x \text{ fois}} = b^x .$$

De plus, puisque $b^{1/\ln(b)} = e$ car

$$\ln(b^{1/\ln(b)}) = \frac{1}{\ln(b)} \ln(b) = 1 = \ln(e) ,$$

nous obtenons que

$$b^{\ln(x)/\ln(b)} = \left(b^{1/\ln(b)}\right)^{\ln(x)} = e^{\ln(x)} = x .$$

$\ln(x)/\ln(b)$ est donc bien l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir x .

Comme nous avons vu lors de l'étude de la dérivée des fonctions exponentielles, le nombre e joue un rôle très important en mathématiques. Comme le nombre π , le nombre e est une des valeurs fondamentales en mathématiques.

Exemple 8.5.6

Trouvons la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = (1+x)e^{-2x}$.

Si nous substituons $u = -2x$ dans la série

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n \quad , \quad u \in \mathbb{R} ,$$

nous obtenons

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Ainsi,

$$(1+x)e^{-2x} = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Si nous posons $m = n + 1$ dans la deuxième série, nous obtenons

$$(1+x)e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2)^{m-1}}{(m-1)!} x^m \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Notons que $m = 1$ lorsque $n = 0$. Comme le nom m de l'indice utilisé dans la deuxième série est arbitraire, nous pouvons remplacer m par n dans cette série. Nous obtenons

$$\begin{aligned} (1+x)e^{-2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-2)^n}{n!} + \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} \right) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} \binom{n-2}{n} x^n \end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.



8.6 Exercices

8.6.1 Convergence des séries entières

Question 8.1

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence des séries suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} & \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n} & \text{c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 \text{d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} (x+2)^n & \text{e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n 4^n} & \text{f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\
 \text{g)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x-1)^n}{\sqrt{n+1}} & \text{h)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x-1)^n}{3^n n^2} & \text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n (x+3)^n}{n} \\
 \text{j)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n^2} & \text{k)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}} &
 \end{array}$$

Question 8.2

Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence des séries suivantes :

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n^2}$$

Note : Nous ne pouvons pas utiliser directement le théorème 8.1.10. Il faut retourner à la source.

8.6.2 Fonctions définies par des séries**Question 8.3**

Utilisez la série géométrique pour déterminer le rayon de convergence, l'intervalle de convergence, et la somme de chacune des séries suivantes.

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \quad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$$

Question 8.4

Utilisez la série géométrique pour déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{n-1} x^{n+1}$ sur son intervalle de convergence ? Expliquez pourquoi nous ne pouvons pas utiliser la série géométrique pour déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de cette série ? Déterminez le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de cette série.

Question 8.5

La fonction $g(x)$ est définie par la série suivante.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{3^n} . \tag{8.6.1}$$

a) Quelle est le domaine de cette fonction ? En d'autres mots, qu'elle est l'intervalle de convergence de la série ?

b) Pouvons-nous calculer $g'(2)$? Si oui, calculez la valeur de $g'(2)$.

c) Trouvez la série qui représente $\int_0^2 g(x) dx$ si cela est possible. Justifiez si c'est possible.

Question 8.6

Donnez la série entière de la fonction $f(x) = \ln(1 + x^2)$ pour x près de l'origine. Quel est le rayon de convergence de cette série? Combien de termes de la série entière doivent être utilisés pour obtenir une approximation de $\ln(5/4)$ avec une précision d'au moins 5×10^{-5} (i.e. avec une erreur plus petite que 5×10^{-5})?

Note : Vous ne devez pas calculer $\ln(5/4)$ avec votre calculatrice pour comparer avec les sommes partielles.

Question 8.7

Utilisez la série de MacLaurin de chacune des fonctions suivantes pour calculer $\frac{d^9 f}{dx^9}(0)$.

$$\text{a) } f(x) = e^{x^3} \qquad \text{b) } f(x) = x^3 e^{x^2} \qquad \text{c) } f(x) = \frac{x}{4 + x^2}$$

Question 8.8

Trouvez les trois premiers termes non nuls de la série de MacLaurin de $f(x) = e^{x^2} \cos(x)$.

Question 8.9

Pour chacune des paires de fonctions $g(x)$, $f(x)$ ci-dessous, utilisez la série de Maclaurin de la fonction $g(x)$ pour obtenir la série de Maclaurin de la fonction $f(x)$.

$$\text{a) } g(x) = \sin(x) \text{ et } f(x) = \sin(2x^3) \qquad \text{b) } g(x) = \cos(x) \text{ et } f(x) = \sin^2(x)$$

Question 8.10

Trouvez les séries de MacLauren de $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$ et $\int f(x) dx$. Pour chaque série, donnez l'intervalle de convergence.

Question 8.11

Utilisez la série de MacLaurin de la fonction $\arctan(x)$ pour trouver la série de MacLaurin de la fonction $x^2 \arctan(x^2)$. Utilisez cette série pour obtenir une approximation de

$$\int_0^{0.5} x^2 \arctan(x^2) dx$$

avec une erreur inférieure à 10^{-6} .

Question 8.12

Exprimez sous la forme d'une série de MacLauren la fonction $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 4)^2}$ pour $|x| < 2$.

Question 8.13

Utilisez les séries de Taylor près de l'origine pour mettre en ordre croissance les fonctions suivantes.

$$\ln(1 + x^2) \quad , \quad \sin(x^2) \quad \text{et} \quad 1 - \cos(x)$$

Question 8.14

La figure ci-dessous contient le graphe de plusieurs fonctions. Utiliser les séries de Taylor près de l'origine pour associer chacune des fonctions suivantes à son graphe.

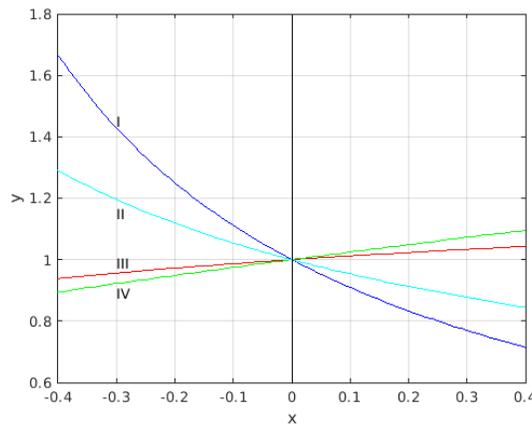
Suggestion : Il est possible de répondre à cette question avec l'approximation linéaire.

a) $\frac{1}{1+x}$

b) $(1+x)^{1/8}$

c) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

**8.6.3 Série du binôme****Question 8.15**

Si $(1+x^3)^{3/5} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, quelle est la valeur de b_6 ?

Question 8.16

Utilisez la série du binôme pour obtenir la série de MacLaurin de $f(x) = \sqrt{8+x^3}$.

Question 8.17

Utilisez la série du binôme pour obtenir la série de Maclaurin de $f(x) = (1+x^2)^{1/3}$.

Question 8.18

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

a) Utilisez la série du binôme pour obtenir la série de MacLaurin de f .

b) Utilisez la série que vous avez trouvée en (a) pour estimer $\int_0^{0.1} f(x) dx$ avec une précision de 10^{-8} (i.e. l'erreur est plus petite que 10^{-8}).



Équations différentielles



9

Les équations différentielles représentent un large domaine d'étude. Ce chapitre donne une très brève introduction au sujet. Nous définissons ce que sont les équations différentielles et nous donnons des conditions pour garantir l'existence de solutions pour ces équations. Résoudre les équations différentielles n'est pas toujours facile. Nous considérons seulement une famille d'équations différentielles, les équations séparables, pour lesquelles nous possédons une méthode de résolution simple. Il existe une énorme littérature sur les méthodes (analytiques et numériques) de résolution des équations différentielles car elles jouent un rôle fondamental en science et génie.

Pour les étudiants en sciences de la vie, nous présentons les méthodes d'études qualitatives des équations différentielles. Cela va servir d'introduction à l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles qui sera faite au chapitre 17. Nous présentons aussi quelques applications utiles pour les sciences physiques et le génie.

Nous terminons le chapitre avec une section qui présente une méthode numérique élémentaire simple pour « trouver » la solution d'une équation différentielle. Comme il est souvent difficile de résoudre analytiquement une équation différentielle, nous avons souvent recours aux méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles.

9.1 Introduction

Exemple 9.1.1 🌲

Un des plus simples modèles de croissance de population est celui où nous assumons que le taux de croissance (instantané) d'une population est proportionnel au nombre d'individus dans la population. Si $p(t)$ est le nombre d'individus au temps t , alors la supposition précédente se traduit mathématiquement par

$$p'(t) = kp(t)$$

pour tout t , où k est la constante de proportionnalité. La constante k est appelée le **taux de croissance relatif** car nous avons $k = \frac{p'(t)}{p(t)}$; le taux de croissance divisé par la taille de la population.

L'équation $p'(t) = kp(t)$ est ce que nous appelons une équation différentielle. C'est une équation qui contient une fonction et des dérivées de cette fonction.

Quelles sont les fonctions qui satisfont l'équation $p'(t) = k p(t)$ pour tout t ? La fonction $p(t) = C e^{kt}$, où C est une constante, satisfait cette équation car $p'(t) = kC e^{kt}$ et ainsi

$$p'(t) - k p(t) = kC e^{kt} - kC e^{kt} = 0$$

pour tout t . La fonction $p(t) = C e^{kt}$ est appelée une solution de l'équation différentielle $p'(t) = k p(t)$. 

Exemple 9.1.2

L'équation

$$g''(t) + 5g(t) = 0$$

est une autre équation différentielle.

La fonction $g(t) = \sin(\sqrt{5}t)$ est une solution de l'équation différentielle $g''(t) + 5g(t) = 0$ car $g'(t) = \sqrt{5} \cos(\sqrt{5}t)$ et $g''(t) = -5 \sin(\sqrt{5}t)$. Ainsi,

$$g''(t) + 5g(t) = -5 \sin(\sqrt{5}t) + 5 \sin(\sqrt{5}t) = 0$$

pour tout t . Vérifier que $g(t) = \cos(\sqrt{5}t)$ est aussi une solution de $g''(t) + 5g(t) = 0$. 

Combien de solutions peut avoir une équation différentielle? Nous avons vu que $\phi(t) = C e^{kt}$, où C est une constante arbitraire, est une solution de $p'(t) = k p(t)$. Nous trouvons donc un nombre infini de solutions, une pour chaque valeur de C . Nous montrerons prochainement que toutes les solutions de $p'(t) = k p(t)$ sont de cette forme. La possibilité d'avoir un nombre infini de solutions est en fait très bénéfique comme nous pouvons le constater dans l'exemple qui suit.

Exemple 9.1.3

Soit une population de bactéries ayant un taux de croissance relatif de 1.1. C'est-à-dire que $p'(t) = 1.1p(t)$ où $p(t)$ est le nombre de bactéries au temps t . Si nous supposons que le temps t est mesuré en heures et qu'initialement nous avons 10^5 bactéries, combien de bactéries aurons-nous après 2 heures?

Il faut trouver la fonction p qui satisfait l'équation différentielle $p'(t) = 1.1p(t)$ et la condition initiale $p(0) = 10^5$. Nous avons vu que $p(t) = C e^{1.1t}$ avec une constante arbitraire C est une solution de l'équation différentielle $p'(t) = 1.1p(t)$. La constante C est utilisée pour satisfaire la condition initiale $p(0) = 10^5$. Puisque $p(0) = C = 10^5$, la solution est donc $p(t) = 10^5 e^{1.1t}$.

À $t = 2$ heures, nous avons $p(2) = 10^5 e^{2.2} \approx 902,501$ bactéries. 

Il y a un type d'équations différentielles que nous pouvons résoudre à l'aide des techniques d'intégration que nous avons étudiées. Les équations de la forme

$$f'(t) = g(t) ,$$

où g est une fonction connue, sont des équations différentielles. L'intégrale de g nous donne la fonction f . Cette fonction f contient une constante d'intégration qui est utilisée pour satisfaire une condition initiale.

Exemple 9.1.4

Supposons que le taux instantané d'évaporation de l'eau contenu dans un lac soit décrit par

la formule $r(t) = \alpha t(24 - t)$ l/h où t en heures varie de 0 à 24 heures et $\alpha > 0$ est une constante qui peut dépendre de l'ensoleillement, du taux d'humidité dans l'air, etc. Plus la journée sera ensoleillée et sèche, plus α sera grand. Remarquons que le taux d'évaporation est nul à minuit (lorsque $t = 0$ ou 24 heures) et qu'il est maximal à midi (lorsque $t = 12$ heures).

Supposons qu'un ruisseau déverse β l/h d'eau dans le lac. La constante β dépend entre autres du niveau d'eau dans le ruisseau et qui peu être contrôlé par un barrage.

L'équation différentielle qui décrit le volume d'eau $V(t)$ dans le lac au temps t est

$$V'(t) = -\alpha t(24 - t) + \beta$$

pour $0 \leq t \leq 24$. Le signe négatif qui précède le terme $\alpha t(24 - t)$ indique une diminution du volume d'eau dans le lac dû à l'évaporation.

Nous allons résoudre cette équation différentielle. Comme nous verrons, la solution $V(t)$ dépendra des paramètres α et β . Si $\alpha = 1.1$, nous allons déterminer le nombre de litres d'eau par heure qui devront être déversés dans le lac par le ruisseau pour que le volume d'eau dans le lac à la fin de la journée soit le même qu'au début de la journée. La valeur de β peut être modifiée pour contrôler le niveau d'eau dans le lac.

$$\begin{aligned} V(t) &= \int (-\alpha t(24 - t) + \beta) dt = -24\alpha \int t dt + \alpha \int t^2 dt + \beta \int 1 dt \\ &= -12\alpha t^2 + \frac{\alpha t^3}{3} + \beta t + C, \end{aligned}$$

où C est la constante d'intégration. La valeur de C est déterminé par la condition initiale $V(0) = V_0$, la quantité initiale d'eau dans le lac. Si nous substituons $t = 0$ dans la solution ci-dessus, nous trouvons que $C = V_0$.

Pour déterminer la valeur de β qui fera que le volume d'eau dans le lac à la fin de la journée soit le même qu'au début de la journée, il faut résoudre pour β l'équation $V(0) = V(24)$ avec $\alpha = 1.1$. C'est-à-dire, il faut trouver β tel que

$$V_0 = -12 \times 1.1 \times 24^2 + \frac{1.1}{3} \times 24^3 + 24\beta + V_0.$$

Nous obtenons $\beta = 105.6$ l/h. ♣

Définition 9.1.5

Une **équation différentielle** est une équation de la forme

$$G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0, \quad a < x < b \quad (9.1.1)$$

où G est une équation de plusieurs variables et y est une fonction inconnue qui satisfait l'équation pour tout x dans l'intervalle $]a, b[$.

Le but est de trouver les fonctions y qui satisfont (9.1.1).

Exemple 9.1.6

L'équation $p'(t) = kp(t)$ est de la forme $G(t, p(t), p'(t)) = 0$. En effet, si $G(t, u_1, u_2) = u_2 - ku_1$, alors $G(t, p(t), p'(t)) = p'(t) - kp(t) = 0$ si et seulement si $p'(t) = kp(t)$. 

Exemple 9.1.7

L'équation

$$g''(t) + 5g(t) = 0 \quad (9.1.2)$$

est une équation différentielle car (9.1.2) est de la forme $G(t, g(t), g'(t), g''(t)) = 0$.

En effet, si $G(t, u_1, u_2, u_3) = u_3 + 5u_1$, alors $G(t, g(t), g'(t), g''(t)) = g''(t) + 5g(t) = 0$ si et seulement si $g''(t) + 5g(t) = 0$. 

Définition 9.1.8

Une fonction ϕ est une **solution** de l'équation différentielle (9.1.1) si cette équation est satisfaite pour tout x dans l'intervalle $]a, b[$ lorsque y est remplacé par ϕ .

Exemple 9.1.9

Les trois équations suivantes sont des équations différentielles pour la fonction inconnue y .

$$y'(x) = y(x), \quad (9.1.3)$$

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \quad (9.1.4)$$

et

$$y''(x) + 4y(x) = 5e^{-x}. \quad (9.1.5)$$

L'équation (9.1.3) est de la forme (9.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3) = u_3 - u_2$, l'équation (9.1.4) est de la forme (9.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_4 + 4u_3 + 4u_2$, et l'équation (9.1.5) est de la forme (9.1.1) si $G(u_1, u_2, u_3, u_4) = u_4 + 4u_2 - 5e^{-u_1}$.

La fonction $\phi(x) = e^x$ est une solution de (9.1.3) car

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x = \phi(x)$$

pour tout x .

La fonction $\phi(x) = e^{-2x}$ est une solution de (9.1.4) car

$$\phi''(x) + 4\phi'(x) + 4\phi(x) = \frac{d^2}{dx^2}(e^{-2x}) + 4\frac{d}{dx}(e^{-2x}) + 4e^{-2x} = 4e^{-2x} - 8e^{-2x} + 4e^{-2x} = 0$$

pour tout x . De même, $\phi(x) = xe^{-2x}$ est une solution de (9.1.4). En fait, on pourrait montrer que toutes les solutions de (9.1.4) sont de la forme $\phi(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$ où A et B sont des constantes. Il y a donc un nombre infini de solutions de (9.1.4).

Finalement, $\phi(x) = \cos(2x) + e^{-x}$ est une solution de (9.1.5) car

$$\phi''(x) + 4\phi(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\cos(2x) + e^{-x}) + 4(\cos(2x) + e^{-x})$$

$$= -4 \cos(2x) + e^{-x} + 4 \cos(2x) + 4e^{-x} = 5e^{-x}$$

pour tout x . De même, $\phi(x) = \sin(2x) + e^{-x}$ est une solution de (9.1.5) ainsi que toutes les fonctions de la forme $\phi(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x) + e^{-x}$ où A et B sont des constantes. ♣

Définition 9.1.10

L'ordre (ou degré) d'une équation différentielle est le degré maximal des dérivées qui apparaissent dans l'équation différentielle.

Ainsi, (9.1.3) est d'ordre un alors que (9.1.4) et (9.1.5) sont d'ordre deux.

L'étude des équations différentielles (i.e. trouver si une solution existe, trouver les solutions, décrire le comportement des solutions, etc) est un vaste domaine qui est toujours en évolution.

La prochaine section montre comment résoudre un type simple d'équations différentielles du premier ordre que nous appelons équations différentielles séparables.

9.2 Équations différentielles séparables

Définition 9.2.1

Une **équation différentielle séparable** est une équation différentielle de la forme

$$g(y(x))y'(x) = f(x) \quad (9.2.1)$$

où f et g sont deux fonctions.

Si nous intégrons par rapport à x des deux côtés de l'égalité, nous obtenons

$$\int g(y(x))y'(x) dx = \int f(x) dx .$$

L'intégrale du côté gauche de l'égalité est

$$\int g(y) dy$$

après la substitution $y = y(x)$ et $dy = y'(x) dx$. Nous obtenons donc

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx .$$

Si nous intégrons des deux côtés de l'égalité et résolvons pour y en fonction de x (si cela est possible), nous obtenons une famille de solutions paramétrées par la constante d'intégration.

Les équations différentielles de la forme (9.2.1) sont dites séparables car nous pouvons les réduire à une égalité où l'un des côtés dépend seulement de la variable dépendante et l'autre seulement de la variable indépendante.

Exemple 9.2.2

Trouvons une famille de solutions pour

$$y' = y^3 .$$

Il est commun de ne pas mentionner explicitement la dépendance de y par rapport à x . Ainsi, nous écrivons seulement y mais il faut sous-entendre $y(x)$.

Si nous séparons les variables, nous obtenons

$$\frac{y'}{y^3} = 1 .$$

Si nous intégrons par rapport à x des deux côtés de l'égalité, nous trouvons

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int \frac{y'(x)}{y^3(x)} dx = \int dx .$$

Ainsi,

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Si nous résolvons pour y en fonction de x , nous obtenons

$$y = \frac{1}{\sqrt{-2(x + C)}}$$

pour $x < -C$. Il y a une solution différente pour chaque valeur de C . ♣

Exemple 9.2.3

Trouvons une famille de solutions pour

$$x^3 y' + y = 0 . \tag{9.2.2}$$

Si nous séparons les variables, nous obtenons

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^3} .$$

Si nous intégrons par rapport à x , nous trouvons

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = -\int x^{-3} dx .$$

Ainsi,

$$\ln |y| = \frac{x^{-2}}{2} + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. En prenant l'exponentielle de chaque côté de l'égalité, nous obtenons

$$|y| = e^{1/(2x^2)+C} = e^C e^{1/(2x^2)} = D e^{1/(2x^2)}$$

où $D = e^C > 0$ est une constante. Donc

$$y = \pm D e^{1/(2x^2)} .$$

L'expression $\pm D$ avec $D > 0$ désigne une constante E qui peut être positive ou négative. En fait, nous pouvons aussi accepter que E soit nul car $y(x) = 0$ pour tout x est une solution de (9.2.2). Nous obtenons la famille de solutions

$$y = E e^{1/(2x^2)}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante. ♣

Nous pouvons spécifier une solution particulière de la famille de solutions d'une équation différentielle en ajoutant une condition initiale.

Définition 9.2.4

Une **condition initiale** pour une équation différentielle $G(x, y(x), y'(x)) = 0$ d'ordre un est une condition de la forme $y(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont des valeurs données.

Exemple 9.2.5

Trouvons la solution de l'équation différentielle

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

avec la condition initiale $y(0) = 1/2$.

Nous commençons par trouver la famille de solutions de l'équation différentielle. Si nous séparons les variables et intégrons par rapport à x , nous trouvons

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2(x)}} y'(x) dx = \int dx .$$

Ainsi,

$$\arcsin(y) = x + C . \tag{9.2.3}$$

Si nous substituons $x = 0$ et $y = 1/2$ dans (9.2.3), nous obtenons $\pi/6 = \arcsin(1/2) = 0 + C$. La condition initiale $y(0) = 1/2$ donne donc $C = \pi/6$. Nous obtenons la solution

$$y = \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) .$$

♣

Exemple 9.2.6

Trouvons la solution de l'équation différentielle

$$y e^{-x} y' = x$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Si nous séparons les variables et intégrons par rapport à x , nous obtenons

$$\int y \, dy = \int y(x)y'(x) \, dx = \int xe^x \, dx .$$

Ainsi,

$$\frac{y^2}{2} = xe^x - e^x + C .$$

La condition initiale $y(0) = 1$ donne $\frac{1}{2} = -1 + C$. Donc $C = \frac{3}{2}$ et nous obtenons la solution

$$y = \sqrt{2xe^x - 2e^x + 3} . \quad (9.2.4)$$

Notons que $y = -\sqrt{2xe^x - 2e^x + 3}$ est aussi une solution de l'équation différentielle mais elle ne satisfait pas $y(0) = 1$ car $y(0) = -1$ dans ce cas.

De plus, la solution en (9.2.4) est définie pour tout x car $g(x) = 2xe^x - 2e^x + 3 \geq 1$ pour tout x . Pour démontrer cela, il suffit de trouver le minimum absolu de g . Nous avons $g'(x) = 2xe^x$. Donc $g'(x) < 0$ pour $x < 0$, $g'(x) = 0$ à $x = 0$ et $g'(x) > 0$ pour $x > 0$. Donc g a un minimum absolu à $x = 0$ qui est $g(0) = 1$. 

Exemple 9.2.7

La loi de Newton pour la chaleur affirme que le taux de variation de la température d'un objet, qui se trouve dans un milieu où la température est constante, est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante.

Mathématiquement, la **loi de Newton** pour la chaleur affirme que

$$y'(t) = K(M - y(t)) \quad (9.2.5)$$

où $y(t)$ est la température d'un objet au temps t , M est la température ambiante du milieu où se trouve l'objet et K est une constante positive qui dépend de la conductivité thermique de l'objet et de sa surface exposée. La loi de Newton est valable si la différence de température entre la température ambiante et la température de l'objet n'est pas trop grande. Si y et M sont en degrés centigrades et t est en minutes alors les unités de la constante K sont des min^{-1} .

L'équation de la chaleur est séparable. Si nous séparons les variables et intégrons des deux côtés par rapport à t , nous trouvons

$$\int \frac{1}{M - y} \, dy = \int \frac{1}{M - y(t)} y'(t) \, dt = \int K \, dt .$$

Ainsi,

$$-\ln |M - y| = Kt + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. Si nous multiplions par -1 et prenons l'exponentielle des deux côtés, nous obtenons

$$|M - y| = e^{-Kt - C} = De^{-Kt}$$

où $D = e^{-C} > 0$ est une constante. Donc

$$y = M - \pm De^{-Kt}$$

où $\pm D$ désigne un nombre positif ou négatif que nous désignons par E . Comme E peut aussi être nul, car $y(t) = M$ pour tout t est une solution de (9.2.5), nous obtenons la famille de solutions

$$y = M - Ee^{-Kt}$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante qui est déterminée par la condition initiale.

Par exemple, si t est en minutes, $M = 10^\circ\text{C}$ et $K = 0.5 \text{ min}^{-1}$, nous obtenons

$$y = 10 - Ee^{-0.5t}.$$

Si nous supposons que la température de l'objet est de 30°C lorsque $t = 0 \text{ min.}$, alors E est déterminé par l'équation $30 = 10 - E$. Ainsi, $E = -20$ et la solution cherchée est

$$y = 10 + 20e^{-0.5t}.$$



9.3 Étude qualitative des équations différentielles (non-autonomes) ♣

Bien souvent il est très difficile et même « impossible » de trouver une solution analytique pour une équation différentielle. Il est alors préférable (et bien souvent suffisant) d'étudier le comportement qualitatif des solutions.

Considérons une équation différentielle de la forme

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad , \quad a < x < b, \quad (9.3.1)$$

où F est une fonction de deux variables. Soit $y(x)$, la solution de (9.3.1) qui passe par le point (x_1, y_1) ; c'est-à-dire que $y(x_1) = y_1$. Un graphe possible pour la solution y est tracé à la figure 9.1. La pente de la droite tangente au graphe de la solution y au point $(x_1, y(x_1)) = (x_1, y_1)$ est $y'(x_1) = F(x_1, y(x_1)) = F(x_1, y_1)$.

Sans connaître la solution qui passe par le point (x_1, y_1) , nous pouvons déterminer la direction de cette solution (i.e. la pente de la tangente au graphe de cette solution au point (x_1, y_1)) simplement en évaluant $F(x_1, y_1)$.

Nous pouvons donc déterminer l'aspect qualitatif des solutions à l'aide d'un **champ de pentes** pour l'équation différentielle. Pour dessiner un champ de pentes, nous choisissons un ensemble de points du plan x, y et, à chacun de ces points (x, y) , nous traçons une courte droite de pente $F(x, y)$. Nous présentons un champ de pentes possible pour (9.3.1) à la figure 9.2.

À la figure 9.2, si une solution passe dans une région où les courtes droites ont une pente positive, cette solution doit être croissante car la pente d'une droite tangente au graphe de cette solution en un point dans la région considérée doit aussi être positive (cette tangente doit être presque parallèle aux courtes droites dans son voisinage). De même, une solution qui

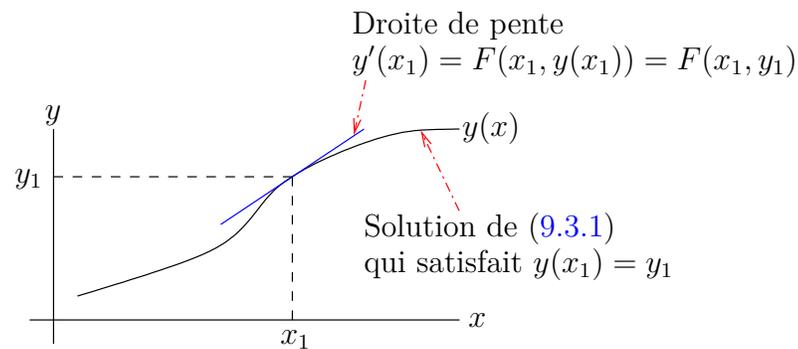


FIGURE 9.1 – Le graphe possible de la solution y de (9.3.1) qui passe par (x_1, y_1) .

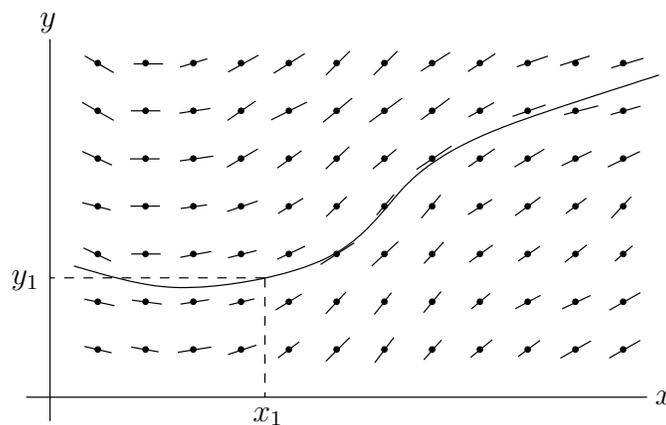


FIGURE 9.2 – Un champ de pentes possible pour (9.3.1)

passer dans une région où les courtes droites ont une pente négative doit être décroissante car la pente d'une droite tangente au graphe cette solution en un point dans la région considérée doit aussi être négative (cette tangente doit être presque parallèle aux courtes droites dans son voisinage).

Exemple 9.3.1

Dessignons un champ de pentes pour l'équation différentielle

$$y' = xe^{xy} . \quad (9.3.2)$$

Cette équation différentielle n'est pas séparable. Nous ne pouvons donc pas utiliser la méthode introduite précédemment pour trouver les solutions de (9.3.2).

Nous retrouvons le champ de pentes pour (9.3.2) à la figure 9.3. Quatre solutions ont été tracées : les solutions qui passent par $(0, -2)$, $(0, -1)$, $[0, 0]$ et $(-1, 1)$. Les solutions ont été tracées à l'aide d'une méthode numérique comme la méthode d'Euler que nous verrons dans une prochaine section. 

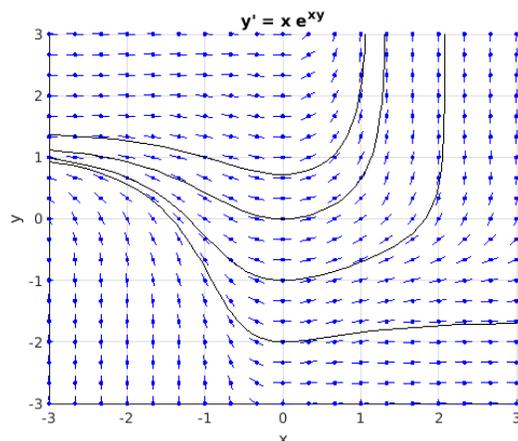


FIGURE 9.3 – Un champ de pentes pour l'équation différentielle en (9.3.2)

Exemple 9.3.2

Le champ de pentes associé à l'équation différentielle

$$y'(x) = (x - 1)^2 - y - 1 \quad (9.3.3)$$

est donné à la figure 9.4.

a) Est-ce que la solution qui passe par le point $(-1, 1)$ augmente lorsque $x = -1$? Lorsque $x = 1$?

Pour répondre à cet question, nous avons tracé à l'aide du champ de pentes le graphe possible de la solution qui passe par le point $(-1, 1)$. Ce graphe est inclus avec le champ de pentes à la figure 9.4. La solution est croissante à $x = -1$ alors qu'elle est décroissante à $x = 1$.

b) Existe-t-il une solution dont le graphe est une parabole ?

Cherchons une solution de la forme $y = ax^2 + bx + c$. Si nous substituons cette expression pour y dans l'équation différentielle, nous trouvons

$$2ax + b = (x - 1)^2 - (ax^2 + bx + c) - 1 = (1 - a)x^2 - (b + 2)x - c.$$

Si nous regroupons les constantes et les coefficients de x et de x^2 , nous obtenons

$$0 = (1 - a)x^2 - (b + 2 + 2a)x - (c + b).$$

Comme cette équation doit être satisfaite pour tout x , il faut que $1 - a = 0$, $b + 2 + 2a = 0$ et $c + b = 0$. Nous obtenons $a = 1$, $b = -4$ et $c = 4$. Il y a une seule solution dont le graphe est une parabole et cette solution est $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. C'est la solution qui passe par le point $(2, 0)$ que l'on retrouve avec le champ de pentes à la figure 9.4.

c) Quelles sont les valeurs de x_0 et y_0 pour que la solution qui passe par (x_0, y_0) ait un minimum à $x = x_0$?

La solution aura un minimum au point x_0 si $y'(x_0) = 0$ et $y''(x_0) > 0$.

Si nous dérivons (9.3.3) par rapport à x des deux côtés, nous obtenons

$$y'' = 2(x - 1) - y' = 2(x - 1) - ((x - 1)^2 - y - 1) = -x^2 + 4x - 2 + y .$$

Ainsi,

$$y'(x_0) = (x_0 - 1)^2 - y(x_0) - 1 \quad \text{et} \quad y''(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 - 2 + y(x_0) .$$

Nous déduisons de $y'(x_0) = 0$ que $y(x_0) = (x_0 - 1)^2 - 1 = x_0^2 - 2x_0$. Si nous substituons cette valeur de $y(x_0)$ dans l'équation pour y'' , nous obtenons

$$y''(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 - 2 + (x_0^2 - 2x_0) = 2x_0 - 2 = 2(x_0 - 1) .$$

Donc $y''(x_0) > 0$ pour $x_0 > 1$. Les solutions qui passent par les points $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2 - 2x_0)$ lorsque $x_0 > 1$ auront donc un minimum local en ce point.

d) Est-ce que pour tout x_0 il existe au moins une valeur y_0 pour laquelle la solution qui passe par (x_0, y_0) sera concave à $x = x_0$?

La solution sera concave au point x_0 si $y''(x_0) < 0$. Or, nous venons de montrer que

$$y''(x_0) = -x_0^2 + 4x_0 - 2 + y(x_0) .$$

Il suffit donc de prendre $y_0 = y(x_0)$ tel que $x_0^2 - 4x_0 + 2 > y_0$. Il existe donc au moins une valeur y_0 pour laquelle la solution qui passe par (x_0, y_0) est concave à $x = x_0$. 

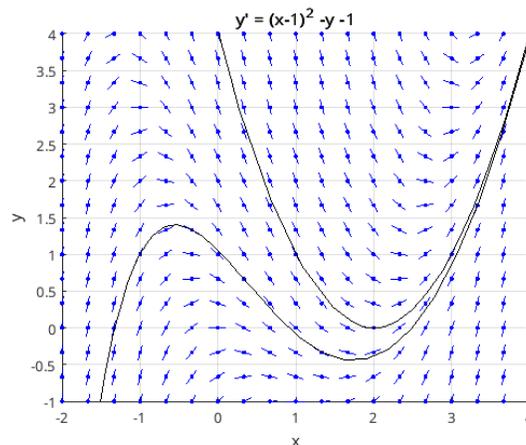


FIGURE 9.4 – Champ de pentes de l'équation différentielle $y' = (x - 1)^2 - y + 1$. e graphe de la solution qui satisfait $y(-1) = 1$ et celui de la solution qui satisfait $y(2) = 0$ sont aussi inclus.

9.4 Existence et unicé des solutions

Avant de continuer l'étude des équations différentielle, il faut donner des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicé des solutions. Il est inutile d'essayer de trouver une solution si la théorie nous dit qu'aucune solution existe.

Théorème 9.4.1 (Existence et Unicé)

Considérons l'équation différentielle

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad (9.4.1)$$

avec la condition initiale

$$y(x_0) = y_0 .$$

Soit

$$R = \{(x, y) : a < x < b \text{ et } -\infty < y < \infty\}$$

(figure 9.5). Si la fonction F est différentiable sur R et $(x_0, y_0) \in R$ alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle (9.4.1) avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

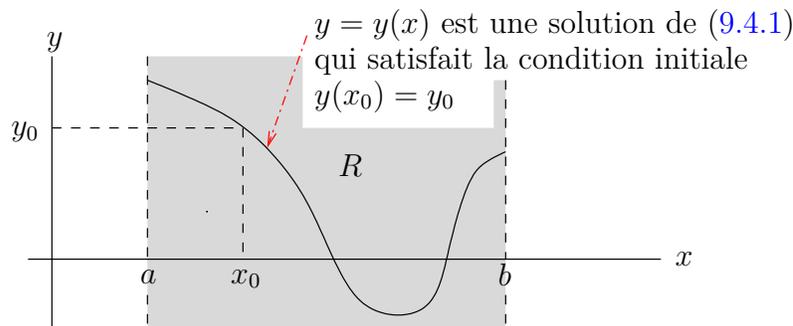


FIGURE 9.5 – Domaine d'existence et d'unicé des solutions avec le graphe de la solution qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$

Exemple 9.4.2

Existe-t-il une solution de l'équation différentielle

$$x y' = 2y \quad (9.4.2)$$

avec $y(0) = 1$?

Cette équation différentielle est séparable. Nous avons

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{2}{x} dx .$$

Ainsi,

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + C$$

où C est une constante d'intégration. En prenant l'exponentielle de chaque côté de l'égalité, nous obtenons $|y| = e^C x^2$. Nous avons donc que $y = \pm e^C x^2$. Si nous remplaçons $\pm e^C$ par une constante D , nous obtenons la famille de solutions

$$y = Dx^2$$

où D est une constante qui peut être nul car $y(x) = 0$ pour tout x est une solution. Cependant, la condition $y(0) = 1$ implique que $1 = 0$ quel que soit D . Il n'y a donc pas de solution qui puisse satisfaire $y(0) = 1$.

Si nous remplaçons la condition initiale par $y(0) = 0$, alors il y a un nombre infini de solutions pour (9.4.2) avec $y(0) = 0$. Toutes les solutions de la forme $y = Dx^2$ avec $D \in \mathbb{R}$ satisfont $y(0) = 0$.

Remarquons que (9.4.2) peut être écrite sous la forme $y' = F(x, y)$ où $F(x, y) = 2y/x$. Cette dernière fonction n'est pas différentiable par rapport à x à l'origine. 

Exemple 9.4.3

Trouvons la solution de l'équation différentielle

$$y' = y^2 - 4 \tag{9.4.3}$$

avec la condition initiale $y(0) = -2$.

Cette équation différentielle est séparable. Nous avons

$$\int \frac{1}{y^2 - 4} dy = \int \frac{1}{y^2(x) - 4} y'(x) dx = \int dx. \tag{9.4.4}$$

Pour évaluer l'intégrale en y , nous remarquons que

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y - 2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y + 2} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 - 4} dy &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{y - 2} dy - \frac{1}{4} \int \frac{1}{y + 2} dy = \frac{1}{4} \ln |y - 2| - \frac{1}{4} \ln |y + 2| + E \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| + E \end{aligned}$$

où E est une constante d'intégration. Il découle de (9.4.4) que

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| = x + C$$

où C est une constante. Si nous multiplions chacun des côtés de cette égalité par 4 et prenons l'exponentielle, nous obtenons

$$\left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| = e^{4C} e^{4x}.$$

Donc

$$\frac{y-2}{y+2} = De^{4x}$$

où $D = \pm e^{4C}$ est une constante réelle. Nous pouvons assumer que $D \in \mathbb{R}$ car $D = 0$ donne la solution constante $y(x) = 2$ pour tout x . Si nous résolvons pour y en fonction de x , nous trouvons

$$y = 2 \frac{1 + De^{4x}}{1 - De^{4x}}.$$

La condition $y(0) = -2$ donne

$$-2 = 2 \frac{1 + D}{1 - D}.$$

Donc $-2(1 - D) = 2(1 + D)$ et nous trouvons $-2 = 2$.

Il semble qu'il n'y ait pas de solution avec la condition initiale $y(0) = -2$. Cependant, (9.4.3) est de la forme $y' = F(x, y)$ avec $F(x, y) = y^2 - 4$. La fonction F est différentiable pour tout x et y . Le théorème d'existence et d'unicité des solutions nous dit qu'il doit y avoir une solution unique.

En fait, la solution est $y(x) = -2$ pour tout x . La méthode de séparation des variables ne peut pas être utilisée quand $y = 2$ ou $y = -2$ car $1/(y^2 - 4)$ donnerait une division par zéro. La méthode de séparation des variables ne donne donc pas toutes les solutions.

Il faut donc être **prudent** avec les méthodes de résolution des équations différentielles, elles peuvent ne pas donner toutes les solutions. 

9.5 Étude qualitative des équations différentielles autonomes

Les équations différentielles de la forme

$$y'(x) = F(y(x)) \quad , \quad a < x < b, \quad (9.5.1)$$

sont très fréquentes et possèdent des propriétés que les équations différentielles de la forme (9.3.1) n'ont pas. Remarquons que le côté droit de (9.5.1) ne dépend pas explicitement de x .

Définition 9.5.1

Une équation différentielle de la forme (9.5.1) (i.e. dont le côté droit ne dépend pas explicitement de x) est dite **autonome**.

9.5.1 Points d'équilibre

Certaines solutions d'une équation différentielle autonome jouent un rôle particulièrement important. C'est le cas des points d'équilibre.

Si $F(p) = 0$, alors $\phi(x) = p$ pour tout x est une solution de (9.5.1) car $\phi'(x) = 0$ et $F(\phi(x)) = F(p) = 0$ pour tout x .

Définition 9.5.2

Une solution constante de l'équation différentielle autonome (9.5.1) est appelée un **point d'équilibre** ou **état d'équilibre**.

Pour apprécier l'importance des points d'équilibre, il faut considérer le portrait de phases de l'équation différentielle (9.5.1). Le portrait de phases explique aussi pourquoi les solutions constantes sont appelées des points d'équilibre.

Définition 9.5.3

L'**orbite** d'une solution ϕ d'une équation différentielle autonome (9.5.1) est l'image

$$\{\phi(x) : a < x < b\}$$

de cette solution. C'est donc un ensemble de points que nous pouvons tracer sur la droite réelle (et auquel nous ajoutons une flèche pour indiquer la direction parcourue quand x augmente). Le **portrait de phases** d'une équation différentielle autonome est l'ensemble des orbites représentés sur la droite réelle.

Remarque 9.5.4

Une conséquence importante du théorème d'existence et d'unicité des solutions est que si R_1 est l'image d'une solution ϕ_1 et R_2 est l'image d'une solution ϕ_2 d'une équation différentielle autonome alors $R_1 = R_2$ ou $R_1 \cup R_2 = \emptyset$.

En effet, si $R_1 \cup R_2 \neq \emptyset$ alors ils existent x_1 et x_2 tels que $\phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)$. Si nous définissons la fonction ϕ_3 par $\phi_3(x) = \phi_2(x + x_2 - x_1)$ pour tout x , alors ϕ_3 est une solution de l'équation différentielle autonome (on laisse au lecteur le soin de vérifier cet énoncé) avec la même condition initiale que ϕ_1 car

$$\phi_3(x_1) = \phi_2(x_1 + x_2 - x_1) = \phi_2(x_2) = \phi_1(x_1) .$$

Il découle du théorème d'existence et d'unicité des solutions que $\phi_1(x) = \phi_3(x) = \phi_2(x + x_2 - x_1)$ pour tout x et ainsi $R_1 = R_2$. 

La meilleure façon de comprendre ce qu'est un portrait de phases est avec un exemple.

Exemple 9.5.5

Considérons la loi de Newton pour la chaleur que nous avons vu à l'exemple 9.2.7. C'est-à-dire,

$$y'(t) = F(y(t)) \equiv K(M - y(t)) \quad (9.5.2)$$

où $y(t)$ est la température d'un objet au temps t , M est la température du milieu où se trouve l'objet et K est une constante positive.

La fonction constante $\phi(t) = M$ pour tout t est un point d'équilibre pour la lois de Newton. Si nous substituons $y = M$ dans (9.5.2), nous obtenons 0 des deux côtés du signe d'égalité.

L'existence du point d'équilibre M ne devrait pas surprendre le lecteur car cela veut simplement dire que si l'objet est à la température du milieu alors sa température ne changera pas.

Nous donnons à la figure 9.6 le champ de pentes pour la loi de Newton dans le cas où $M = 10$ et $K = 0.5$. Nous pouvons voir que toute solution qui débute avec une valeur plus grande que 10 est décroissante alors que toute solution qui débute avec une valeur plus petite que 10 est croissante. Toutes les solutions approchent la droite $y = 10$ lorsque t tend vers plus l'infini.

Le portrait de phases pour la loi de Newton est donné à la figure 9.7. Il nous permet de visualiser facilement le comportement des solutions. Les flèches indiquent la direction parcourue quand t augmente. Toutes les solutions qui débutent avec une valeur initiale plus petite que 10 augmentent et approchent 10 alors que celles qui débutent avec une valeur initiale plus grande que 10 diminuent et approchent 10.

Puisque $y'(t) = F(y(t))$, le signe de $F(y)$ détermine si la solution $y(t)$ est croissante ou décroissante. Si $F(y(t)) > 0$, alors $y'(t) > 0$ et $y(t)$ est croissante. Si $F(y(t)) < 0$, alors $y'(t) < 0$ et $y(t)$ est décroissante. C'est l'information qui nous a permis de tracer le portrait de phases (figure 9.7) pour la loi de Newton. ♣

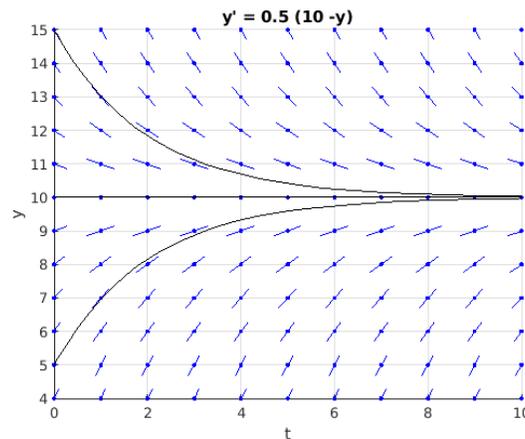


FIGURE 9.6 – Le champ de pentes pour la loi de Newton (9.5.2) avec $M = 10$ et $K = 0.5$. De plus, les graphes des solutions avec les conditions initiales $y(0) = 5$, $y(0) = 10$ et $y(0) = 15$ sont aussi inclus.

Remarque 9.5.6

Dans l'exemple précédent, serait-il possible qu'une solution ϕ qui débute avec une valeur plus grande que 10 à $t = 0$ atteigne une valeur plus petite que 10 pour une valeur positive de t ? Dans un milieu où la température est constante, il est intuitivement claire que si un objet débute à une température supérieure à celle du milieu, l'objet va refroidir en approchant de plus en plus la température du milieu. L'objet n'atteindra jamais une température inférieure à celle du milieu. Nous pouvons obtenir la même conclusion en utilisant des arguments pure-

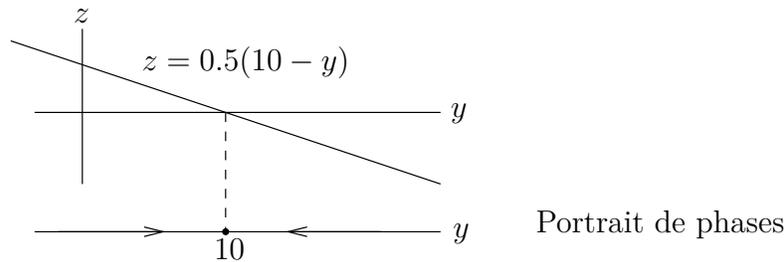


FIGURE 9.7 – Le portrait de phases pour l'équation différentielle (9.5.2) qui gouverne la loi de Newton pour la chaleur lorsque $M = 10$ et $K = 0.5$. Le graphe de $F(y) = K(M - y)$ pour $M = 10$ et $K = 0.5$ est aussi inclus.

ment mathématiques. Nous avons démontré à la remarque 9.5.4 que l'image d'une solution est soit identique à ou distincte de l'image d'une autre solution. Ainsi l'image d'une solution qui débute avec une valeur plus grande que 10 ne pourra jamais avoir la valeur 10 dans son image car 10 est l'image de la solution constante $y(t) = 10$ pour tout x . ♠

Définition 9.5.7

Un point d'équilibre p pour (9.5.1) est **stable** si toute solution de (9.5.1) avec une condition initiale assez près de p demeure près de p lorsque x augmente. Si p n'est pas stable, nous disons que p est **instable**.

Un point d'équilibre p pour (9.5.1) est **asymptotiquement stable** s'il est stable et de plus, toute solution de (9.5.1) avec une condition initiale assez près de p tend vers p lorsque x tend vers plus l'infini.

Exemple 9.5.8

Dans le cas de la loi de Newton pour la chaleur qui a été étudiée à l'exemple 9.5.5, le portrait de phases de l'équation différentielle (9.5.2) donné à la figure 9.7 montre que le point d'équilibre 10 est asymptotiquement stable. ♣

Il y a une façon simple de déterminer si un point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Théorème 9.5.9

Si p est un point d'équilibre de (9.5.1), alors p est asymptotiquement stable si $F'(p) < 0$. Si $F'(p) > 0$, le point d'équilibre est instable.

Exemple 9.5.10

L'équation différentielle pour la loi de Newton pour la chaleur est de la forme $y' = F(y)$ où $F(y) = K(M - y)$. Ainsi, $F'(M) = -K < 0$ et M est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Puisque $F'(M) < 0$ et $F(M) = 0$, nous avons que $F(y) > 0$ pour $y < M$ et $F(y) < 0$ pour $y > M$. C'est ce que nous retrouvons pour le graphe de la fonction F à la figure 9.7. ♣

Exemple 9.5.11

L'équation différentielle $y' = F(y) = (y - a)(y - b)$ où $a < b$ a deux points d'équilibre. Puisque $F'(y) = (y - b) + (y - a)$, nous avons que $F'(a) = a - b < 0$ et $F'(b) = b - a > 0$. Ainsi, a est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors que b est instable.

Nous retrouvons le portrait de phases du système $y' = F(y)$ à la figure 9.8. ♣

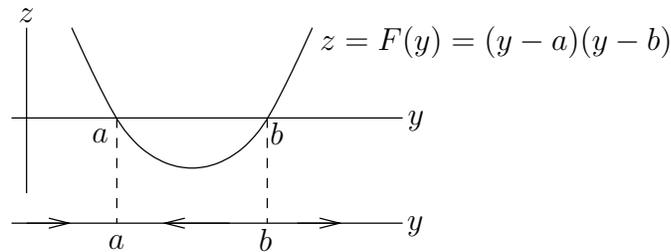


FIGURE 9.8 – Le portrait de phases de l'équation différentielle $y' = F(y)$. Le graphe de $F(y) = (y - a)(y - b)$ est aussi inclus.

Exemple 9.5.12

Considérons l'équation différentielle

$$y' = y^3 - 4y^2 - y + 4$$

Nous allons trouver les points d'équilibre, déterminer la stabilité de ces points d'équilibre à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre (théorème 9.5.9), tracer le portrait de phases, et finalement tracer la solution qui possède la condition initiale $y(0) = 3$.

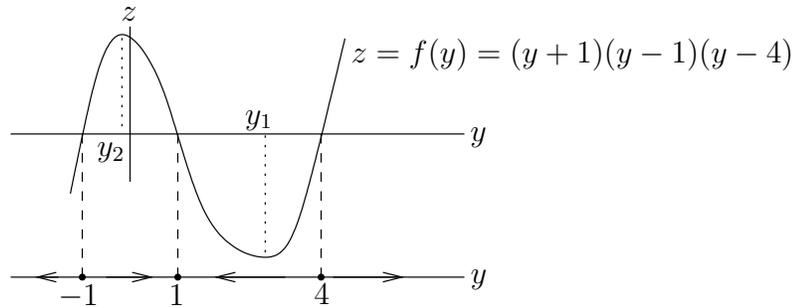
Nous avons l'équation différentielle $y' = f(y)$ où $f(y) = y^3 - 4y^2 - y + 4 = (y + 1)(y - 1)(y - 4)$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(y) = 0$. Nous obtenons trois points d'équilibre $y = -1$, $y = 1$ et $y = 4$.

Pour déterminer la stabilité des points d'équilibre à l'aide du théorème 9.5.9, il nous faut $f'(y) = 3y^2 - 8y - 1$. Puisque $f'(-1) = 10 > 0$, le point d'équilibre $y = -1$ est instable. Il en est de même pour le point d'équilibre $y = 4$ car $f'(4) = 15 > 0$. Par contre, le point d'équilibre $y = 1$ est stable car $f'(1) = -6 < 0$.

Le portrait de phases est

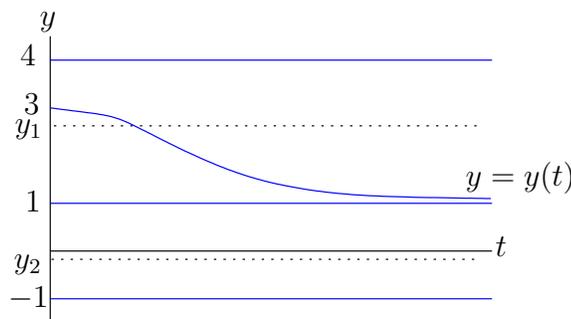


Pour déterminer la direction des flèches, nous pouvons utiliser la stabilité des points d'équilibre que nous avons trouvés ci-dessus ou le graphe de f ci-dessous.



Puisque $y' = f(y)$, nous avons que y augmente lorsque $f(y) > 0$ car $y' > 0$ alors que y diminue lorsque $f(y) < 0$ car $y' < 0$. Notons que f a un minimum local au point $y_1 \approx 2.7862996$ et un maximum local au point $y_2 \approx -0.119633$. Ce sont les points critiques de f ; c'est-à-dire, les solutions de $f'(y) = 3y^2 - 8y - 1 = 0$.

Finalement, nous utilisons le fait que la solution avec la condition initiale $y(0) = 3$ va se trouver entre 1 et 4. La solution est donc décroissante car $y' = f(y)$ est négative lorsque y est entre 1 et 4, et la solution tend vers 1 lorsque t tend vers plus l'infini. Nous obtenons le graphe suivant pour la solution ayant la condition initiale $y(0) = 3$.



Si nous regardons le graphe de la solution avec $y(0) = 3$, nous remarquons que la concavité change lorsque $y = y_1$. Pourquoi pouvons-nous dire cela? Pour comprendre pourquoi la concavité change, il faut regarder le graphe de la fonction f donné ci-dessus. À partir de $y = 4$, $f(y)$ devient de plus en plus négative lorsque y diminue jusqu'à ce que f atteigne son minimum local à $y = y_1$. Passé $y = y_1$, $f(y)$ devient de moins en moins négative, mais toujours négative, et approche 0 lorsque y approche 1. La pente $y' = f(y)$ de y diminue donc lorsque y approche y_1 par la droite et augmente après avoir passé y_1 . Ce que nous venons de d'écrire est un point d'inflexion pour y ; la pente y' diminue puis augmente lorsque t augmente. La concavité du graphe de la solution change à $y = y_1$.

Le graphe d'une solution a donc un point d'inflexion lorsque f atteint un minimum local. Un raisonnement semblable montre que c'est aussi vrai lorsque f atteint un maximum local.



9.5.2 L'équation logistique

Un modèle mathématique simple pour décrire une population animale est donné par l'équation différentielle

$$y'(t) = ky(t) \quad (9.5.3)$$

où $y(t)$ est le nombre d'individus dans la population au temps t et k est le **taux de croissance relatif** de la population. C'est-à-dire, k est la constante de proportionnalité entre le **taux de croissance (absolu)** de la population (i.e. y') et la taille de la population (i.e. y).

Dans le modèle précédent, nous devons assumer que la population animale est très grande pour justifier l'utilisation de fonctions continues pour décrire cette population. Nous pouvons aussi assumer que $y(t)$ donne le nombre moyen d'individus par unité d'aire ou de volume.

L'équation différentielle (9.5.3) est séparable. Nous avons

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{y(t)} y'(t) dt = \int k dt$$

Ainsi,

$$\ln |y| = kt + C$$

où C est une constante. Si nous résolvons pour y , nous trouvons

$$y = \pm e^C e^{kt}$$

où $\pm e^C$ désigne un nombre positif ou négatif que nous représentons par la lettre E . Nous obtenons donc la solution

$$y = Ee^{kt} \quad (9.5.4)$$

où $E \in \mathbb{R}$ est une constante car $E = 0$ est aussi acceptable puisque que cela donne la solution trivial $y(t) = 0$ pour tout t .

Pour $k > 0$, ce modèle est valide pour une courte période de temps (en particulier pour les populations de bactéries qui augmentent très rapidement au début de leur période de croissance) mais n'est pas valide lorsque t tend vers plus l'infini car nous aurions que $y(t)$ (la population au temps t) augmente sans borne supérieure.

Nous devons donc modifier le modèle précédent pour tenir compte du nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.

Soit M , le nombre maximal d'individus qu'un milieu peut supporter. Le **modèle logistique** de croissance d'une population est donné par l'équation différentielle autonome

$$y'(t) = ky(t) \left(1 - \frac{y(t)}{M} \right) \quad (9.5.5)$$

où $y(t)$ est le nombre d'individus au temps t (bien souvent par unité d'aire ou de volume) et k est le taux de croissance relatif de la population s'il n'y a pas de contraintes imposées par le milieu ; c'est le cas de l'équation différentielle (9.5.3).

La solution constante $y(t) = M$ pour tout t est un point d'équilibre pour (9.5.5). Il en est de même pour la solution constante $y(t) = 0$ pour tout t . L'équation logistique est de

la forme $y' = F(y)$ où $F(y) = ky(1 - y/M)$. Puisque $F'(y) = k - 2ky/M$, nous avons $F'(M) = -k < 0$ et $F'(0) = k > 0$. Ainsi, M est un point d'équilibre asymptotiquement stable et 0 est un point d'équilibre instable.

Nous pouvons aussi déterminer la stabilité des points d'équilibre directement à partir de l'équation différentielle (9.5.5). Si le nombre d'individus $y(t)$ est initialement supérieur à M alors $y'(t) = ky(t)(1 - y(t)/M) < 0$ pour $t \geq 0$ et y est une fonction décroissante qui approche le point d'équilibre M . Par contre, si le nombre d'individus $y(0)$ est initialement inférieur à M (et supérieure à 0) alors $y'(t) = ky(t)(1 - y(t)/M) > 0$ pour $t \geq 0$ et y est une fonction croissante qui approche le point d'équilibre M .

Nous retrouvons à la figure 9.9 le champ de pentes¹ pour l'équation logistique (9.5.5) lorsque $k = 0.8$ et $M = 5$. Nous assumons que $y(t)$ est le nombre d'individus par unité d'aire (e.g. par km^2) ou de volume (e.g. par cm^3) au temps t .

Le portrait de phases de l'équation logistique est donné à la figure 9.10. Toutes les solutions qui débutent avec une valeur positive plus petite que 5 augmentent et approchent 5 alors que celles qui débutent avec une valeur plus grande que 5 diminuent et approchent 5. Le point d'équilibre 5 est asymptotiquement stable.

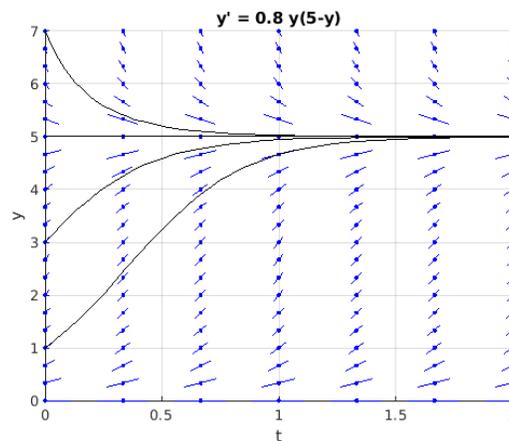


FIGURE 9.9 – Le champ de pentes pour l'équation logistique (9.5.5) où $M = 5$ et $k = 0.8$. Ce champ de pentes contient aussi les graphes des solutions avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y(0) = 3$, $y(0) = 5$ et $y(0) = 7$.

La solution avec la condition initiale $y(0) = 1$ possède un point d'inflexion. Nous pouvons déterminer la valeur de y où la solution a un point d'inflexion en cherchant les valeurs de y où $F(y) = ky(1 - y/M)$ a un maximum ou un minimum local. Le graphe de $F(y)$ est une

1. Les segments de droites que nous traçons pour produire le champ de pentes sont de même longueur. Cependant, comme l'axe horizontal et l'axe vertical n'utilisent pas la même échelle, l'axe horizontal va seulement de 0 à 2 alors que l'axe vertical va de 0 à 7, les segments paraissent de moins en moins longs lorsque la pente augmente. Si nous avons utilisé la même échelle pour les deux axes, les solutions auraient convergé trop rapidement vers $y = 5$.

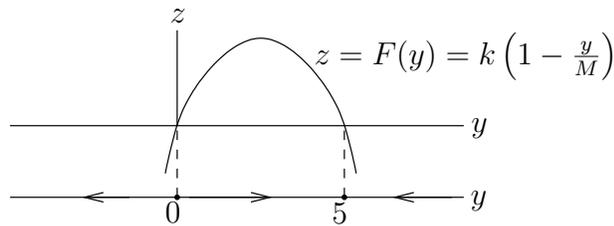


FIGURE 9.10 – Le portrait de phases de l'équation logistique (9.5.5) où $M = 5$ et $k = 0.8$. Le graphe de $F(y) = ky(1 - y/M)$ est inclus pour nous aider à déterminer les régions où y est croissante et celles où y est décroissante.

parabole concave vers le bas car le coefficient de y^2 est $-k/M < 0$. Comme les racines du polynôme $ky(1 - y/M)$ sont $y = 0$ et $y = M$, ce polynôme a un seul maximum local (qui est aussi un maximum global) au point $y = M/2$. Donc, lorsque la solution $y(t)$ passe d'une valeur plus petite que $M/2$ à une valeur plus grande que $M/2$, $y'(t) = F(y(t))$ augmente pour atteindre son maximum lorsque $y(t) = M/2$ puis diminue.

Lorsque $M = 5$, la solution avec la condition initiale $y(0) = 1$ (figure 9.9) a un point d'inflexion lorsque $y = 2.5$. Les solutions qui traversent la droite $y = 2.5$ ont un point d'inflexion au temps t lorsqu'elles coupent la droite $y = 2.5$. Les solutions qui ne coupent pas la droite $y = 2.5$ n'ont pas de point d'inflexion.

Sans résoudre l'équation logistique, nous avons été capable de tirer les conclusions les plus importantes de cette équation. Nous pouvons résoudre l'équation logistique car c'est une équation séparable.

Si nous séparons les variables de (9.5.5) et intégrons par rapport à t , nous obtenons

$$M \int \frac{1}{y(M-y)} dy = M \int \frac{1}{y(t)(M-y(t))} y'(t) dt = \int k dt. \quad (9.5.6)$$

Pour calculer l'intégrale à gauche, il faut utiliser la méthode des fractions partielles. Puisque

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(M-y)} dy &= \frac{1}{M} \int \frac{1}{y} dy + \frac{1}{M} \int \frac{1}{M-y} dy = \frac{1}{M} (\ln |y| - \ln |M-y|) \\ &= \frac{1}{M} \ln \left| \frac{y}{M-y} \right| + E, \end{aligned}$$

où E est une constante. Ainsi, (9.5.6) donne

$$\ln \left| \frac{y}{M-y} \right| = kt + C$$

où C est une constante. Si nous prenons l'exponentielle des deux côtés, nous trouvons

$$\left| \frac{y}{M-y} \right| = e^C e^{kt}$$

et ainsi

$$\frac{y}{M-y} = D e^{kt}$$

où $D = \pm e^C$. En fait, nous pouvons simplement assumer que $D \in \mathbb{R}$ car $D = 0$ est aussi acceptable et donne la solution $y = 0$. Si nous résolvons pour y , nous trouvons

$$y = \frac{M D e^{kt}}{1 + D e^{kt}} .$$

Il y a une solution qui n'est pas donnée par cette formule. La solution $y(t) = M$ pour tout t n'est pas donnée par cette formule. La constante D est déterminée par la condition initiale.

Exemple 9.5.13

Un lac peut supporter 100 truites par km^2 . Nous ensemençons le lac avec 10 truites par km^2 . Un an plus tard, nous comptons 20 truites par km^2 . Combien de truites par km^2 y aura-t-il dans le lac après 5 ans ? Combien d'années faut-il avant d'atteindre $3/4$ de la population de truites que le lac peut supporter ?

Si nous assumons que le nombre $y(t)$ de truites par km^2 au temps t en années est gouverné par le modèle logistique avec $M = 100$ donnée dans l'énoncé du problème, alors

$$y(t) = \frac{100 D e^{kt}}{1 + D e^{kt}} .$$

La condition initiale $y(0) = 10$ donne

$$10 = \frac{100 D}{1 + D} .$$

Ainsi, $D = 1/9$. Pour déterminer k , nous utilisons l'information $y(1) = 20$ donnée dans l'énoncé du problème pour obtenir

$$20 = \frac{100(1/9)e^k}{1 + (1/9)e^k} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{e^k}{9 + e^k} \Rightarrow 9 + e^k = 5e^k \Rightarrow e^k = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{9}{4}\right) .$$

Nous avons donc

$$y(t) = \frac{100 e^{t \ln(9/4)}}{9 + e^{t \ln(9/4)}} .$$

La réponse à la première question est

$$y(5) = \frac{100 e^{5 \ln(9/4)}}{9 + e^{5 \ln(9/4)}} = \frac{100(9/4)^5}{9 + (9/4)^5} \approx 86.4997$$

ou approximativement 86.5 truites par km^2 .

Pour répondre à la seconde question, il faut trouver t tel que

$$75 = \frac{100e^{t \ln(9/4)}}{9 + e^{t \ln(9/4)}}.$$

Si nous résolvons pour t , nous trouvons

$$t = \frac{3 \ln(3)}{\ln(9/4)} = 4.0643 \text{ ans};$$

soit un peu plus de 4 ans. ♣

9.6 Applications aux sciences physiques, biologiques et économiques

Exemple 9.6.1 🌲

La diffusion d'une substance chimique au travers de la paroi d'une cellule est gouvernée par une équation différentielle semblable à celle de la loi de Newton pour la chaleur. En effet, le taux de variation de la concentration d'une substance chimique à l'intérieure d'une cellule est proportionnel à la différence de concentration de cette substance chimique à l'intérieure et à l'extérieure de la cellule.

Dans le modèle le plus simple, la proportionnalité est constante et dépend de la substance chimique et du type de membrane qui forme la paroi de la cellule. De plus, nous assumons qu'il n'est pas plus difficile pour la substance chimique de sortie de la cellule que d'y entrer.

Si $C_i(t)$ est la concentration au temps t de la substance chimique à l'intérieure de la cellule et $C_o(t)$ est la concentration au temps t de cette même substance chimique à l'extérieure de la cellule, alors

$$C'_i(t) = K(C_o(t) - C_i(t))$$

où K est une constante positive.

Dans la majorité des situations, les cellules baignent dans un vaste milieu. Nous pouvons donc supposer que la concentration C_o de la substance chimique à l'extérieure de la cellule est constante – La quantité de substance chimique à l'intérieure de la cellule représente une infime partie de la quantité à l'extérieur de la cellule.

Un modèle un peu plus compliqué tient compte du fait qu'il est généralement plus facile pour la substance chimique de sortir de la cellule que d'y entrer. Ainsi, il y a deux constantes $K_i > K_o$ telles que

$$C'_i(t) = K_o C_o - K_i C_i(t).$$

Finalement, un modèle plus précis va tenir compte du fait que K_o n'est pas une constante mais une fonction de la concentration $C_i(t)$ au temps t . Plus la concentration de la substance chimique dans la cellule est grande, plus il devient difficile pour la substance chimique d'entrer

dans la cellule. Si C_m est la concentration maximale de la substance chimique que nous pouvons retrouver dans la cellule, alors

$$C_i'(t) = K_u(C_m - C_i(t))C_o - K_i C_i(t)$$

où K_u est une nouvelle constante et $0 \leq C_i(t) \leq C_m$.

En général, nous normalisons la concentration de la substance chimique dans la cellule ; c'est-à-dire que nous remplaçons $C(t)$ par $C(t)/C_m$. Si nous divisons l'équation différentielle précédente par C_m , nous obtenons

$$\frac{C_i'(t)}{C_m} = K_u \left(1 - \frac{C_i(t)}{C_m} \right) C_o - K_i \frac{C_i(t)}{C_m}.$$

Si $q(t) = C(t)/C_m$ pour tout t , alors

$$q'(t) = K_u(1 - q(t))C_o - K_i q(t) = K_u C_o - (K_u C_o + K_i)q(t)$$

où $0 \leq q(t) \leq 1$ pour tout t . 

Exemple 9.6.2

Un modèle pour la propagation d'une maladie infectieuse causée par un microbe est donné par l'équation différentielle

$$m'(t) = \alpha m(t)(1 - m(t)) - \beta m(t) \quad (9.6.1)$$

où $m(t)$ est la fraction de la population totale qui est porteur du microbe au temps t . Assumons qu'il n'y a pas d'individus qui puissent être porteur du microbe sans être malade. Pour étudier un tel problème, il faudrait deux inconnus et deux équations différentielles. C'est un sujet que nous aborderons prochainement.

Le premier terme du côté droit de l'équation (9.6.1) représente le taux auquel le microbe est transmis des individus qui sont malades à ceux qui ne le sont pas. Le produit $m(t)(1 - m(t))$ représente les contacts entre les individus malades et ceux qui ne le sont pas. La constante positive α est déterminée en tenant compte de la vitesse et de la facilité à laquelle le microbe est transmis d'un individu à un autre.

Le deuxième terme du côté droit de l'équation (9.6.1) représente le taux auquel les individus guérissent. La constante positive β est déterminée par la rapidité à laquelle les individus malades guérissent.

Il y a deux points d'équilibre pour (9.6.1). Si $0 = \alpha m(1 - m) - \beta m$, nous trouvons $m = 0$ et $m = 1 - \beta/\alpha$.

Lorsque $\beta > \alpha$, le graphe de $y = \alpha m(1 - m) - \beta m$ ainsi que le portrait de phases de (9.6.1) qui en découle ont la forme de ceux représentés à la figure 9.11. Nous considérons seulement les valeurs positives de $m(t)$ car $m(t) < 0$ n'a pas de sens réel. La fraction $m(t)$ de la population qui est malade tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Ainsi, la maladie va disparaître. Puisque $\beta > \alpha$, le taux de guérison est supérieur au taux auquel la maladie est transmise. Il n'est pas nécessaire d'éliminer le taux de propagation de la maladie (i.e. d'avoir

$\alpha = 0$) pour « enrayer » la maladie. Lorsque $\beta < \alpha$, le graphe de $y = \alpha m(1 - m) - \beta m$ ainsi que le portrait de phases de (9.6.1) qui en découle ont la forme de ceux représentés à la figure 9.12. Comme précédemment, nous considérons seulement les valeurs positives de $m(t)$. La fraction $m(t)$ de la population qui est malade tend vers $1 - \beta/\alpha$ lorsque t tend vers l'infini. Ainsi, la maladie ne disparaîtra pas mais affectera à long terme une fraction $1 - \beta/\alpha$ de la population. Nous disons que la maladie est **endémique**. ♣

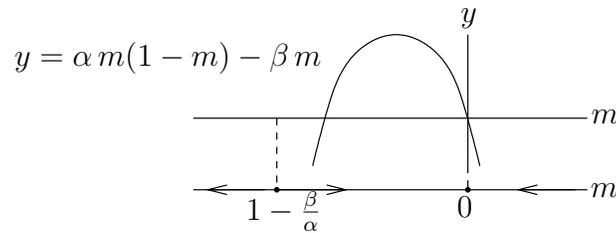


FIGURE 9.11 – Comportement de la fraction $m(t)$ de la population qui porte le microbe lorsque $\beta > \alpha$

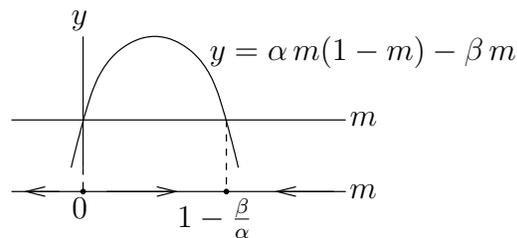


FIGURE 9.12 – Comportement de la fraction $m(t)$ de la population qui porte le microbe lorsque $\beta < \alpha$

Exemple 9.6.3 🌲

Nous avons vu à l'exemple 5.8.23 un modèle pour déterminer le facteur d'efficacité des pêcheurs pour maximiser la récolte de poissons capturés lors des futures années de pêche.

Considérons une question semblable à celle de l'exemple 5.8.23. Au lieu d'utiliser un système dynamique discret pour décrire la population de poissons en fonction du temps, nous utiliserons une équation différentielle.

Soit $x(t)$ le nombre de poissons par km^2 au temps t en années. L'équation différentielle qui gouverne x en fonction du temps est construite à partir de l'équation logistique à laquelle nous ajoutons l'effet de la pêche.

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{M}\right) - hx, \quad (9.6.2)$$

où $M > 0$ est le nombre maximal de poissons que le milieu peut supporter, $r > 0$ est le taux de croissance relatif de la population de poissons si le milieu peut supporter un nombre infini de poissons et il n'y a pas de pêche, et $h > 0$ est le facteur d'efficacité des pêcheurs.

Nous voulons maximiser la récolte de poissons à long termes ; c'est-à-dire, nous voulons maximiser $R(h) = hp(h)$ où $p(h)$ est un point d'équilibre positif pour l'équation différentielle (9.6.2).

Les points d'équilibre de (9.6.2) sont les solutions de

$$rp \left(1 - \frac{p}{M}\right) - hp = 0 ,$$

Le seul point d'équilibre positif est $p(h) = M \left(1 - \frac{h}{r}\right)$. Donc

$$R(h) = Mh \left(1 - \frac{h}{r}\right) .$$

Il découle de $R'(h) = M(1 - 2h/r) = 0$ que le seul point critique est $h = r/2$. Nous résumons dans le tableau suivant l'information que nous avons au sujet de la fonction R .

h	$0 < h < r/2$	$r/2$	$r/2 < h < r$
$R(h)$	+	$Mr/4$	+
$R'(h)$	+	0	-
		max. local	

En conclusion, $h = r/2$ nous donnera la plus grand récolte de poissons pour les futures années de pêche. 

Remarque 9.6.4

Un modèle plus réaliste devrait assumer que la pêche est bien souvent saisonnière ; la pêche n'est généralement pas permise toute l'année mais seulement durant une partie de l'année. Par exemple, si la pêche n'est pas permise pour une portion S de l'année ($0 \leq S \leq 1$), l'équation différentielle qui gouverne x en fonction du temps en années pourrait être de la forme

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{M}\right) - H(t)hx , \quad (9.6.3)$$

où

$$H(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t - [t] < S \\ 1 & S \leq t - [t] < 1 \end{cases} \quad (9.6.4)$$

et $[t]$ est le plus grand entier plus petit que t . Le graphe de H est donné à la figure 9.13. Une équation de la forme (9.6.3) n'a pas de points d'équilibre. Le côté droit de (9.6.3) n'est pas une fonction continue car H est discontinue à $t = n$ et $t = n - S$ pour $n \in \mathbb{N}^+$. Nous pouvons utiliser une méthode numérique pour résoudre ce type d'équations différentielles en portant une attention toute particulière aux points où le côté droit de l'équation différentiel n'est pas continu. Ce n'est pas le sujet du cours.

Nous retrouvons à la figure 9.14 le graphe de la solution de (9.6.3) pour $r = 0.8$, $M = 1000$, $S = 1/2$, $h = 0.1$ et $x(0) = 800$. La population de poissons semble approcher une solution périodique dont la moyenne est environ 938 poissons et l'amplitude est environ 12. Il faudrait une analyse mathématique plus poussée pour prouver que c'est effectivement ce que nous observons graphiquement. Si nous utilisons la valeur moyenne pour calculer la récolte de poissons à long termes, nous trouvons $R(0.1) = 0.1 \times 938 = 93.8$.

À l'exemple 9.6.3, nous avons trouvé que la valeur optimale de h pour maximiser la récolte de poissons pour les futures années de pêche est $h = r/2$. Si nous utilisons cette valeur lorsque $r = 0.8$, nous obtenons $h = 0.4$. Le graphe de la solution de (9.6.3) pour $r = 0.8$, $M = 1000$, $S = 1/2$, $h = 0.4$ et $x(0) = 800$ est donné à la figure 9.15. La population de poissons semble approcher une solution périodique dont la moyenne est environ 751 poissons et l'amplitude est environ 37. Si nous utilisons la valeur moyenne pour calculer la récolte de poissons à long termes, nous trouvons $R(0.4) = 0.4 \times 751 = 300.4$.

Nous pourrions montrer qu'il existe une valeur de h qui maximise $R(h)$. Nous avons donc une population de poissons qui a un bon taux de reproduction et qui peut supporter de bonnes saisons de pêche. ♠

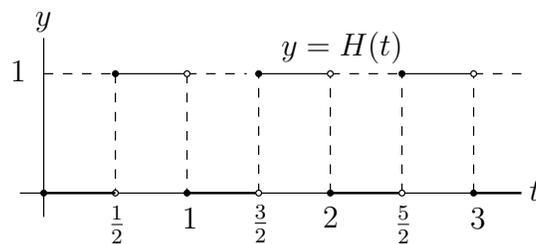


FIGURE 9.13 – Graphe de la fonction H définie en (9.6.4) avec $S = 1/2$.

Exemple 9.6.5 🔧

Un réservoir contient 40 litres d'eau pure. Nous versons dans ce réservoir une saumure (solution saline) qui contient 0.125 kg de sel par litre. Le débit auquel nous versons la saumure dans le réservoir est de 8 litres/minute. Nous supposons que le contenu du réservoir est instantanément bien mélangé (homogène). Si le mélange dans le réservoir s'échappe avec un débit constant de 8 litres/minute, à quel moment le mélange dans le réservoir contiendra-t-il 0.0625 kg de sel par litre ?

Il est généralement plus simple de travailler avec la quantité de sel dans le réservoir que la concentration de sel. Soit $q(t)$ la quantité de sel en kg dans le réservoir au temps t en minutes.

Si nous versons 8 litres de saumure par minute et que chaque litre contient 0.125 kg de sel, alors nous ajoutons $8 \times 0.125 = 1$ kg de sel par minute au contenu du réservoir.

S'il s'échappe 8 litres du mélange par minute de façon constante et puisque le volume du mélange est maintenu à 40 litres, nous perdons $8/40$ de la quantité de sel dans le réservoir par minute.

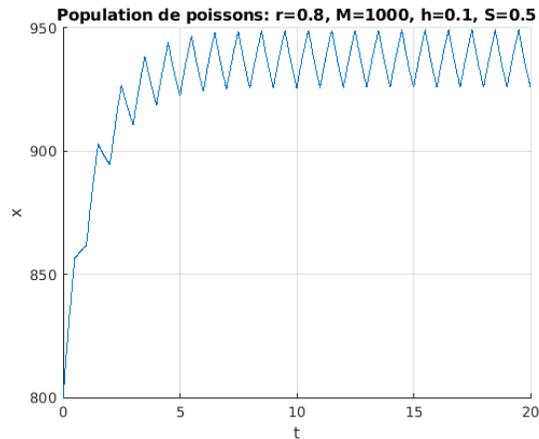


FIGURE 9.14 – Graphe de la solution du problème de pêche saisonnière donné en (9.6.3) pour $r = 0.8$, $M = 1000$, $S = 1/2$, $h = 0.1$ et $x(0) = 800$.

Nous obtenons l'équation différentielle

$$q'(t) = 1 - \frac{8}{40} q(t) = 1 - \frac{q(t)}{5} = \frac{5 - q(t)}{5}$$

où $q'(t)$ est le taux de variation instantané de la quantité de sel dans le réservoir au temps t .

C'est une équation différentielle séparable. Si nous séparons les variables et intégrons par rapport à t , nous obtenons

$$\int \frac{5}{5 - q} dq = \int \frac{5}{5 - q(t)} q'(t) dt = \int dt .$$

Ainsi,

$$-5 \ln |5 - q| = t + C$$

où C est une constante. Si nous divisons par -5 des deux côtés de l'égalité et prenons l'exponentielle, nous obtenons

$$5 - q = \pm e^{-C/5} e^{-t/5}$$

où $\pm e^{-C/5}$ représente une constante positive ou négative que nous appelons E . Nous obtenons

$$q = 5 - Ee^{-t/5}$$

où E est une constante qui peut être nul. Dans ce cas, nous obtenons la solution constante $q(t) = 5$ pour tout t . Puisque $q = 5$ est un point d'équilibre, si initialement nous avons 5 kg de sel dans le réservoir, l'ajout de sel provenant de la saumure que nous ajoutons au contenu du réservoir serait exactement compensé par la quantité du sel qui s'échappe du réservoir. Pour déterminer la valeur de la constante E , nous utilisons l'hypothèse qu'initialement le

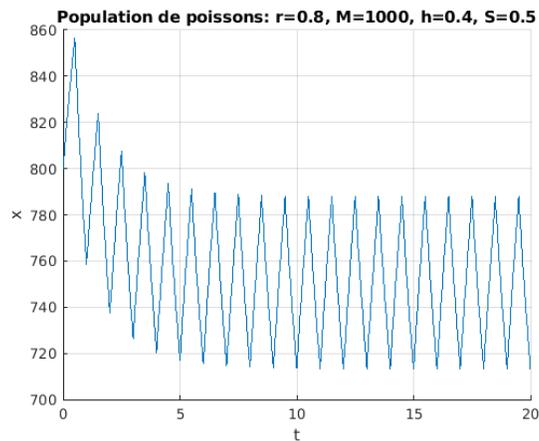


FIGURE 9.15 – Graphe de la solution du problème de pêche saisonnière donné en (9.6.3) pour $r = 0.8$, $M = 1000$, $S = 1/2$, $h = 0.4$ et $x(0) = 800$.

réservoir contient seulement de l'eau pure ; c'est-à-dire que $q(0) = 0$ kg de sel. Donc $0 = 5 - E$ et $E = 5$. La quantité de sel au temps t est donnée par

$$q(t) = 5 \left(1 - e^{-t/5} \right) .$$

Pour répondre à la question, il faut trouver la valeur de t telle que $q(t) = 40 \times 0.0625 = 2.5$ kg. Nous trouvons $t = 5 \ln(2) \approx 3.47$ min. ♣

Exemple 9.6.6 🔧

Supposons à l'exemple précédent que le mélange dans le réservoir s'échappe avec un débit constant de 6 litres/minute seulement. Donnons une équation différentielle satisfaite par la quantité de sel $q(t)$ (en kilogrammes) au temps t en minutes. Pouvons-nous résoudre cette équation différentielle si nous supposons que le réservoir est assez grand pour accommoder l'augmentation de volume du mélange (du moins pour un certain temps) ?

Comme à l'exemple précédent, si nous versons 8 litres de saumure par minute et que chaque litre contient 0.125 kg de sel, alors nous ajoutons $8 \times 0.125 = 1$ kg de sel par minute au contenu du réservoir.

Par contre, s'il s'échappe seulement 6 litres du réservoir par minute, la volume V_r du mélange dans le réservoir va augmenté et sera de $V_r(t) = 40 + 2t$ litres après t minutes. Le volume V_m du mélange qui aura échappé du réservoir après t minutes sera $V_m(t) = 6t$. Donc, au temps t , le taux de variation instantané de la quantité de sel est

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{V_m(t)}{V_r(t)} \right) q(t) = \frac{-60}{(20 + t)^2} q(t) \text{ kg/min} .$$

Le signe négatif est parce que le mélange s'échappe du réservoir.

Nous obtenons l'équation différentielle suivante

$$q'(t) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2} q(t)$$

où $q'(t)$ est le taux de variation instantané de la quantité de sel dans le mélange au temps t .

Nous ne sommes pas en mesure de résoudre cette équation différentielle car elle n'est pas séparable. La méthode d'Euler que nous verrons prochainement va nous permettre de tracer le graphe de q . 

Exemple 9.6.7

Un réservoir contient 10^8 litres d'eau pour l'alimentation d'une ville. À chaque jour, la consommation de la ville est de 10^6 litres, et le réservoir reçoit 0.9×10^6 litres d'eau de source et 10^5 litres d'eau d'une rivière qui se déverse dans le réservoir. L'eau de la rivière contient 0.0001 kg de sel par litre alors que l'eau de source ne contient pas de sel. Nous supposons qu'initialement il n'y a pas de sel dans le réservoir et que le sel se mélange instantanément et uniformément à l'eau du réservoir. Ceci est raisonnable si la prise d'eau de la ville est à une extrémité du réservoir et la rivière se déverse à l'autre extrémité du réservoir. De plus, nous supposons que la consommation de la ville est répartie uniformément durant la journée. Donnons une équation différentielle qui sera satisfaite par la concentration $C(t)$ de sel dans l'eau du réservoir au temps t en jours. Nous allons aussi résoudre cette équation différentielle.

Lorsque que le volume d'eau est constant, ce qui est le cas dans ce problème car il se déverse dans le réservoir autant d'eau qu'il en sort, il est généralement plus simple de commencer par donner une équation différentielle pour $q(t)$, la quantité de sel en kilogrammes dans le réservoir au temps t en jours. Une division de cette équation différentielle par le volume d'eau dans le réservoir (i.e. 10^8 kg) donnera l'équation différentielle pour la concentration $C(t)$ au temps t en jour.

Le réservoir reçoit 10^6 litres d'eau par jour. De ces 10^6 litres, 0.9×10^6 litres ne contiennent pas de sel et 10^5 litres contiennent 0.0001 kg de sel par litre. L'influx d'eau ajoute donc 10 kg de sel par jour dans le réservoir.

Par contre, il s'échappe aussi 10^6 litres d'eau par jour du réservoir. Le réservoir perd donc

$$\frac{10^6}{10^8} q(t) = \frac{q(t)}{100} \quad \text{kg/jour}$$

de sel au temps t .

Nous obtenons l'équation différentielle suivante

$$q'(t) = 10 - \frac{q(t)}{100}$$

où $q'(t)$ est le taux de variation de la quantité de sel dans le réservoir au temps t .

Si nous divisons l'équation différentielle précédente par 10^8 , nous obtenons l'équation différentielle satisfaite par la concentration $C(t) = q(t)/10^8$; c'est-à-dire,

$$C'(t) = 10^{-7} - \frac{C(t)}{100} = \frac{10^{-5} - C(t)}{100}.$$

C'est une équation différentielle séparable. Si nous séparons les variables et intégrons par rapport à t , nous obtenons

$$\int \frac{10^2}{10^{-5} - C} dC = \int \frac{10^2}{10^{-5} - C(t)} C'(t) dt = \int dt .$$

Ainsi,

$$-10^2 \ln |10^{-5} - C| = t + D$$

où D est une constante. Nous divisons par -10^2 des deux côtés de l'égalité et prenons l'exponentielle des deux côtés pour obtenir

$$10^{-5} - C = \pm e^{-D/100} e^{-t/100}$$

où $\pm e^{-D/100}$ représente une constante positive ou négative que nous appelons E . Ainsi,

$$C = 10^{-5} - E e^{-t/100}$$

où E est une constante qui peut être nul car $E = 0$ donne la solution constante $C(t) = 10^{-5}$ pour tout t . Puisque $C = 10^{-5}$ est un point d'équilibre, si initialement nous avons 10^{-5} % de sel dans le réservoir, la quantité de sel perdu par l'utilisation de la ville serait exactement compensée par l'ajout de sel provenant de la rivière.

Pour déterminer la valeur de la constante E , nous utilisons l'hypothèse qu'initialement l'eau du réservoir ne contient pas de sel. Donc $C(0) = 0$ % de sel; c'est-à-dire que $0 = 10^{-5} - E$. Ainsi, $E = 10^{-5}$. La concentration de sel au temps t en jours est donc donnée par

$$C(t) = 10^{-5} (1 - e^{-t/100}) .$$



Exemple 9.6.8

Si le taux de croissance d'un compte en banque est proportionnel au montant dans le compte, nous pouvons donner une équation différentielle qui décrit cette relation.

Supposons que $m(t)$ soit le montant en dollars dans le compte au temps t en années. Puisque $m'(t)$ représente le taux de croissance au temps t , nous obtenons de l'énoncé du problème que

$$m'(t) = km(t)$$

où k est une constante. C'est l'équation différentielle (9.5.3) (où nous remplaçons y par m) qui possède la solution donnée en (9.5.4). Donc

$$m(t) = E e^{kt}$$

où E est le montant initial dans le compte et k le taux d'intérêt composé de façon continue; c'est-à-dire, le compte rapporte $100k$ % par année, composé de façon continue. 

Exemple 9.6.9

Considérons une personne qui saute en parachute. Une des lois de la physique dit que la résistance de l'air est proportionnel au carré de la vitesse du parachutiste. La constante de

proportionnalité d représente la surface du parachute qui est soumise à la résistance de l'air et le poids du parachute.

Si $v(t)$ est la vitesse (en m/s) du parachutiste t secondes après avoir ouvert son parachute, alors v satisfait l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + dv^2, \quad (9.6.5)$$

où nous assumons que la direction positive du déplacement est vers le haut, m est la masse (en kg) du parachutiste et $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ est l'accélération dû à la gravité.

Le premier terme à droite du signe d'égalité dans l'équation (9.6.5) est une conséquence de la lois de Newton qui dit que la force exercée par l'attraction terrestre sur le parachutiste est de $-mg$ N. Le signe négative pour l'accélération indique que la force est dans la direction opposée à la direction positive.

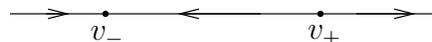
Quelles sont les unités de la constante de proportionnalité d pour que l'équation différentielle soit cohérente? Si nous traduisons l'équation différentielle en termes des unités de ses composantes, nous obtenons

$$\text{kg m/s}^2 = -\text{kg m/s}^2 + \text{unités de } d \times \text{m}^2/\text{s}^2.$$

Les unités de d doivent donc être des kg/m.

Les points d'équilibre de l'équation différentielle (9.6.5) sont les solutions de $f(v) = -mg + dv^2 = 0$. Nous trouvons $v_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{mg}{d}}$. Si le poids du parachutiste est de 75 km, donc $m = 75$, et $d = 50$, nous obtenons les points d'équilibre $v_{\pm} = \pm \sqrt{14.7} \approx \pm 3.834$.

Puisque $f(v) > 0$ pour $v < v_-$ et $v > v_+$, et $f(v) < 0$ pour $v_- < v < v_+$, nous obtenons le portrait de phases suivant.



La vitesse initiale v_0 du parachutiste est inférieure à v_+ car il saute d'un avion. En fait, probablement que $v_0 \leq 0$ lorsque le parachute ouvre. Ne pas oublier que la direction positive est vers le haut. Donc $v(t)$ tend $v_- = -3.834$ lorsque t tend vers l'infini. C'est-à-dire que la vitesse de descente du parachutiste approchera 3.834 m/s quand il arrivera au sol si, naturellement, il est assez loin du sol lorsqu'il ouvre son parachute.

Nous aurions pu trouver la solution de l'équation différentielle (9.6.5) car c'est une équation séparable. En fait,

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} = -mg + dv^2 &\Rightarrow \frac{1}{(mg/d) - v^2} \frac{dv}{dt} = -\frac{d}{m} \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{(mg/d) - v^2} dv = -\int \frac{d}{m} dt. \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

Si $k^2 = mg/d$, alors

$$\int \frac{1}{(mg/d) - v^2} dv = \int \frac{1}{k^2 - v^2} dv = \int \frac{1}{(k-v)(k+v)} dv = \frac{1}{2k} \int \left(\frac{1}{k-v} + \frac{1}{k+v} \right) dv$$

$$= \frac{1}{2k} (-\ln |k - v| + \ln |k + v|) + E = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k + v}{k - v} \right| + E$$

grâce à la méthode d'intégration par fractions partielles. Nous obtenons donc de (9.6.6) que

$$\frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k + v}{k - v} \right| = -\frac{d}{m}t + C.$$

Si nous résolvons pour v , nous trouvons

$$v = \frac{k(De^{-2kdt/m} - 1)}{De^{-2kdt/m} + 1} = \sqrt{\frac{mg}{d}} \left(\frac{(De^{-2t\sqrt{gd/m}} - 1)}{De^{-2t\sqrt{gd/m}} + 1} \right),$$

où $D = \pm e^{2kC}$. Comme c'est bien souvent le cas, le cas $D = 0$ est aussi acceptable puisqu'il donne la solution constante $v(t) = \sqrt{mg/d}$ pour tout t . Nous pouvons donc assumer que $D \in \mathbb{R}$. Nous avons bien que $v(t) \rightarrow -\sqrt{mg/d}$ lorsque t tend vers l'infini.

Comme nous pouvons voir, l'analyse qualitative avec le portrait de phases nous a fourni toute l'information nécessaire au sujet du comportement à long terme de $v(t)$ sans avoir à faire de long calculs pour résoudre l'équation différentielle (9.6.5). ♣

Exemple 9.6.10 🔧

Une personne se trouve dans une pièce de 3 m de profondeur, 2 m de largeur et 2.5 m de hauteur. Supposons que la pièce ne bénéficie pas d'un bon système d'aération. Nous avons l'information suivante.

- La quantité d'oxyde de carbone aspirée par minute par une personne dépend linéairement de la concentration d'oxyde de carbone dans l'air.
- Une personne aspire 0.015 m³/minute d'oxyde de carbone lorsqu'il y a 0.04% d'oxyde de carbone dans l'air et deux fois plus d'oxyde de carbone lorsque qu'il y a 0.3% d'oxyde de carbone dans l'air.
- L'air expiré par la personne contient 4% plus d'oxyde de carbone que l'air aspiré.

À partir de cette information, donnons une équation différentielle pour la concentration d'oxyde de carbone $C(t)$ (en pourcentage) dans l'air au temps t minutes. Nous allons aussi résoudre cet équation.

Commençons par trouver une formule pour la quantité y (en m³) d'oxyde de carbone aspirée par minute par une personne en fonction de la concentration C d'oxyde de carbone dans l'air. Nous savons que la relation entre ces deux quantités est linéaire. Donc $y = mC + b$ pour deux constantes m et b . L'énoncé de la question nous dit que $y = 0.015$ m³/minute pour $C = 0.0004$ et $y = 0.03$ m³/minute pour $C = 0.003$. Nous obtenons le système

$$\begin{aligned} 0.015 &= 0.0004m + b \\ 0.03 &= 0.003m + b \end{aligned}$$

dont la solution est $m \approx 5.769231$ et $b \approx 0.0126923$.

Puisque l'air expiré par la personne contient 4% plus d'oxyde de carbone que l'air aspiré, nous avons donc que la variation instantanée de la quantité d'oxyde de carbone $q(t)$ (en m³)

dans l'air au temps t en minutes satisfait

$$q'(t) = 0.04(mC(t) + b) .$$

Puisque le volume d'air dans la pièce est la valeur constante $3 \times 2 \times 2.5 = 15 \text{ m}^3$, la concentration d'oxyde de carbone dans la pièce au temps t est donc donnée par $C(t) = q(t)/15$. Si nous divisons les deux côtés de l'équation différentielle précédente par 15, nous trouvons l'équation différentielle satisfaite par la concentration d'oxyde de carbone $C(t)$ dans la pièce au temps t ; c'est-à-dire,

$$C'(t) = \frac{q'(t)}{15} = \frac{0.04}{15}(mC(t) + b) = \frac{m}{375}C(t) + \frac{b}{375} .$$

C'est une équation différentielle séparable. Nous avons

$$\int \frac{375}{mC + b} dC = \int \frac{375}{mC(t) + b} C'(t) dt = \int dt .$$

Donc

$$\frac{375}{m} \ln(mC + b) = t + K$$

où K est une constante d'intégration. Si nous résolvons pour C , nous obtenons

$$C(t) = -\frac{b}{m} + \frac{De^{mt/375}}{m}$$

où D est une constante qui est déterminée par la concentration initiale d'oxyde de carbone dans la pièce lorsque $m \approx 5.769231$ et $b \approx 0.0126923$.

Le modèle précédent n'est pas valide pour tout t . Il est clair qu'à un moment donné, la quantité d'oxyde de carbone dans la pièce sera trop élevée pour que la personne puisse survivre dans cette pièce. Heureusement, nos maisons ne sont pas isolées au point de ne pas permettre l'air d'entrer. Les chances d'empoisonnement sont donc nulles sauf s'il y a une autre source d'oxyde de carbone. C'est là qu'un bon détecteur d'oxyde de carbone est utile.



9.7 Famille de courbe orthogonales

Définition 9.7.1

Une équation de la forme $F(x, y, c) = 0$, où c est un paramètre réel, représente une **famille de courbes** dans le plan.

Exemple 9.7.2

L'équation $F(x, y, r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ définit la famille des cercles centrés à l'origine et de rayon r . L'équation $G(x, y, c) = x^2 - y + c = 0$ définit la famille des paraboles $y = x^2 + c$. L'équation $F(x, y, r) = y - ce^x = 0$ définit la famille des courbes $y = ce^x$.



Définition 9.7.3

Une famille de courbes $F(x, y, c) = 0$ est **orthogonale** à une autre famille de courbes $G(x, y, d) = 0$ si, en tout point où une courbe de la première famille coupent une courbe de la deuxième famille, les tangentes à ces deux courbes sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Exemple 9.7.4

La famille des cercles de rayon r centrés à l'origine $F(x, y, r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ est orthogonale à la famille des droites qui passe par l'origine $G(x, y, m) = y - mx = 0$. Ces droites sont des rayons pour les cercles centrés à l'origine (figure 9.16). ♣

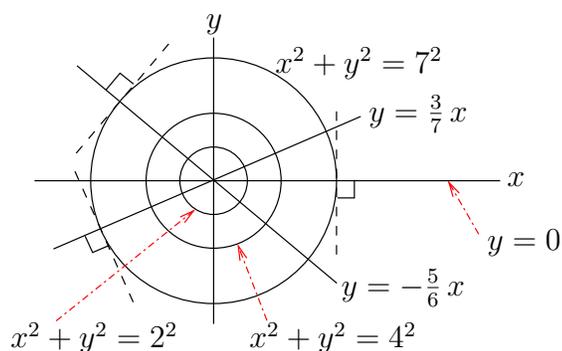


FIGURE 9.16 – Les cercles centrés à l'origine forment une famille de courbes orthogonales à la famille des droites qui passent par l'origine.

Nous pouvons utiliser les équations différentielles pour trouver une famille de courbes orthogonales à une famille donnée de courbes. Il faut se rappeler que si une droite ℓ_1 de pente m_1 coupe perpendiculairement une autre droite ℓ_2 de pente m_2 alors $m_1 m_2 = -1$.

Si $y = \phi(x)$ est une courbe de la famille de courbes $F(x, y, c) = 0$ et (x_0, y_0) est un point de cette courbe, alors la pente de la tangente à la courbe $y = \phi(x)$ au point (x_0, y_0) est $\phi'(x_0)$ (sauf si la tangente est verticale à ce point). Si la famille de courbe $G(x, y, d) = 0$ est orthogonale à la famille de courbes $F(x, y, c) = 0$ et $y = \psi(x)$ est une courbe de la famille $G(x, y, d) = 0$ qui coupe la courbe $y = \phi(x)$ de la famille $F(x, y, c) = 0$ au point (x_0, y_0) , alors la pente de la tangente à la courbe $y = \psi(x)$ au point (x_0, y_0) est $\psi'(x_0) = \frac{-1}{\phi'(x_0)}$.

C'est ce raisonnement qui nous permet d'utiliser la méthode suivante pour trouver une famille de courbes orthogonale à une famille donnée de courbes.

Méthode 9.7.5

1. Dérivez l'équation $F(x, y, c) = 0$ pour en déduire une équation différentielle $y'(x) = f(x, y)$ qui ne dépend pas du paramètre c . Il est parfois nécessaire d'utiliser l'équation $F(x, y, c) = 0$ pour éliminer la constante c qui définit la

famille de courbe.

2. Résolvez l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{-1}{f(x, y)} \quad (9.7.1)$$

pour obtenir une famille de courbe $G(x, y, d) = 0$ orthogonale à la famille de courbes $F(x, y, c) = 0$.

La constante d de la famille $G(x, y, d) = 0$ est la constante d'intégration que apparaît lorsque nous résolvons une équation différentielle sans condition initiale.

Lors de la première étape de la méthode précédente, il est essentiel d'éliminer la constant c car autrement nous obtenons seulement une famille de courbes orthogonale à la courbe de la famille $F(x, y, c) = 0$ associée à la valeur c .

Exemple 9.7.6

Trouvons la famille de courbes orthogonale à la famille de courbes $y = ce^x$.

Si nous dérivons $y = ce^x$, nous obtenons $y' = ce^x$. Or $ce^x = y$. Donc $y' = y$. C'est une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$ avec $f(x, y) = y$ qui ne dépend pas de c .

La famille de courbes orthogonale à la famille de courbes $y = ce^x$ est donnée par la solution de l'équation différentielle séparable

$$y' = -\frac{1}{y}.$$

Donc

$$\int y \, dy = - \int dx.$$

Ce qui donne $\frac{y^2}{2} = -x + d$, la famille de courbes cherchée. Quelques courbes des deux familles sont représentés à la figure 9.17. 

9.8 Méthode d'Euler

Soit l'équation différentielle avec une condition initiale

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) & , & & x_0 \leq x \leq x_f \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (9.8.1)$$

où f est une fonction de deux variables.

Avant même d'essayer de trouver une solution (numérique ou algébrique) de (9.8.1), il faut se poser les questions suivantes.

1. Est-ce qu'il existe une solution ?

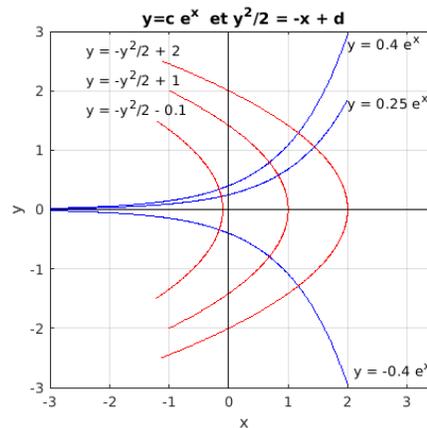


FIGURE 9.17 – Quelles courbes des familles de courbes $y = ce^x$ et $\frac{y^2}{2} = -x + d$. Ces deux familles de courbes sont mutuellement orthogonales.

2. S'il en existe une, est-elle unique ?
3. De plus, pour une solution numérique de (9.8.1), est-ce qu'une petite perturbation de (9.8.1) entraîne un énorme changement de la solution ?

La raison pour la première question est évidente. Il est inutile de chercher une solution de (9.8.1) s'il n'en existe pas. La raison pour la deuxième question est plus subtile. S'il y a plusieurs solutions pour une équation différentielle avec une condition initiale, nous pouvons questionner la valeur et véracité de cette équation différentielle pour modéliser un phénomène (physique, biologique, etc), en particulier si les expériences montrent qu'un seul comportement est possible. De plus, comment pouvons-nous savoir si la solution que nous avons trouvée est vraiment la solution qui décrit le phénomène que nous voulons analyser ? Nous avons répondu aux deux premières questions à la section 9.4.

La troisième question est fondamentale lorsque nous voulons résoudre numériquement des équations différentielles. Puisque les calculs numériques ne sont jamais exacts, il ne faut pas que les erreurs de troncature produisent des résultats qui sont très loin des valeurs exactes qui devraient être obtenues.

Il y a aussi une raison pratique pour la troisième question. Comme les modèles mathématiques sont souvent construits à partir d'expériences en laboratoire, les équations différentielles utilisées pour la modélisation sont bien souvent des approximations des équations différentielles qui gouvernent vraiment les phénomènes observés. Nous voulons donc que deux équations différentielles qui sont presque identiques aient des solutions qui soient presque identiques.

Nous disons qu'une équation différentielle avec une condition initiale, comme en (9.8.1), est **bien-posée** si la solution existe et est unique, et si une petite perturbation de (9.8.1) entraîne seulement un petit changement de la solution de (9.8.1).

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour que (9.8.1) soit bien posée.

Théorème 9.8.1 

Soit

$$R = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_f \text{ et } -\infty < y < \infty\}.$$

Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, alors (9.8.1) est bien posé.

La méthode numérique que nous allons introduire dans le reste de cette section n'est pas très efficace mais elle est simple et permet d'illustrer clairement les difficultés que nous retrouvons lors de la résolution numérique d'équations différentielles. À partir de maintenant, nous supposons que (9.8.1) est bien posée.

La procédure générale pour **résoudre numériquement** une équation différentielle comme (9.8.1) est la suivante.

1. Choisissez un entier positif N .
2. Choisissez $N + 1$ **noeuds** $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = x_f$. Pour les méthodes simples comme la méthode d'Euler que nous verrons ci-dessous, il est normal d'utiliser la même distance entre les noeuds x_{i-1} et x_i pour $i = 1, 2, \dots, N$.
3. Trouvez une approximation w_i de $y_i = y(x_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, N$.
4. Utilisez une interpolation linéaire entre les points (x_i, w_i) pour estimer les valeurs $y(x)$ de la solution de (9.8.1) aux points x dans l'intervalle $[x_0, x_f]$.

La **méthode d'Euler** est une méthode simple pour résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre un avec une condition initiale.

Méthode 9.8.2 (Méthode d'Euler)

Soit y , la solution d'une équation différentielle avec une condition initiale comme nous retrouvons en (9.8.1). Soit N un entier positif, $h = (x_f - x_0)/N$ et $x_i = x_0 + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, N$. L'approximation w_i de $y(x_i)$ provient de la solution de l'équation aux différences finies

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + h f(x_i, w_i) \\ w_0 &= y_0 \end{aligned} \tag{9.8.2}$$

pour $i = 1, 2, \dots, N$.

Cette méthode est illustrée graphiquement à la figure 9.18).

Remarque 9.8.3

Nous pouvons justifier la méthode d'Euler de la façon suivante. Il découle du Théorème de Taylor que

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2$$

pour un point ξ_i entre x_i et x_{i+1} . Si nous substituons $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$, $y_i = y(x_i)$, $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ et $h = x_{i+1} - x_i$ dans cette équation, nous obtenons

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{y''(\xi_i)}{2}h^2$$

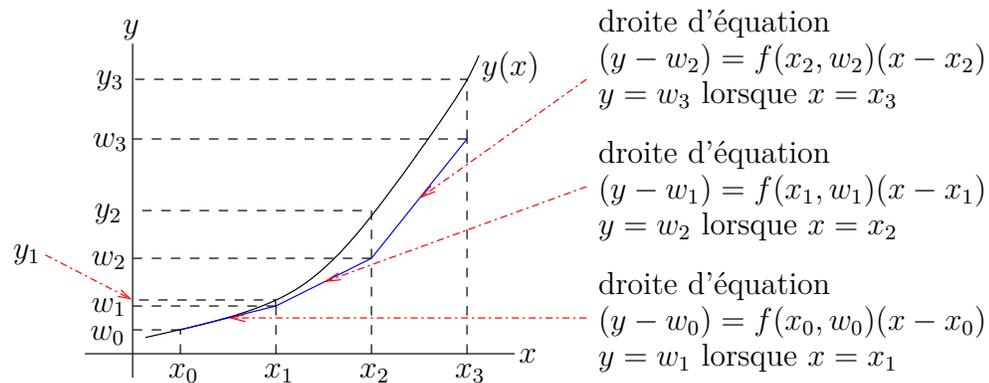


FIGURE 9.18 – Le graphe d'une solution possible y de (9.8.1) (en noir) et de la solution calculée avec la méthode d'Euler (en bleu).

pour un point ξ_i entre x_i et x_{i+1} . Finalement, si nous supposons que $y''(\xi_i)h^2/2$ est beaucoup plus petit que $y_i + f(x_i, y_i)h$ pour tout i (i.e. si h est assez petit), nous obtenons

$$y_{i+1} \approx y_i + f(x_i, y_i)h$$

qui nous permet d'écrire (9.8.2) ♠

Remarque 9.8.4

Pour évaluer la qualité d'une méthode numérique, nous utilisons souvent l'**erreur absolue**, qui est la différence $|y_i - w_i|$, et l'**erreur relative**, qui est $|y_i - w_i|/|y_i|$.

L'erreur relative donne une meilleure idée de l'erreur des approximations w_i car elle donne le pourcentage d'erreur (après multiplication par 100) par rapport à la valeur exacte y_i . En effet, une erreur absolue de 0.1 est énorme si les valeurs cherchées y_i sont plus petites que 1 en valeurs absolues. Par contre, une erreur absolue de 0.1 est minuscule si les valeurs cherchées sont plus grandes que 10^7 en valeurs absolues. L'erreur relative est insensible à l'ordre de grandeur des valeurs cherchées. ♠

Exemple 9.8.5

Utilisons la méthode d'Euler avec $N = 5$ pour estimer la solution y de

$$\begin{aligned} y'(x) &= 0.2xy & , & & 1 \leq x \leq 1.5 \\ y(1) &= 1 \end{aligned} \tag{9.8.3}$$

Nous avons $x_0 = 1$, $x_f = x_5 = 1.5$, $y_0 = 1$ et $f(x, y) = 0.2xy$. Ainsi, $h = (x_5 - x_0)/5 = 0.1$, $x_i = x_0 + ih = 1 + 0.1i$ et les approximations w_i de $y_i \equiv y(x_i)$ sont données par

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(x_i, w_i) = w_i + 0.02(1 + 0.1i)w_i \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, 4$. Ainsi,

$$w_1 = w_0 + hf(x_0, w_0) = w_0 + 0.02w_0 = 1.02$$

$$w_2 = w_1 + hf(x_1, w_1) = w_1 + 0.02(1 + 0.1)w_1 = 1.04244$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau suivant.

i	x_i	w_i	y_i	erreur absolue	erreur relative
0	1.00	1.0000	1.0000	0.0	0.0
1	1.10	1.02	1.0212220516	0.0012220516	0.0011966561
2	1.20	1.04244	1.0449823549	0.0025423549	0.0024329166
3	1.30	1.06745856	1.0714362091	0.0039776491	0.0037124461
4	1.40	1.0952124826	1.100759064	0.0055465814	0.0050388696
5	1.50	1.1258784321	1.1331484531	0.007270021	0.006415771

Comme l'équation différentielle (9.8.3) est séparable, nous pouvons trouver la solution exacte de (9.8.3). Nous trouvons $y(x) = e^{0.1x^2-0.1}$. C'est cette formule qui nous a permis de calculer les valeurs exactes $y_i = y(x_i)$ qui ont été utilisées pour calculer l'erreur absolue et l'erreur relative. L'approximation w_5 de $y_5 = y(x_5)$ a une erreur relative d'environ 0.64 %. C'est bon. 

Exemple 9.8.6

Utilisons la méthode d'Euler avec $N = 5$ pour estimer la solution y de

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2xy \quad , \quad 1 \leq x \leq 1.5 \\ y(1) &= 1 \end{aligned} \tag{9.8.4}$$

Comme à l'exemple précédent, nous avons $x_0 = 1$, $x_f = x_5 = 1.5$ et $y_0 = 1$. Cependant, $f(x, y) = 2xy$. Ainsi, $h = (x_5 - x_0)/5 = 0.1$, $x_i = x_0 + ih = 1 + 0.1i$ et les approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ sont données par

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(x_i, w_i) = w_i + 0.2(1 + 0.1i)w_i \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, 4$. Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau suivant.

i	x_i	w_i	y_i	erreur absolue	erreur relative
0	1.0	1.0000	1.0000	0.0	0.0
1	1.1	1.2000	1.23367806	0.03367806	0.0272989048
2	1.2	1.4640	1.5527072185	0.0887072185	0.0571306795
3	1.3	1.81536	1.9937155332	0.1783555332	0.0894588673
4	1.4	2.2873536	2.6116964734	0.3243428734	0.1241885789
5	1.5	2.927812608	3.4903429575	0.5625303495	0.1611676435

Comme l'équation différentielle (9.8.4) est séparable, nous pouvons trouver la solution exacte de (9.8.4). Nous trouvons $y(x) = e^{x^2-1}$. C'est cette formule qui nous a permis de calculer les valeurs exactes $y_i = y(x_i)$. L'approximation w_5 de $y_5 = y(x_5)$ a une erreur relative d'environ

16.12 %. Ce n'est pas bon. Comme nous pouvons constater à partir de l'erreur relative, la méthode d'Euler ne donne pas de bonnes approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, 5$. 

Remarque 9.8.7

Nous pourrions penser qu'en prenant h assez petit nous pouvons obtenir la précision désirée mais ce n'est pas le cas. En fait, l'erreur absolue satisfait

$$|w_i - y_i| \approx \frac{1}{L} \left(\frac{Mh}{2} + \frac{\delta}{h} \right) (e^{L(x_i - x_0)} - 1)$$

où L et M sont des constantes qui dépendantes de la fonction f et δ est la précision de l'ordinateur utilisé pour les calculs. Ainsi, si h tend vers 0, l'erreur absolue tend vers $+\infty$ dû au terme δ/h 

Exemple 9.8.8

Nous avons obtenu l'équation différentielle suivante à l'exemple 9.6.6.

$$q'(t) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2} q(t) \quad , \quad q(0) = 0 \quad ,$$

où $q(t)$ est la quantité de sel en kilogrammes dans un mélange au temps t en minutes. Comme cette équation n'est pas séparable, nous ne pouvons pas la résoudre exactement. C'est une équation différentielle linéaire. Ceux qui poursuivront leurs études des mathématiques verront comment résoudre cet équation. Pour l'instant, nous allons utiliser la méthode d'Euler pour estimer la solution sur l'intervalle $[0, 10]$.

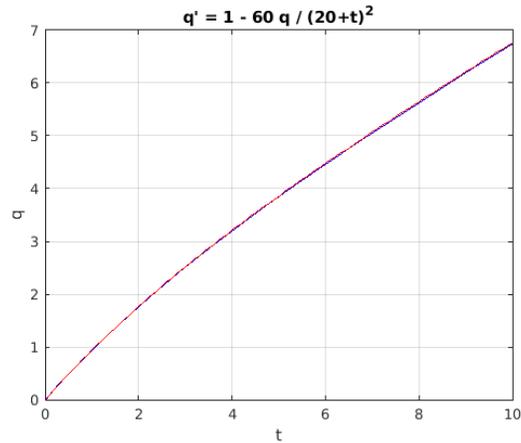
L'équation différentielle est de la forme $q'(t) = f(t, q(t))$ avec $f(t, q) = 1 - \frac{60}{(20+t)^2} q$. Si nous choisissons $N = 100$, alors $x_0 = 0$, $x_{10} = 10$, $h = (x_{10} - x_0)/100 = 0.1$, et $x_i = x_0 + hi = 1 + 0.1i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 100$. les approximations w_i de $y_i = y(x_i)$ sont données par

$$\begin{aligned} w_0 &= 0 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(x_i, w_i) = w_i + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20+t_i)^2} w_i \right) \end{aligned}$$

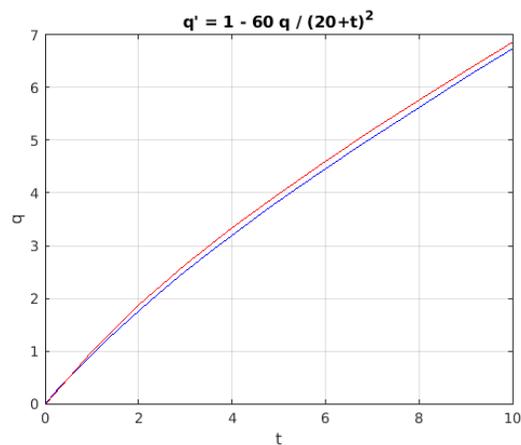
pour $i = 0, 1, \dots, 99$. Les premières valeurs de w_i sont données ci-dessous.

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + hf(x_0, w_0) = 0 + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20+0)^2} \times 0 \right) = 0.1 \\ w_2 &= w_1 + hf(x_1, w_1) = 0.1 + 0.1 \left(1 - \frac{60}{(20+0.1)^2} \times 0.1 \right) \approx 0.198514888 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

La figure suivante contient le graphe de la solution exacte (en bleu) ainsi que le graphe de l'approximation de la solution donnée par la méthode d'Euler (en rouge) dans le cas où $N = 100$. Comme nous pouvons constater, l'approximation est très bonne. La méthode d'Euler est assez bonne quand la solution varie lentement.



Nous avons répété les calculs avec $N = 10$ pour obtenir une seconde approximation de la solution avec la méthode d'Euler. La figure suivante contient le graphe de la solution exacte (en bleu) ainsi que le graphe de cette nouvelle approximation de la solution donnée par la méthode d'Euler (en rouge). Comme nous nous y attendions, l'approximation de la solution est un peu moins bonne mais quand même acceptable.



9.9 Exercices

9.9.1 Introduction

Question 9.1

Montrez que $y(t) = t^2 \sin(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = 2t \sin(t) + t^2 \cos(t) .$$

C'est-à-dire, montrez que l'équation est satisfaite si nous remplaçons $y(t)$ par $t^2 \sin(t)$.

Question 9.2

Répondez à chacune des questions suivantes de deux façons : (1) en calculant une intégrale définie et (2) en utilisant le Théorème fondamental du calcul différentiel.

- a) Si $L(t)$ satisfait l'équation différentielle $\frac{dL}{dt} = 6.48e^{-0.09t}$ avec $L(0) = 5$, quelle est la variation de L entre $t = 1$ et $t = 5$?
- b) Si $P(t)$ satisfait l'équation différentielle $\frac{dP}{dt} = 5.0e^{-2.0t}$ avec $P(0) = 2$, quelle est la variation de P entre $t = 5$ et $t = 10$?
- c) Si $A(t)$ satisfait l'équation différentielle $\frac{dA}{dt} = 523.8(t - 1981)^2$ avec $A(1981) = 13,400$, quelle est la variation de A entre $t = 1985$ et $t = 1987$?

Question 9.3

Expliquez pourquoi, à la question 9.2, la solution ne dépend pas de la condition initiale.

Question 9.4 🌲

Un été chaud et humide provoque une invasion de moustiques dans le voisinage immédiat d'un lac. Le nombre moyen de moustiques par km^2 croît à un taux de $2200 + 10e^{0.8t}$ moustiques par jour où t est le nombre de jours depuis le début des mesures. Quel a été l'augmentation du nombre de moustiques par km^2 entre le 5^e et le 9^e jours ?

Question 9.5

Quelle est le déplacement entre 1 et 5 secondes d'une pierre qui tombe si la position $p(t)$ en mètres au temps t en secondes est donnée par l'équation différentielle $\frac{dp}{dt} = -9.8t - 5.0$.

Question 9.6 🌲

Un guépard se trouve dans une savane. Il repère un zèbre qui se trouve à 200 m de lui et part à la course vers le zèbre. Si la vitesse du guépard est $v(t) = e^t$ m/s après t secondes,

- a) Tracez le graphe de la vitesse v du guépard en fonction du temps.
- b) Donnez une équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ du guépard en fonction du temps t .
- c) Trouvez la solution de cette équation différentielle.
- d) Tracez le graphe de la position du guépard en fonction du temps.
- e) Combien de temps faudra-t-il au guépard pour atteindre le zèbre si celui ci demeure immobile ?

Notez que c'est un guépard végétarien qui veut seulement jouer avec le zèbre, donc le zèbre n'en a pas peur. La fonction exponentiel n'est pas a bon modèle pour la vitesse du guépard. Il est vrai que la vitesse du guépard augmente très rapidement au départ. Cependant, le guépard atteint très rapidement sa vitesse maximale. Pouvez-vous penser à une autre fonction qui pourrait décrire plus précisément la vitesse du guépard ?

Question 9.7 🌲

Un escargot traverse un trottoir de 1 mètre de large. Sa vélocité après t min. est de $v(t) = 0.1 + 0.2e^{-t}$ m/min.

- a) Tracez un graphe de la vitesse en fonction du temps.
- b) Donnez une équation différentielle pour la position $x(t)$ de l'escargot en fonction du temps t .
- c) Trouvez la solution de l'équation différentielle que vous avez donné en (b). Supposez que la position initial de l'escargot est $x(0) = 0$. L'escargot est au bord du trottoir.
- d) Dessinez le graphe de la position en fonction du temps.
- e) Combien de temps va prendre l'escargot pour traverser le trottoir.

Question 9.8

Pour chacune des équation différentielles suivantes, utilisez l'intégrale indéfinie pour trouver la solution particulière qui satisfait la condition initiale donnée, tracez le graphe de cette solution ainsi que celui de son taux de variation instantanée.

- a) $\frac{dp}{dt} = 5t^2 + \frac{5}{t^2}$ avec $p(1) = 12$
- b) $\frac{dM}{dt} = t^3 + t^{-3}$ avec $M(2) = 8$
- c) $\frac{dp}{dt} = -0.25t^3$ avec $p(0) = 5$
- d) $\frac{dM}{dt} = 2t^{-1/2}$ avec $M(0) = 5$

Question 9.9

La fonction $L(t)$ est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dL}{dt} = 0.001 t(365 - t).$$

Si $L(100) = 1000$, quelle sera la valeur de $L(200)$.

Question 9.10

La fonction $L(t)$ est déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{dL}{dt} = 0.001 T(t) \quad \text{où} \quad T(t) = 20 + 10 \cos\left(\frac{2\pi(t - 90)}{182.5}\right).$$

- a) Tracez le graphe de $T(t)$ en fonction du temps pour deux périodes.
- b) Si $L(0) = 0.1$, quelle sera la valeur de $L(30)$?
- c) Si $L(150) = 0.1$, quelle sera la valeur de $L(300)$?

Question 9.11

Résolvez chacune des équations différentielles suivantes pour la condition initiale qui est donnée. Décrivez ce qui arrive quand $t \rightarrow \infty$ dans chacun des cas. Il pourrait être utile de tracer le graphe de la solution.

- a) $\frac{dP}{dt} = \frac{5}{1 + 2t}$ avec $P(0) = 5$
- b) $\frac{dP}{dt} = \frac{5}{(1 + t)^2}$ avec $P(0) = 0$

Question 9.12

La fonction $W(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dW}{dt} = (4t - t^2)e^{-3t}, \quad W(0) = 0.$$

- a) Résolvez cette équation différentielle et déterminé la valeur de $W(2)$.
 b) À quel moment W augmente-t-elle le plus rapidement ?
 c) Quelle serait la valeur de $W(2)$ si le taux de croissance de W était constant et égale au taux maximal calculé en (b). Nous assumons toujours que la condition initiale est $W(0) = 0$.

Question 9.13

La fonction $M(t)$ est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dM}{dt} = (1 + t^2)e^{-2t} \quad , \quad M(0) = 1 .$$

- a) Résolvez cette équation différentielle et déterminé la valeur de $M(1)$.
 b) Quelle est le taux de croissance maximal ?
 c) Si le taux de croissance était constant et égal à la valeur maximale trouvée en (b), quelle serait la valeur de $M(1)$?

Question 9.14

Une expérience réalisée par une sonde spatial lors de son atterrissage sur une planète, et lorsqu'elle se trouve à une distance de 100 m du sol, est de lancer vers le haut un objet à une vitesse de 5 m/s par rapport au sol. L'attraction dû à la gravité de cette planète est $g = -10.5 \text{ m/s}^2$. Le signe négatif indique que les objets sont attirés vers la planète. Nous supposons que la direction positive du déplacement est vers le haut.

- a) Trouvez la vitesse et la position de l'objet en fonction du temps.
 b) Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
 c) Combien de temps s'écoule avant que l'objet revienne à une distance de 100 m de la planète après avoir été lancé. Quelle est sa vitesse à ce moment ?
 d) Combien de temps s'écoule avant que l'objet frappe le sol (où la sonde qui vient de se poser) ? Quelle est sa vitesse à ce moment ?
 e) Dessinez le graphe de la position et de la vitesse en fonction du temps.

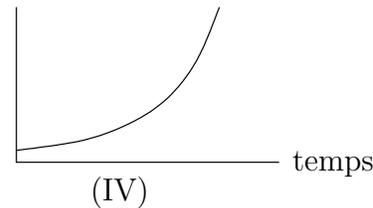
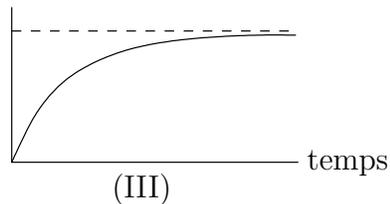
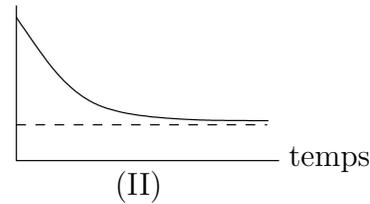
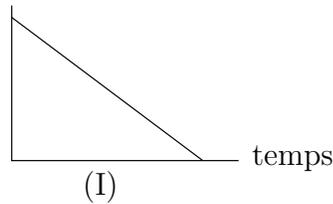
Question 9.15 🌲

Une cellule meure lorsque la concentration d'une certaine toxine dans la cellule dépasse $30 \mu\text{mol/l}$. Est-ce qu'une cellule peut survivre si la concentration initiale de la toxine dans la cellule est de $10 \mu\text{mol/l}$ et la concentration augmente à un taux de $50e^{-2t} \mu\text{mol/l/s}$?

Question 9.16

Associez chacun des graphes ci-dessous à une des descriptions suivantes et donnez un équation différentielle possible pour chacun des cas.

- a) La température d'un verre d'eau glacé laissé sur le comptoir.
 b) Le montant dans un compte avec intérêt composé de façon continue dans lequel a été déposé 100 dollars.
 c) La vitesse d'une voiture qui a une décélération constante.
 d) La température d'une pièce de métal chaude qui refroidit.

**Question 9.17**

Montrez que $x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $x'(t) = 1 + 2x(t)$ et satisfait la condition initiale $x(0) = 1$.

Question 9.18

Considérons l'équation différentielle $g'(t) = g^2(t) + 2t$. Est-ce que la solution g de cette équation est croissante ou décroissante à $t = 0$ si $g(0) = 1$?

Question 9.19

Montrez que $b(t) = \ln(t)$ est une solution de l'équation différentielle $b'(t) = e^{-b(t)}$. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction croissante ? Justifiez votre réponse.

Question 9.20

Montrez que $b(t) = 3e^{2t} - 0.5$ satisfait l'équation différentielle $b'(t) = 1 + 2b(t)$ et la condition initiale $b(0) = 2.5$. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction croissante ? Justifiez votre réponse.

Question 9.21

Montrez que $b(t) = e^{-t}$ satisfait l'équation différentielle $b'(t) = -b(t)$ et la condition initiale $b(0) = 1$. Pouvez-vous conclure à partir de l'équation différentiel seulement que b est une fonction décroissante ? Justifiez votre réponse.

Question 9.22

Montrez que $b(t) = 5 + 20e^{-2t}$ est une solution de l'équation différentielle $b'(t) = 10 - 2b(t)$ avec la condition initiale $b(0) = 25$. Est-ce que la solution est croissante ou décroissante ? Justifiez votre réponse précédente de deux façons, un argument qui utilise la formule pour b et un argument qui ne l'utilise pas.

Question 9.23

Pour chacune des équations différentielles à gauche, déterminez lesquelles des fonctions à droite sont des solutions de cette équation.

- | | |
|-------------------------------|-------------------|
| a) $y'' - y = 0$ | I) $y = e^x$ |
| b) $x^2 y'' + 2x y' - 2y = 0$ | II) $y = x^3$ |
| c) $x^2 y'' - 6y = 0$ | III) $y = e^{-x}$ |
| | IV) $y = x^{-2}$ |

Question 9.24

Pour chacune des équations différentielles à gauche, déterminez lesquelles des fonctions à droite sont des solutions de cette équation. k est une constante arbitraire.

- | | |
|--|-------------------|
| a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ | I) $y = kx$ |
| b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x}$ | II) $y = x^k$ |
| c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x \ln x}$ | III) $y = e^{kx}$ |

9.9.2 Équations différentielles séparables**Question 9.25**

La demie-vie du Césium 137 est 30 ans. Le taux de décomposition du Césium 137 est proportionnel à la quantité de Césium 137 présent. Si au départ nous avons 50 mg, combien en restera-t-il au temps t ? Combien de Césium 137 reste-t-il après 50 ans?

Question 9.26

Résolvez les problèmes aux valeurs initiales suivants à l'aide de la méthode de séparation des variables.

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{dy}{dt} = 2y$, $y(0) = 3$ | b) $\frac{dx}{dt} = 3tx^2$, $x(1) = -0.4$ |
| c) $\frac{dh}{dt} = 1000 - h$, $h(0) = 500$ | d) $\frac{dg}{dx} = \frac{5}{1 + 2g}$, $g(0) = 0$ |
| e) $\frac{dq}{dt} = tq^2 \sin(t^2)$, $q(0) = 1$ | f) $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1 + x^2}$, $y(0) = 2$ |
| g) $\frac{dy}{dx} = (y - 1)(x + 2)$, $y(1) = 0$ | h) $\frac{dy}{dx} = \frac{6y^2}{1 + 9x^2}$, $y(0) = 1$ |
| i) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(x)}{xy}$, $y(1) = 2$ | |

Question 9.27

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = 2x + \frac{1}{x} .$$

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.

- b) Si $y = x^2$, trouvez une équation différentielle satisfaite par y .
- c) Résolvez l'équation différentielle en y que vous avez trouvée en (b).
- d) Montrez que nous pouvons obtenir la solution que vous avez trouvée en (a) à partir de la solution que vous avez trouvée en (c).

Question 9.28 

La loi de Fick dit que la diffusion d'une solution au travers de la membrane d'une cellule est décrite par l'équation différentielle

$$c'(t) = \frac{kA}{V} (C - c(t))$$

où $c(t)$ est la concentration de la solution à l'intérieure de la cellule au temps t , A est l'aire de la surface représentée par la membrane de la cellule, V est le volume de la cellule, C est la concentration de la solution à l'extérieure de la cellule (que nous supposons constante), et k est une constante de proportionnalité. Trouvez $c(t)$ si la concentration initiale de la solution dans la cellule est de c_0 .

Question 9.29 

Un médicament est administré de façon continue à un patient à un taux de r mg/hr. Ce médicament est éliminé de l'organisme à un taux qui est proportionnel à la quantité du médicament présent dans l'organisme. Supposons que cette constante de proportionnalité soit α .

- a) Donner et résoudre une équation différentielle qui décrit la quantité $Q(t)$ du médicament dans l'organisme en milligrammes par rapport au temps en heures. Votre solution va dépendre de r et α .
- b) Dessiner le graphe de $Q(t)$. Quelle est la valeur Q_∞ de $Q(t)$ lorsque t tend vers l'infini?
- c) Qu'arrive-t-il à Q_∞ si r double?
- d) Qu'arrive-t-il à Q_∞ si α double?

Question 9.30

Résolvez le problème aux valeurs initiales $\frac{dy}{dt} = y^{1.1}$ avec $y(0) = 100$ à l'aide de la méthode de séparation des variables. Tracez le graphe de cette solution. Trouver les valeurs de t où la solution approche l'infini.

Question 9.31

Considérons le problème aux valeurs initiales $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+x}$ avec $x(0) = 1$.

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème ci-dessus. Vous ne serez pas capable d'exprimer x en fonction de t .
- b) Exprimez t en fonction de x et tracez le graphe de t en fonction de x pour $0 \leq x \leq 10$.
- c) Utilisez (b) pour tracer le graphe de x en fonction de t .

Question 9.32

Considérons l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = 2x - 1$. Utilisez la substitution $y = 2x - 1$ pour réduire l'équation différentiel précédente en une équation différentiel plus simple. Utilisez

cette dernière équation différentielle pour résoudre l'équation différentielle initiale $\frac{dx}{dt} = 2x - 1$.

Question 9.33

Une tasse de café dont la température est de 60°C est laissée dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 22°C .

- D'après la Loi de Newton pour la chaleur, quelle est l'équation différentielle satisfaite par la température $T(t)$ du café au temps t ?
- Résolvez l'équation différentielle que vous avez trouvée en (a).
- Si la température du café est de 40°C après 20 minutes, quelle est la température du café après une heure?

Question 9.34

Une panne d'électricité se produit au milieu de janvier. Votre maison possède seulement un système de chauffage électrique. La panne débute à une heure de l'après-midi. À ce moment, la température à l'intérieur de votre maison est de 20°C . À dix heures du soir, il n'y a toujours pas d'électricité et la température à l'intérieur de votre maison est de 15°C . Vous notez que la température à l'extérieur est de -12°C .

- Si la température T à l'intérieur de votre maison satisfait la loi de la chaleur de Newton, donnez l'équation différentielle satisfaite par cette température. Quelle hypothèse devez-vous faire sur la température extérieure?
- Résolvez l'équation différentielle en (a) et déterminez la température dans la maison à sept heures le matin suivant si la panne n'est toujours pas terminée.
- Étant donné l'hypothèse que vous avez faite en (a), est-ce que la température dans votre maison sera plus élevée ou plus basse que la valeur que vous avez trouvée en (b)?

Question 9.35 🌲

Si $b(t)$ est le nombre d'individus d'une population et $\lambda(t) = 1/(1+t)$ est le taux de reproduction par individu au temps t (le taux de reproduction n'est pas constant), alors

$$\frac{db}{dt} = \lambda(t) b$$

est une équation différentielle qui décrit le nombre d'individus.

- Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.
- Tracez le graphe de la solution avec la condition initiale $b(0) = 10^6$.

Question 9.36 🔧

La **Loi de Torricelli** pour l'écoulement d'un fluide (non visqueux) hors d'un cylindre dont le fond est percé dit que le taux auquel le fluide s'échappe du cylindre est proportionnel à la racine carrée de la profondeur du fluide dans le cylindre. Mathématiquement, si $y(t)$ est la profondeur en centimètres du fluide au temps t en secondes, nous avons que

$$\frac{dy}{dt} = c \sqrt{y}$$

où c est une constante. Si le fluide est de l'eau, alors $c = -2.0 \text{ cm}^{1/2}/\text{s}$. Nous assumons pour le reste de la question que le fluide est de l'eau.

- a) Utilisez la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.
- b) Tracez le graphe de la solution avec la condition initial $y(0) = 16$ (On a initialement 16 cm d'eau dans le cylindre).
- c) Déterminez le temps nécessaire pour vider le cylindre ; c'est-à-dire, pour quelle valeur de t avons-nous $y(t) = 0$?
- d) Quelle serait la profondeur de l'eau dans le cylindre après le nombre de secondes que vous avez trouvé en (c) si la lois qui gouverne l'écoulement de l'eau était

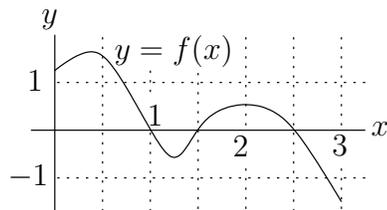
$$\frac{dy}{dt} = -2y .$$

9.9.3 Équations différentielles autonomes

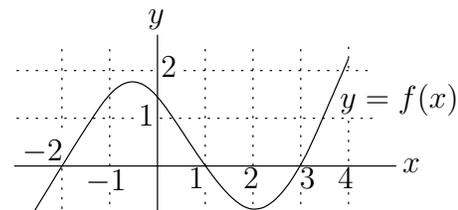
Question 9.37

Pour chacun des graphes de f donnés ci-dessous, tracez le portrait de phases de l'équation différentielle $x' = f(x)$. Déterminez la stabilité des points d'équilibre.

a)



b)



Question 9.38

Trouvez les points d'équilibre de chacune des équations différentielles suivantes et déterminez si possible leur stabilité à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.

a) $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2$ b) $\frac{dy}{dt} = \alpha e^{\beta y} - 1$ avec $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

Question 9.39

Pour chacune des équations différentielles :

I: Trouvez les points d'équilibres et déterminez leur stabilité.

II: Tracez le portrait de phase.

III: Trouvez la solution qui satisfait la condition initiale donnée.

a) $\frac{dx}{dt} = x^2 - 4x + 3$ et $x(0) = 5$ b) $\frac{dx}{dt} = x^2 - 7x + 10$ et $x(0) = 7$

Question 9.40

Une équation différentielle de la forme $x' = f(x)$ possède le portrait de phases suivant.



Les points 2, 4 et 6 sont trois points d'équilibre de l'équation différentielle. Tracez un graphe possible pour la solution x qui possède la condition initiale $x_0 = 5$.

Question 9.41 🌲

Considérons l'équation différentielle autonome $\frac{dy}{dt} = y(y^2 - 6y + 5)$.

- Trouvez les trois points d'équilibre.
- Déterminez la stabilité des points d'équilibre en (a) à l'aide du théorème de stabilité des points d'équilibre.
- Dessinez le portrait de phase du système. Soyez aussi précis que possible.
- Sans résoudre l'équation différentielle, tracez un graphe possible pour la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale $y(0) = 4$.

Question 9.42 🌲

Déterminez les points d'équilibre de l'équation différentielle $\frac{d\theta}{dt} = \theta \cos(\theta)$. Tracez le portrait de phases de l'équation différentielle $\frac{d\theta}{dt} = \theta \cos(\theta)$ pour $-\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

Question 9.43 🌲

Trouvez les points d'équilibre de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x^2$. Tracez le graphe de $f(x) = x^2$ et le portrait de phases de ce système. Déterminez la stabilité des points d'équilibre. Est-ce que cela contredit le théorème de stabilité des points d'équilibre?

Question 9.44 🌲 👁

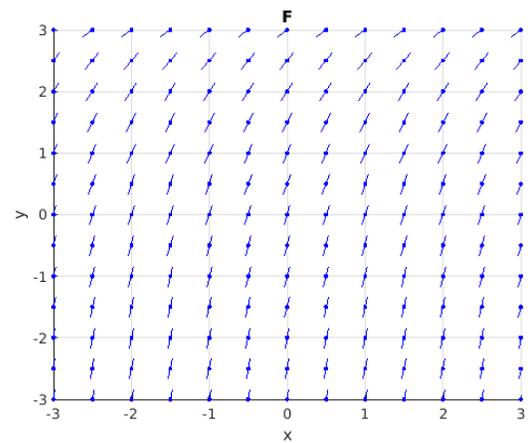
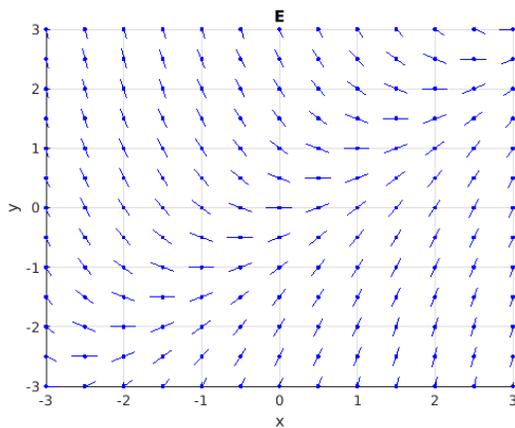
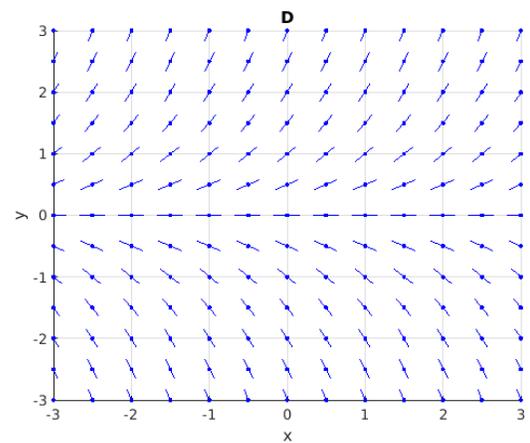
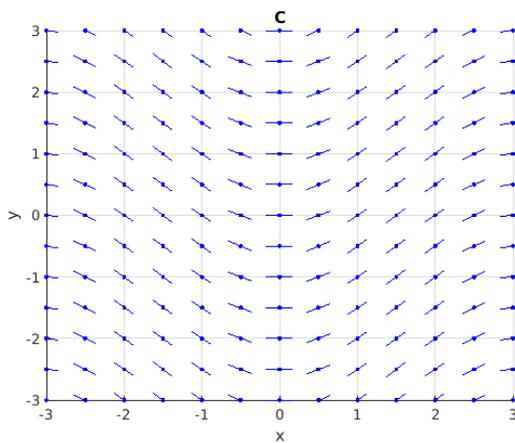
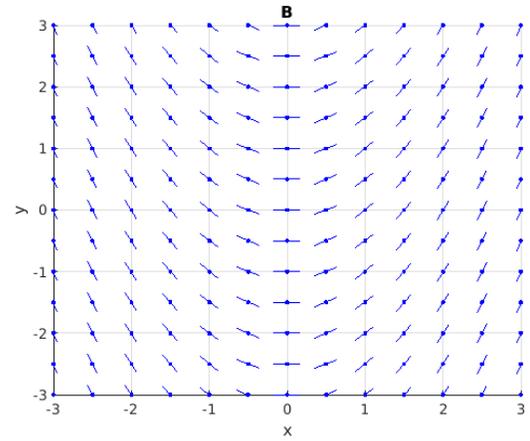
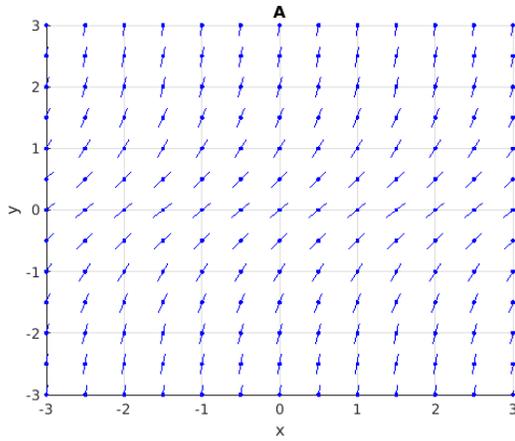
Est-il possible d'avoir un portrait de phases avec deux points d'équilibre asymptotiquement stables qui sont côte à côte? C'est-à-dire, qui ne sont pas séparés par d'autres points d'équilibre.

Suggestion : Justifiez votre réponse à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

Question 9.45

Associez à chacune des équations différentielles suivantes un des champs de pentes ci-dessous.

- | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------|
| a) $y' = \sin(x)$ | b) $y' = y$ | c) $y' = x$ |
| d) $y' = 4 - y$ | e) $y' = 1 + y^2$ | f) $y' = x - y$ |

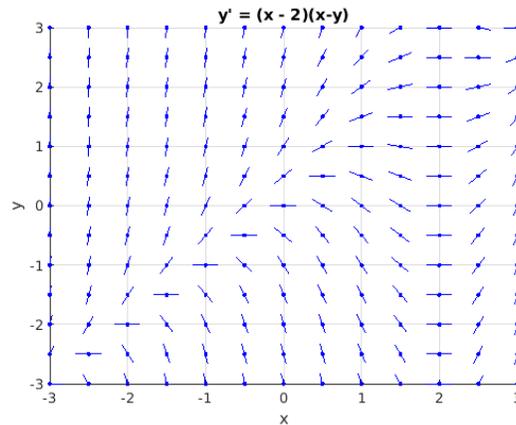


Question 9.46

Le champ de pentes de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = (x - 2)(x - y)$$

est donné ci-dessous.



- Tracez (de façon aussi précise que possible) le graphe de la solution qui passe par le point $(0, 0)$.
- Pour quelle valeur de x la solution particulière qui passe par le point $(0, 0)$ a-t-elle un minimum local? Un maximum local? Justifiez vos réponses.
- Pour quelles régions du champs de pentes avons-nous que la pente est positive. Justifiez votre réponse en utilisant seulement l'équation différentielle; sans utiliser le champ de pentes.

Question 9.47

Considérons l'équation différentielle $y' = -y/x$.

- Dessinez le champ de pentes de cet équation différentielle.
- Dessinez sur la même figure que celle pour votre champ de pentes plusieurs solutions de cette équation différentielle.
- Trouvez la solution générale de l'équation différentielle.
- Que ce passe-t-il lorsque $x = 0$?

9.9.4 Applications

Question 9.48 🔧

En chimie, une **équation de réaction-diffusion** est une équation différentielle qui décrit la concentration d'un produit chimique sous l'effet d'une réaction chimique et de la diffusion. Un exemple simple d'une telle équation est

$$\frac{dC}{dt} = \beta(\gamma - C) + \frac{C}{2 + C}$$

où le terme $\beta(\gamma - C)$ représente la diffusion et le terme $\frac{C}{2 + C}$ représente la réaction chimique. les unités de la constante β sont les m^{-1} et les unités de la constante γ sont les mol/l. Si $\beta = 1$ et $\gamma = 5$, trouvez les points d'équilibre et déterminez leur stabilité.

Question 9.49 🌲

L'équation différentielle suivante décrit la concentration $C(t)$ d'un produit chimique au temps

t dans une cellule.

$$\frac{dC}{dt} = \beta(\Gamma - C) + 0.5C . \quad (9.9.1)$$

Le terme $0.5C$ représente la réaction en réponse à un facteur externe (la cellule fabrique le produit chimique) et le terme $\beta(\Gamma - C)$ représente la diffusion au travers de la membrane de la cellule. C'est un exemple d'une **équation de réaction diffusion**.

Répondez aux questions suivantes pour $\beta = 1.0 \text{ min}^{-1}$ et $\Gamma = 5.0 \text{ mol/l}$.

- Quelles sont les points d'équilibre ?
- Utilisez le théorème sur la stabilité des points d'équilibre pour déterminez la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvés en (a).
- Tracez le portrait de phases pour cette équation différentielle.
- Dessinez un champ de pentes et tracez quelques solutions.
- Quelles seraient les points d'équilibre s'il n'y avait pas le terme de réaction (i.e. $0.5C$) dans l'équation différentielle ci-dessus. ?

Question 9.50

Un troupeau de gnous (de la famille des antilopes) habite une réserve faunique. La population initiale est de 1000 gnous. Après un an, la population est de 1100 gnous. La population satisfait le modèle logistique de croissance avec une capacité optimale pour le milieu de 1800 gnous. Combien de temps faut-il pour que la population atteigne 1500 gnous ?

Question 9.51

Pour une certaine population, le nombre d'individus $N(t)$ par km^2 au temps t satisfait

$$\frac{dN}{dt} = \frac{5N^2}{1+N^2} - 2N . \quad (9.9.2)$$

- Quelles sont les points d'équilibre ?
- Utilisez le théorème de stabilité des points d'équilibre pour déterminer la stabilité des points d'équilibre que vous avez trouvés en (a).
- Tracez le portrait de phases pour cette équation différentielle.
- Dessinez un champ de pentes et tracez quelques solutions.
- Déterminez le seuil de la population pour que celle-ci augmente ?

Question 9.52

Le modèle suivant est appelé le modèle de méta-population de Levins. Pour étudier une population animale habitant un territoire, nous divisons le territoire en petites sections. Soit p la fraction des sections qui sont habitées et d la fractions des sections qui sont détruites (e.g. par une développeur immobilier). Nous supposons que les sections détruites ne sont pas habitées (et habitables). La fraction $1 - p$ est donc la fraction des sections qui ne sont pas habitées et $1 - p - d$ est la fraction des sections qui ne sont pas habitées mais habitables.

La fraction de sections habitées est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dt} = cp(1 - d - p) - mp$$

où $m = 1$ est le taux auquel les animaux d'une section habitée quittent cette section et $c = 2$ est le taux auquel les animaux s'installent dans une section inhabitée et habitable.

Pour que le modèle soit consistant, il faut que $0 \leq p \leq 1$ et $0 \leq d \leq 1$. De plus, il faut que $1 - p - d \geq 0$. Il faut donc avoir en fait que $0 \leq p \leq 1 - d$.

a) Trouvez les deux points d'équilibre de l'équation différentielle. Un des points d'équilibre va dépendre du paramètre d . Pour quelles valeurs de d ce point d'équilibre a-t-il un sens biologique ?

b) Tracez le graphe de la fonction qui génère l'équation différentielle et tracez le portrait de phases lorsque $d = 1/4$ et $d = 3/4$.

c) Utilisez le test de la dérivée pour déterminer la stabilité des deux points d'équilibres. La stabilité va dépendre de d .

d) Est-ce que la population va survivre si $1/4$ des sections (i.e. $d = 1/4$) sont détruites ? Si $3/4$ des sections sont détruites ?

Question 9.53

La concentration de sel dans un réservoir de 1000 litres d'eau salée est de 0.025 kg par litre. De l'eau salée dont la concentration de sel est de 0.01 kg par litre est ajoutée au réservoir à raison de 10 litres par minute. De plus, 10 litres d'eau salée par minute s'échappe du réservoir. Si le contenu du réservoir est bien mélangé, combien de temps s'écoule-t-il avant que d'atteindre une concentration de 0.02 kg de sel par litre ?

Question 9.54

Un réservoir contient 1000 litres d'eau pure. Une saumure contenant 0.1 kg de sel par litre d'eau est versée dans le réservoir au taux de 5 litres par minute. Une saumure contenant 0.05 kg de sel par litre est aussi versée dans le réservoir au taux de 15 litres par minute. En supposant que le contenu du réservoir est toujours bien mélangé et que le réservoir perd 20 litres par minutes, quelle est la quantité de sel dans le réservoir après t minutes ? quelle est la concentration de sel dans le réservoir après t minutes ?

Question 9.55

Considérons l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = ax - x^2$ où a est un paramètre.

a) Trouvez les points d'équilibre de cette équation différentielle. Un des points d'équilibre devrait dépendre de a .

b) Dans un même système de coordonnées, tracez le graphe de chacun des points d'équilibre en fonction de a pour a au voisinage de l'origine. Utilisez une ligne pleine pour les points d'équilibre stables et une ligne hachurée pour les points d'équilibre instables.

c) Que ce passe-t-il au voisinage de l'origine ? Ce genre de phénomène est appelé bifurcation. Dans le cas présent, nous parlons de bifurcation transcritique.

Question 9.56

Considérons l'équation logistique

$$\frac{db}{dt} = b(1 - b) - hb \quad (9.9.3)$$

pour une population animale où h est la fraction de la population qui a été récolté.

- Trouvez les points d'équilibre de (9.9.3). Un des points d'équilibre va dépendre de h .
- Dans un même système de coordonnées, tracez le graphe de chacun des points d'équilibre en fonction de h pour $0 \leq h \leq 2$. Utilisez une ligne pleine pour les points d'équilibre stable et une ligne hachurée pour les point d'équilibre instable. Même s'ils n'ont pas de sens biologique, inclure les valeurs négative des points d'équilibre.
- Quelle type de bifurcation obtenez-vous ?

9.9.5 Méthode d'Euler

Question 9.57

Considérons l'équation différentielle $y'(x) = f(x)$ avec $y(0) = 0$. Expliquez pourquoi l'approximation de $y(x)$ donnée par la méthode d'Euler correspond à une somme de Reimann à droite associée à l'intégrale $\int_0^x f(t) dt$.

Question 9.58

- Utiliser la méthode d'Euler pour trouver une approximation de la solution $y(t)$ de

$$\frac{dy}{dt} = 1/t$$

à $t = 2$. Commencer à $(t, y) = (1, 0)$ et utiliser 10 sous-intervalles.

- Trouver la valeur exacte de $y(t)$ à $t = 2$.
- Est-ce que votre approximation de $y(t)$ à $t = 2$ est plus petite ou plus grande que la valeur exacte à $t = 2$. Utiliser le champ de pentes (i.e. la courbure de la solution) pour expliquer la différence.

Question 9.59

Utilisez la méthode d'Euler avec 10 sous-intervalles pour résoudre numériquement l'équation différentielle

$$y' = \frac{y+t}{t}, \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$y(1) = 0$$

Est-ce que les valeurs données par la méthodes d'Euler sont des surestimations ou des sous-estimations de la solution y ?

Question 9.60

- Utilisez la méthode d'Euler avec $n = 10$ sous-intervalles pour trouver une approximation de $y(1)$ où y est la solution de l'équation différentielle $y' = \frac{3x^2}{2y}$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.
- Trouvez la solution exacte de l'équation différentielle $y' = \frac{3x^2}{2y}$ avec $y(0) = 1$.
- Quelle est l'erreur absolue et l'erreur relative de l'approximation de $y(1)$ trouvée en (a) ?



Vecteurs | 10

Dans ce chapitre, nous revoyons rapidement quelques notions de géométrie analytique que le lecteur devrait avoir étudié à l'école secondaire. Une grande partie des concepts présentés dans ce chapitre seront utilisés lors de l'étude des fonctions de plusieurs variables à partir du chapitre 13.

10.1 Définition

Définition 10.1.1

Un **vecteur** du plan \mathbb{R}^2 est une flèche qui part de l'origine $\mathbf{0} = (0, 0)$ pour se terminer en un point $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. Puisque chaque vecteur est associé à un unique point \mathbf{p} et vice-versa, le vecteur est dénoté par \mathbf{p}

De même, un **vecteur** de l'espace \mathbb{R}^3 est une flèche qui part de l'origine $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ pour se terminer en un point $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Puisque chaque vecteur est associé à un unique point \mathbf{p} et vice-versa, le vecteur est dénoté par \mathbf{p}

La définition de vecteur pourrait être généralisée à l'espace \mathbb{R}^n pour $n > 3$. Cela n'est cependant pas nécessaire pour le chapitre présent. Nous aborderons les espace de dimensions plus grande que 3 au chapitre 11 sur l'algèbre linéaire.

Puisqu'il y a une bijection entre les vecteurs et les points, le contexte déterminera comment il faut interpréter \mathbf{p} .

Exemple 10.1.2

Nous retrouvons à la figure 10.1 la représentation graphique du vecteur $\mathbf{p} = (2, 5, 3)$. ♣

Définition 10.1.3

La **longueur (euclidienne)** du vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ est

$$\|\mathbf{p}\| \equiv \sqrt{p_1^2 + p_2^2},$$

alors que celle du vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ est

$$\|\mathbf{p}\| \equiv \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

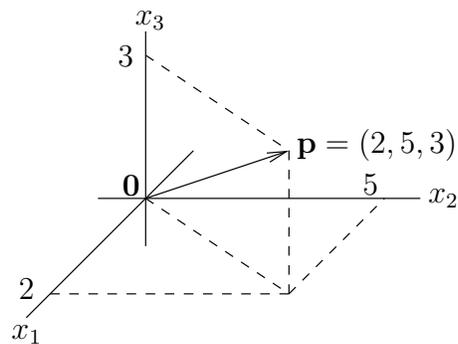


FIGURE 10.1 – Représentation graphique du vecteur $\mathbf{p} = (2, 5, 3)$ de l'espace

Cette définition découle du théorème de Pythagore qui affirme que le carré de l'hypoténuse d'un triangle droit est égal à la somme des carrés des deux côtés adjacents à l'angle droit. La justification de la formule pour la longueur d'un vecteur dans \mathbb{R}^3 est illustrée à la figure 10.2.

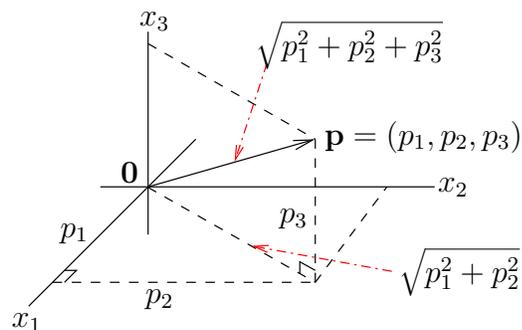


FIGURE 10.2 – Longueur du vecteur $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$

10.2 Opérations sur les vecteurs

Nous pouvons définir des opérations algébriques sur les vecteurs comme ils en existent pour les nombres. De plus, nous pouvons aussi définir des opérations sur les vecteurs qui ont une importante signification géométrique comme nous verrons dans les prochaines sections.

Nous commençons par définir deux opérations algébriques sur les vecteurs : le produit d'un vecteur par un nombre réel et la somme de vecteurs.

Par la suite, nous définirons deux opérations sur les vecteurs, le produit scalaire et le produit vectoriel, qui jouent des rôles majeurs dans l'analyse géométrique.

10.2.1 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition 10.2.1

Soit $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et ρ est un nombre réel. Le **produit** de ρ avec le vecteur \mathbf{p} est le vecteur \mathbf{q} défini par la formule suivante.

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{p} = \rho(p_1, p_2) = (\rho p_1, \rho p_2) .$$

De même, soit $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et ρ est un nombre réel. Le **produit** de ρ avec le vecteur \mathbf{p} est le vecteur \mathbf{q} défini par la formule suivante.

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{p} = \rho(p_1, p_2, p_3) = (\rho p_1, \rho p_2, \rho p_3) .$$

Le vecteur \mathbf{q} est de longueur $|\rho| \|\mathbf{p}\|$ et pointe dans la même direction que \mathbf{p} si $\rho > 0$ et dans la direction opposée à \mathbf{p} si $\rho < 0$.

Exemple 10.2.2

Le dessin du vecteur $\mathbf{q} = -2\mathbf{p}$, où \mathbf{p} est le vecteur donné à l'exemple 10.1.2, est donné à la figure 10.3. Nous avons

$$\mathbf{q} = -2\mathbf{p} = -2(2, 5, 3) = (-4, -10, -6) .$$

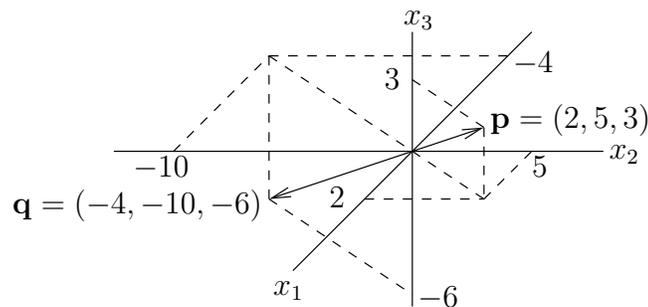


FIGURE 10.3 – Représentation du vecteur $\mathbf{q} = -2\mathbf{p}$ où le vecteur $\mathbf{p} = (2, 5, 3)$ est représenté à la figure 10.1

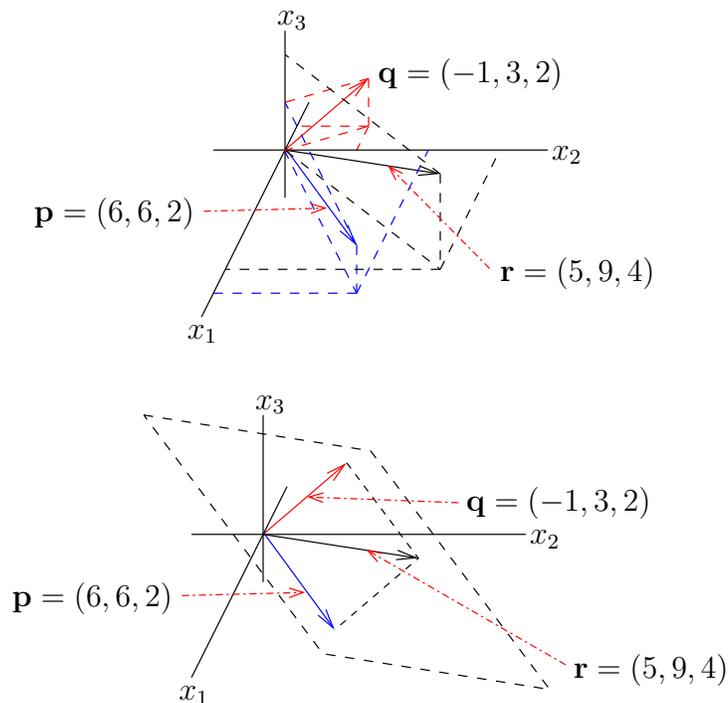


FIGURE 10.4 – Ces dessins illustrent l’aspect géométrique de la somme des deux vecteurs donnés à l’exemple 10.2.4

10.2.2 Somme de vecteurs

Définition 10.2.3

Soit $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$. La **somme** des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est le vecteur \mathbf{r} défini par la formule suivante.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1, p_2) + (q_1, q_2) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2) .$$

De même, soit $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. La **somme** des deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est le vecteur \mathbf{r} défini par la formule suivante.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1, p_2, p_3) + (q_1, q_2, q_3) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3) .$$

Exemple 10.2.4

Le résultat $\mathbf{r} = (5, 9, 4)$ de la somme des vecteurs $\mathbf{p} = (6, 6, 2)$ et $\mathbf{q} = (-1, 3, 2)$ est illustré à la figure 10.4.

Remarquons que les trois vecteurs \mathbf{p} , \mathbf{q} et \mathbf{r} sont tous dans le même plan. Nous verrons à la section 10.2.5 sur le produit vectoriel comment nous pouvons facilement vérifier cette affirmation. ♣

10.2.3 Notation vectorielle classique

Les vecteurs suivants sont fondamentaux en analyse vectorielle. Pour cette raison, ils ont leur propre notation.

Définition 10.2.5

Dans le plan, les vecteurs $\mathbf{i} = (1, 0)$ et $\mathbf{j} = (0, 1)$ sont appelés les **vecteurs canoniques**.

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, alors $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j}$.

De même, dans l'espace \mathbb{R}^3 , les **vecteurs canoniques** sont les vecteurs $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, alors $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$.

Dans les livres de mathématiques, la notation \mathbf{e}_1 pour \mathbf{i} , \mathbf{e}_2 pour \mathbf{j} et \mathbf{e}_3 pour \mathbf{k} est plus souvent utilisée.

10.2.4 Produit scalaire

Alors que le produit d'un vecteur par un nombre réel et l'addition de vecteurs ont un rôle principalement algébrique, le produit scalaire est l'une des deux opérations sur les vecteurs qui a un usage principalement géométrique ; l'autre opération étant le produit vectoriel.

Définition 10.2.6

Le **produit scalaire** de deux vecteurs, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, est défini par la formule

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1q_1 + p_2q_2 .$$

De même, Le **produit scalaire** de deux vecteurs, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, est défini par la formule

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 .$$

Le produit scalaire des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est aussi dénoté $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ quand cela ne cause pas de confusion.

Pourquoi définir un produit de deux vecteurs comme nous venons de le faire ? N'aurions-nous pas pu définir le produit de deux vecteurs composante par composante comme nous l'avons fait pour la somme de deux vecteurs ? En fait, nous aurions pu le faire mais cela n'a pas d'intérêt car il n'y a pas d'interprétations géométriques du produit de deux vecteurs composante par composante. Par contre, le produit scalaire défini ci-dessus a une interprétation géométrique très importante.

Définition 10.2.7

Le cosinus de l'angle entre les vecteurs non nuls \mathbf{p} et \mathbf{q} (et ainsi l'angle entre ces vecteurs) est déterminé par

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|} . \quad (10.2.1)$$

C'est cette définition qui fait le lien entre l'opération algébrique qu'est le produit scalaire de deux vecteurs et l'interprétation géométrique que nous avons des vecteurs.

Remarque 10.2.8

Remarquons que la longueur d'un vecteur est la racine carrée du produit scalaire de ce vecteur par lui-même. Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, alors

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \|\mathbf{p}\|^2.$$

Si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$, alors le cosinus entre les deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est 0. Nous avons donc que l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} est $\pi/2$ ($+n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$). Ceci justifie la définition suivante. ♠

Définition 10.2.9

Soit \mathbf{p} et \mathbf{q} , deux vecteurs. Le vecteur \mathbf{p} est **perpendiculaire** ou **orthogonal** au vecteur \mathbf{q} (et vice-versa) si $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$.

Remarque 10.2.10

Vous avez probablement appris que le produit des pentes de deux droites orthogonales est -1 . Il est facile à l'aide des vecteurs de vérifier cette énoncé. Supposons que $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ soit un vecteur parallèle à une droite ℓ_1 et que $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ soit un vecteur parallèle à une droite ℓ_2 . Si les droites ℓ_1 et ℓ_2 sont perpendiculaires, alors il en est de même pour les vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} , et vice-versa. Nous avons donc

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{p_2}{p_1} = -\frac{q_1}{q_2}.$$

Puisque $m_1 = \frac{p_2}{p_1}$ est la pente de la droite ℓ_1 et $m_2 = \frac{q_2}{q_1}$ est celle de la droite ℓ_2 , nous obtenons bien que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. ♠

Remarque 10.2.11

Nous justifierons ci-dessous la définition 10.2.7 dans le plan. La justification est identique pour les vecteurs dans l'espace.

Commençons par un petit rappel. Considérons le triangle $\triangle ABC$ représenté à la figure 10.5. La **loi des cosinus** dit que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

Soit $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$. De la loi des cosinus, nous déduisons que

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|\cos(\alpha) \quad (10.2.2)$$

où α est l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} (figure 10.6).

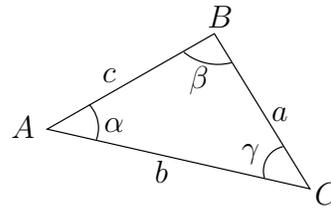


FIGURE 10.5 – La loi des cosinus dit que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

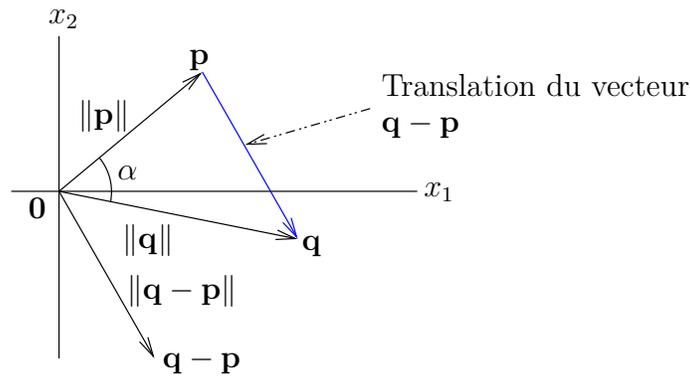


FIGURE 10.6 – Interprétation géométrique du produit scalaire

Puisque $\mathbf{q} - \mathbf{p} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$, nous avons que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 &= (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 \\ &= (p_1^2 + p_2^2) + (q_1^2 + q_2^2) - 2(p_1q_1 + p_2q_2) \\ &= \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle . \end{aligned}$$

Ainsi, (10.2.2) devient

$$\|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 2\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|\cos(\alpha) .$$

Après avoir simplifié les termes identiques de chaque côté de l'égalité, nous obtenons

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|\cos(\alpha) .$$

Si nous isolons $\cos(\alpha)$, nous retrouvons la définition 10.2.7. ♠

Remarque 10.2.12

Il est facile de démontrer la loi des cosinus en utilisant les coordonnées cartésiennes.

Pour démontrer la loi des cosinus pour l'angle au sommet C d'un triangle $\triangle ABC$, nous plaçons le sommet C à l'origine et le sommet A (ou B) sur l'axe des x_1 comme cela est fait à la figure 10.7.

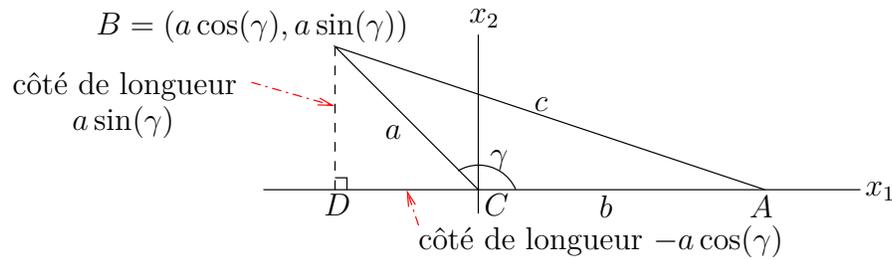


FIGURE 10.7 – Démonstration de la loi des cosinus

Les coordonnées du point B sont donc $(a \cos(\gamma), a \sin(\gamma))$ et celle du point A sont $(b, 0)$. Le triangle $\triangle DAB$ a un angle droit au sommet D . Le théorème de Pythagore nous donne donc

$$c^2 = (a \sin(\gamma))^2 + (-a \cos(\gamma) + b)^2 .$$

Si nous développons le côté droit de cette équation, nous trouvons

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 \sin^2(\gamma) + a^2 \cos^2(\gamma) - 2ab \cos(\gamma) + b^2 \\ &= a^2 (\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma)) + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \end{aligned}$$

puisque $\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) = 1$. ♠

10.2.5 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération sur les vecteurs qui a un usage principalement géométrique.

Définition 10.2.13

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ sont deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires (i.e. dont l'un n'est pas un multiple de l'autre), nous définissons le **produit vectoriel** des vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} comme étant le vecteur

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = (p_2q_3 - p_3q_2) \mathbf{i} + (p_3q_1 - p_1q_3) \mathbf{j} + (p_1q_2 - p_2q_1) \mathbf{k} . \quad (10.2.3)$$

Donc $\mathbf{m} = (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1)$.

Nous fournirons à la remarque 11.4.23 de la section 11.4 une formule symbolique simple pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs.

Le vecteur qui résulte du produit vectoriel de deux vecteurs a une relation géométrique très particulière avec les deux vecteurs du produit.

Proposition 10.2.14

Le vecteur $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} .

Pour vérifier que $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est perpendiculaire à \mathbf{p} , il suffit de vérifier que $\langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{p} \rangle = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{p} \rangle &= \langle (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1), (p_1, p_2, p_3) \rangle \\ &= p_1(p_2q_3 - p_3q_2) + p_2(p_3q_1 - p_1q_3) + p_3(p_1q_2 - p_2q_1) \\ &= p_1p_2q_3 - p_1p_3q_2 + p_2p_3q_1 - p_1p_2q_3 + p_1p_3q_2 - p_2p_3q_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, nous pouvons vérifier que $\langle (\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle = 0$.

Définition 10.2.15

La direction du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est déterminée par la **règle de la main droite**. C'est-à-dire, si la paume de votre main droite entoure la droite qui contient le vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ de telle sorte que vos doigts indiquent la plus petite direction angulaire de \mathbf{p} à \mathbf{q} , alors votre pouce pointe dans la direction de $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ (figure 10.8).

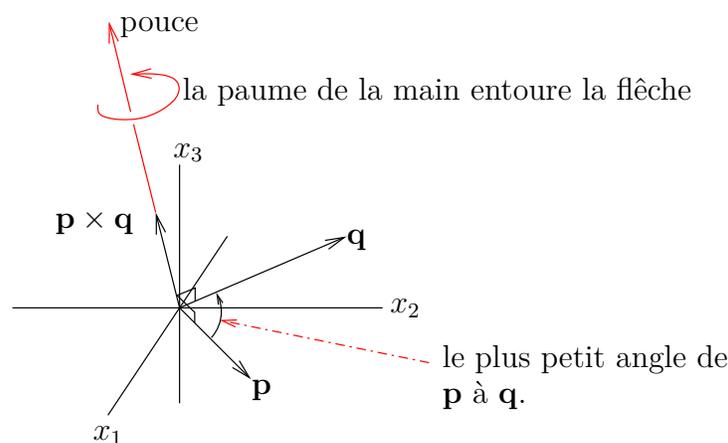


FIGURE 10.8 – Le vecteur obtenu du produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal au plan généré par ces deux vecteurs.

Exemple 10.2.16

Nous pouvons facilement vérifier avec la règle de la main droite que $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ et $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. ♣

Quelques manipulations algébriques vont nous permettre de trouver une formule pour la longueur du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$. Soit θ , le plus petit angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} (donc $0 < \theta < \pi$). Nous avons que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \cos(\theta).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\|^2 &= (p_2q_3 - p_3q_2)^2 + (p_3q_1 - p_1q_3)^2 + (p_1q_2 - p_2q_1)^2 \\ &= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)^2 \\ &= \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 - (\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle)^2 = \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 \cos^2(\theta) \\ &= \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = \|\mathbf{p}\|^2\|\mathbf{q}\|^2 \sin^2(\theta).\end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 10.2.17

$$\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \sin(\theta)$$

où $0 \leq \theta < \pi$ est l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} .

Exemple 10.2.18

Nous avons que le plus petit angle entre les vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} est $\frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{i} \times \mathbf{j}\| = \|\mathbf{i}\|\|\mathbf{j}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

comme il se doit. ♣

Il y a une interprétation géométrique très intéressante de la longueur du vecteur obtenu d'un produit vectoriel. Comme nous pouvons constater à partir du dessin à la figure 10.9, $\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \sin(\theta)$ est l'aire du parallélogramme définie par \mathbf{p} et \mathbf{q} . La longueur du vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est donc l'aire de ce parallélogramme.

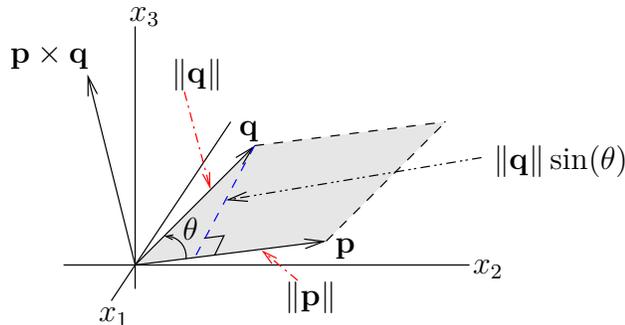


FIGURE 10.9 – L'aire du parallélogramme définie par les deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} est $\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \sin(\theta)$.

10.3 Équation d'une droite

Nous pouvons utiliser les vecteurs pour décrire les droites.

La droite qui passe par le point \mathbf{p} et qui est parallèle au vecteur \mathbf{q} (figure 10.10) est formé des points \mathbf{x} où

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q} \quad (10.3.1)$$

et α prend toutes les valeurs réelles.

Rappelons que nous utilisons la même notation pour désigner un point ou un vecteur. Nous pouvons donc faire référence au point \mathbf{x} et à ses coordonnées à un certain moment et traiter \mathbf{x} comme un vecteur à d'autres moments.

Définition 10.3.1

La formule (10.3.1) est une **représentation vectorielle** de la droite qui passe par \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} .

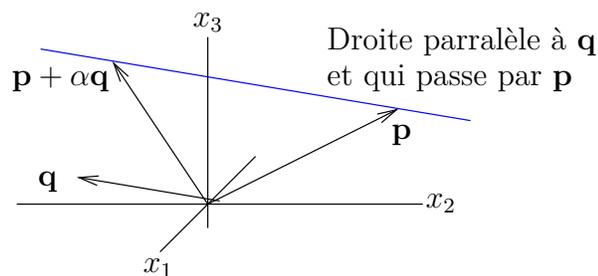


FIGURE 10.10 – Représentation vectorielle d'une droite

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, les composantes de la représentation vectorielle $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}$ sont

$$x_1 = p_1 + \alpha q_1, \quad x_2 = p_2 + \alpha q_2 \quad \text{et} \quad x_3 = p_3 + \alpha q_3. \quad (10.3.2)$$

Définition 10.3.2

la formule (10.3.2) est une **représentation paramétrique** de la droite qui passe par \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} . Le **paramètre** est α .

Si nous supposons que q_1 , q_2 et q_3 sont non nuls et que nous résolvons chacune des trois équations de la représentation paramétrique pour α , nous obtenons

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3}. \quad (10.3.3)$$

Si q_2 et q_3 sont non nuls mais $q_1 = 0$, nous obtenons

$$\frac{x_2 - p_2}{q_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3} \quad \text{et} \quad x_1 = p_1. \quad (10.3.4)$$

C'est une droite dans le plan $x = p_1$. Le lecteur est invité à analyser les autres cas possibles.

Définition 10.3.3

Les formules (10.3.3) et (10.3.4) sont des **représentations standard** d'une droite qui passe par \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} .

Remarque 10.3.4

Nous pouvons déduire à partir du dessin à la figure 10.11 que, dans le plan, les points \mathbf{x} de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et qui est perpendiculaire au vecteur \mathbf{q} sont donnés par

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0 .$$

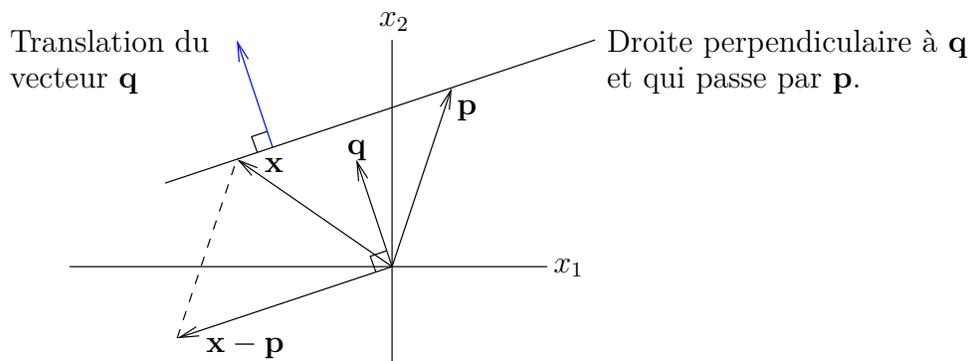


FIGURE 10.11 – Les points \mathbf{x} d'une droite perpendiculaire à un vecteur \mathbf{q} et passant par un point \mathbf{p} satisfont $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$.

Exemple 10.3.5

Si $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{q} = (-1, 2, 2)$, alors l'ensemble des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de la droite passant par \mathbf{p} et parallèle à \mathbf{q} est donnée par la relation

$$(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q} = (1, 2, 3) + \alpha(-1, 2, 2) = (1 - \alpha, 2 + 2\alpha, 3 + 2\alpha)$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons donc la représentation paramétrique

$$x_1 = 1 - \alpha, \quad x_2 = 2 + 2\alpha \quad \text{et} \quad x_3 = 3 + 2\alpha$$

et la représentation standard

$$-(x_1 - 1) = \frac{x_2 - 2}{2} = \frac{x_3 - 3}{2} .$$

**Exemple 10.3.6**

La représentation classique d'une droite dans le plan est $x_2 = mx_1 + b$ où m est la pente de la droite et b est l'abscisse à l'origine.

L'exemple suivant illustre la relation entre les représentations d'une droite que nous venons d'introduire et la représentation classique de cette droite.

Soit $\mathbf{p} = (2, 3)$ et $\mathbf{q} = (4, 3)$. Pour trouver l'équation classique de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et qui est parallèle au vecteur \mathbf{q} , il faut premièrement trouver la pente de la droite qui contient le vecteur \mathbf{q} . La pente de cette droite est $3/4$. La forme **point-pente** de la droite cherchée est donc

$$x_2 - 3 = \frac{3}{4}(x_1 - 2).$$

Nous obtenons la représentation classique

$$x_2 = \frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{2}$$

de la droite.

L'ensemble des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} est donnée par

$$(x_1, x_2) = \mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{q} = (2, 3) + \alpha(4, 3) = (2 + 4\alpha, 3 + 3\alpha).$$

Une représentation paramétrique de la droite qui passe par le point \mathbf{p} et est parallèle au vecteur \mathbf{q} est donc $x_1 = 2 + 4\alpha$ et $x_2 = 3 + 3\alpha$. De la première équation, nous obtenons que $\alpha = (x_1 - 2)/4$. Si nous substituons cette expression pour α dans l'équation $x_2 = 3 + 3\alpha$, nous obtenons

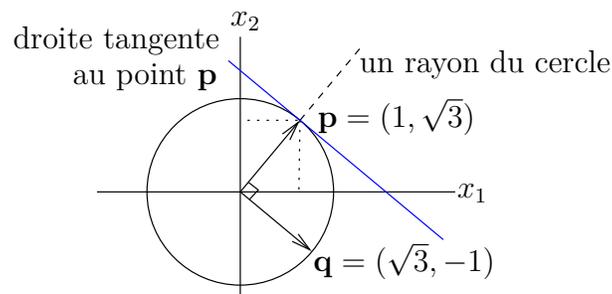
$$x_2 = 3 + 3\left(\frac{x_1 - 2}{4}\right) = 3 + \frac{3}{4}(x_1 - 2) = \frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{2},$$

la représentation classique de la droite. 

10.3.1 Droites tangentes

Exemple 10.3.7

Trouvons l'équation de la droite tangente au point $\mathbf{p} = (1, \sqrt{3})$ du cercle de rayon 2 centré à l'origine



Nous présentons trois méthodes pour résoudre ce problème.

a) Nous remarquons que le vecteur \mathbf{p} est perpendiculaire à la droite tangente au cercle car \mathbf{p} représente un rayon du cercle. Les points $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de la droite tangente cherchée satisfont donc

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle (x_1 - 1, x_2 - \sqrt{3}), (1, \sqrt{3}) \rangle = (x_1 - 1) + \sqrt{3}(x_2 - \sqrt{3}) = 0.$$

Si nous résolvons pour x_2 , nous obtenons

$$x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}};$$

une représentation classique pour la droite tangente.

b) Une autre méthode pour résoudre notre problème fait appel à la représentation paramétrique d'une droite. Premièrement, nous trouvons un vecteur parallèle à la tangente au cercle au point \mathbf{p} . C'est-à-dire que nous cherchons un vecteur perpendiculaire au vecteur $\mathbf{p} = (1, \sqrt{3})$. Il est facile de voir que $\mathbf{q} = (\sqrt{3}, -1)$ est perpendiculaire au vecteur \mathbf{p} car $\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = 0$. Ainsi, les points $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de la droite tangente au cercle au point \mathbf{p} satisfont

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}.$$

Une représentation paramétrique de la droite tangente au cercle au point $(1, \sqrt{3})$ est alors

$$x_1 = 1 + \alpha \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{3} - \alpha$$

pour tout nombre réel α .

Si nous résolvons pour α la première équation de la représentation paramétrique, nous trouvons $\alpha = (x_1 - 1)/\sqrt{3}$. Si nous substituons cette expression pour α dans la deuxième équation de la représentation paramétrique, nous obtenons une représentation classique pour l'équation d'une droite tangente.

$$x_2 = \sqrt{3} - \frac{x_1 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

c) Finalement, la façon traditionnelle de trouver l'équation de la tangente au point \mathbf{p} est de commencer par trouver la pente de la tangente. Pour cela, nous notons que la pente de la droite qui contient le vecteur \mathbf{p} est $m_1 = \sqrt{3}$. Comme la droite tangente est perpendiculaire à la droite qui contient le vecteur \mathbf{p} , sa pente est donc

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

La forme point-pente de l'équation de la tangente au cercle au point \mathbf{p} est donc

$$x_2 - \sqrt{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x_1 - 1).$$

Donc

$$x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$



10.3.2 Intersection de deux droites

Dans le plan, deux droites non parallèles se coupent en un point. Dans l'espace, deux droites non parallèles ne se coupent généralement pas en un point. L'exemple suivant illustre une méthode pour trouver l'intersection de deux droites si cette intersection existe.

Exemple 10.3.8

Trouvons l'intersection (s'il y en a une) des droites ℓ et ℓ' données par les représentations paramétriques suivantes. La droite ℓ possède la représentation paramétrique

$$x_1 = 2s - 3, \quad x_2 = s - 1 \quad \text{et} \quad x_3 = -s + 5$$

pour $s \in \mathbb{R}$, et la droite ℓ' possède la représentation paramétrique

$$x_1 = t - 3, \quad x_2 = -2t + 1 \quad \text{et} \quad x_3 = t - 1,$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

Ces deux droites ne sont pas parallèles car ℓ est parallèle au vecteur $(2, 1, -1)$ et ℓ' au vecteur $(1, -2, 1)$, et ces deux vecteurs ne sont pas parallèles. Pour que ces deux droites se coupent en un point (x_1, x_2, x_3) commun, il faut qu'ils existent s et t tels que

$$t - 3 = 2s - 3, \quad -2t + 1 = s - 1 \quad \text{et} \quad t - 1 = -s + 5.$$

La première équation donne $t = 2s$. Si nous substituons cette expression pour t dans la deuxième équation, alors $-4s + 1 = s - 1$ et donc $s = 2/5$. Nous obtenons de $t = 2s$ que $t = 4/5$. Malheureusement, si nous substituons $s = 2/5$ dans la troisième équation, nous obtenons $t = 28/5$. Il n'y a donc pas de valeurs de s et t qui satisfont les trois équations simultanément. Les deux droites ne se coupent pas. 

10.4 Équation d'un plan

Proposition 10.4.1

Le plan qui passe par un point \mathbf{p} et qui est perpendiculaire au vecteur \mathbf{m} (figure 10.12) est l'ensemble des points \mathbf{x} tels que le vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ est perpendiculaire à \mathbf{m} . Si nous utilisons le produit scalaire, nous pouvons définir ce plan comme l'ensemble des points \mathbf{x} tels que

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = 0.$$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, la formule donnée à la proposition (10.4.1) devient

$$m_1(x_1 - p_1) + m_2(x_2 - p_2) + m_3(x_3 - p_3) = 0 \tag{10.4.1}$$

ou simplement

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 - d = 0 \tag{10.4.2}$$

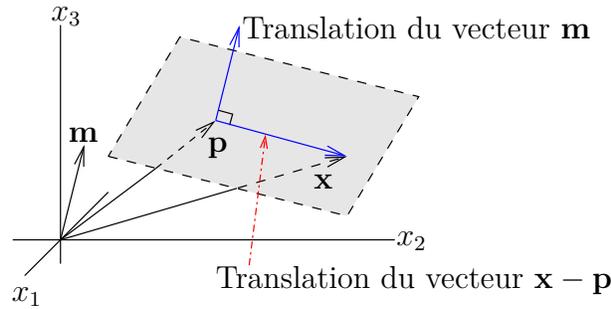


FIGURE 10.12 – Représentation vectorielle d'un plan

où $d = m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle$. Nous pourrions penser que la valeur de d va changer si nous choisissons différents points \mathbf{p} du plan. En fait, ce n'est pas le cas. Soit \mathbf{t} un autre point du plan. Puisque $\mathbf{t} - \mathbf{p}$ est un vecteur parallèle au plan et donc perpendiculaire à \mathbf{m} , nous avons

$$\langle \mathbf{m}, \mathbf{t} \rangle - \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{m}, \mathbf{t} - \mathbf{p} \rangle = 0$$

Ainsi, $\langle \mathbf{m}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle$.

Définition 10.4.2

la formule (10.4.1) (ou (10.4.2)) est une **représentation standard** d'un plan qui contient le point \mathbf{p} et qui est perpendiculaire au vecteur \mathbf{m} . Nous disons que le vecteur \mathbf{m} est **orthogonal** ou **perpendiculaire** ou **normal** au plan.

Si $m_3 \neq 0$, nous pouvons déduire de (10.4.1) que

$$x_3 = p_3 - \frac{m_1}{m_3}(x_1 - p_1) - \frac{m_2}{m_3}(x_2 - p_2).$$

Si $m_3 = 0$ et $m_2 \neq 0$, l'équation du plan est simplement

$$x_2 = p_2 - \frac{m_1}{m_2}(x_1 - p_1)$$

et x_3 est libre (i.e. x_3 va de $-\infty$ à ∞). C'est un plan qui est parallèle à l'axe des x_3 . Nous laissons aux lecteurs l'étude des autres cas possibles.

Exemple 10.4.3

Si $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{m} = (1, -2, 4)$, l'ensemble des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ du plan qui est perpendiculaire à \mathbf{m} et contient le point \mathbf{p} est donnée par la relation

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3) - (1, 2, 3), (1, -2, 4) \rangle = (x_1 - 1) - 2(x_2 - 2) + 4(x_3 - 3) = 0.$$

Si nous résolvons pour x_3 , nous trouvons

$$x_3 = 3 - \frac{1}{4}(x_1 - 1) + \frac{1}{2}(x_2 - 2).$$

**Exemple 10.4.4**

Trouvons l'équation du plan tangent au point $\mathbf{p} = (1, 2, 2)$ de la sphère de rayon 3 centré à l'origine.

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent de la sphère au point \mathbf{p} est donné par le vecteur \mathbf{p} lui-même. Ainsi, les points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ du plan tangent cherché satisfont l'équation

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle (x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 - 2), (1, 2, 2) \rangle = (x_1 - 1) + 2(x_2 - 2) + 2(x_3 - 2) = 0 .$$

Si nous résolvons pour x_3 , nous trouvons

$$x_3 = 2 - \frac{1}{2}(x_1 - 1) - (x_2 - 2) .$$



Nous savons qu'un plan est déterminé par trois points non alignés. Comment pouvons-nous trouver l'équation du plan qui passe par trois points non alignés? Nous reformulons la question de la façon suivante. Étant donné trois points non alignés, comment pouvons-nous trouver un vecteur normal au plan qui contient ces trois points? La réponse à cette question nous est fournie par le produit vectoriel.

Proposition 10.4.5

Si \mathbf{p} , \mathbf{u} et \mathbf{v} sont trois points non alignés d'un plan, alors $\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{p}$ et $\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{p}$ sont deux vecteurs parallèles au plan qui ne sont pas colinéaires, et $\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}$ est un vecteur perpendiculaire au plan. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ est un point du plan, la représentation standard du plan est alors donnée par

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = 0 .$$

Exemple 10.4.6

Trouvons l'équation du plan qui contient les trois points $(2, 1, 3)$, $(1, -2, 3)$ et $(1, 5, 4)$.

Choisissons $\mathbf{p} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ et $\mathbf{v} = (1, 5, 4)$. Tout autre choix pour \mathbf{p} , \mathbf{u} et \mathbf{v} est valable. Ainsi,

$$\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{p} = (1, -2, 3) - (2, 1, 3) = (-1, -3, 0)$$

et

$$\mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{p} = (1, 5, 4) - (2, 1, 3) = (-1, 4, 1)$$

sont deux vecteurs parallèles au plan. Le vecteur

$$\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{t} = (-3, 1, -7)$$

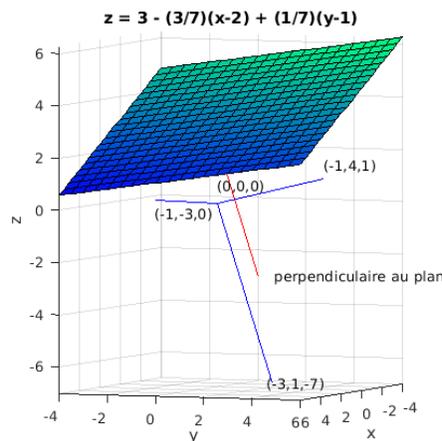
qui est perpendiculaire au plan. Les points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ du plan contenant \mathbf{p} , \mathbf{u} et \mathbf{v} satisfont donc l'équation

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{m} \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3) - (2, 1, 3), (-3, 1, -7) \rangle = -3(x_1 - 2) + (x_2 - 1) - 7(x_3 - 3) = 0.$$

Nous pouvons résoudre pour z pour obtenir

$$x_3 = 3 - \frac{3}{7}(x_1 - 2) + \frac{1}{7}(x_2 - 1).$$

Le dessin du plan représenté par cette équation est donné ci-dessous.



Remarquons que $\mathbf{m} = (-3, 1, -7)$ satisfait bien la règle de la main droite avec les vecteurs $\mathbf{s} = (-1, 3, 0)$ et $\mathbf{t} = (-1, 4, 1)$. ♣

10.4.1 Représentations vectorielles et paramétriques du plan

Comme pour la droite dans le plan, il existe des représentations vectorielles et paramétriques pour le plan.

Le plan qui contient le point \mathbf{p} et qui est parallèle à deux vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{t} qui ne sont pas colinéaires (figure 10.13) est formé des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t} \quad (10.4.3)$$

où α et β sont des nombres réels.

Définition 10.4.7

La formule (10.4.3) est une **représentation vectorielle** du plan qui contient le point \mathbf{p} et est parallèle à deux vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{t} qui ne sont pas colinéaires.

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, les composantes de la représentation vectorielle $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t}$ sont

$$x_1 = p_1 + \alpha s_1 + \beta t_1 \quad (10.4.4a)$$

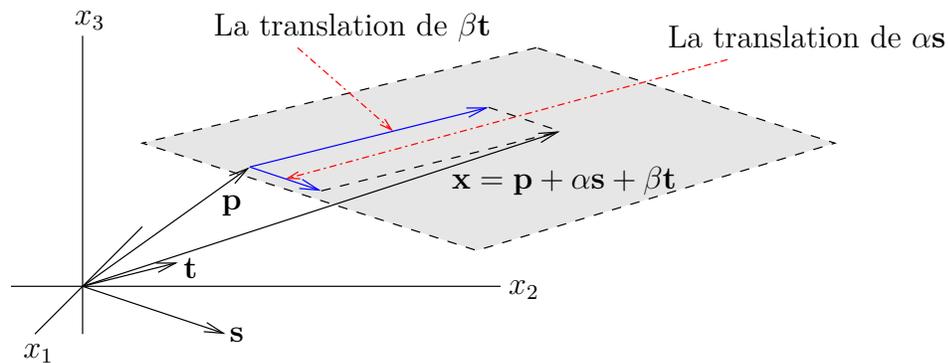


FIGURE 10.13 – Représentation d'un plan défini par un point et deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires

$$x_2 = p_2 + \alpha s_2 + \beta t_2 \quad (10.4.4b)$$

$$x_3 = p_3 + \alpha s_3 + \beta t_3 \quad (10.4.4c)$$

pour α et β des nombres réels.

Définition 10.4.8

L'ensemble des formules en (10.4.4) est une **représentation paramétrique** du plan contenant \mathbf{p} et parallèle à deux vecteurs \mathbf{s} et \mathbf{t} qui ne sont pas colinéaires. Les **paramètres** sont α et β .

Exemple 10.4.9

Les points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ du plan contenant $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ et parallèle aux vecteurs $\mathbf{s} = (-1, 2, 2)$ et $\mathbf{t} = (1, -1, 2)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{r} &= \mathbf{p} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t} = (1, 2, 3) + \alpha(-1, 2, 2) + \beta(1, -1, 2) \\ &= (1 - \alpha + \beta, 2 + 2\alpha - \beta, 3 + 2\alpha + 2\beta). \end{aligned}$$

Nous avons donc la représentation paramétrique

$$x_1 = 1 - \alpha + \beta, \quad x_2 = 2 + 2\alpha - \beta \quad \text{et} \quad x_3 = 3 + 2\alpha + 2\beta.$$



Remarque 10.4.10

Il existe une relation entre la représentation paramétrique et standard du plan.

Si nous soustrayons (10.4.4b) multipliée par t_1 de (10.4.4a) multipliée par t_2 , nous obtenons

$$x_1 t_2 - x_2 t_1 = (p_1 t_2 - p_2 t_1) + \alpha(s_1 t_2 - s_2 t_1).$$

Ainsi,

$$\alpha = \frac{1}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x_1 t_2 - x_2 t_1 - p_1 t_2 + p_2 t_1) = \frac{t_2}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x_1 - p_1) - \frac{t_1}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x_2 - p_2)$$

si $s_1 t_2 - s_2 t_1 \neq 0$.

Si nous soustrayons (10.4.4b) multipliée par s_1 de (10.4.4a) multipliée par s_2 , nous obtenons

$$x_1 s_2 - x_2 s_1 = (p_1 s_2 - p_2 s_1) + \beta (t_1 s_2 - t_2 s_1).$$

Ainsi,

$$\beta = \frac{1}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x_1 s_2 - x_2 s_1 - p_1 s_2 + p_2 s_1) = \frac{s_2}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x_1 - p_1) - \frac{s_1}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x_2 - p_2)$$

si $s_1 t_2 - s_2 t_1 \neq 0$.

Si nous substituons α et β dans (10.4.4c), nous trouvons

$$\begin{aligned} x_3 &= p_3 + \frac{t_2 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x_1 - p_1) - \frac{t_1 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x_2 - p_2) + \frac{s_2 t_3}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x_1 - p_1) \\ &\quad - \frac{s_1 t_3}{t_1 s_2 - t_2 s_1} (x_2 - p_2) \\ &= p_3 - \frac{s_2 t_3 - t_2 s_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x_1 - p_1) - \frac{t_1 s_3 - s_1 t_3}{s_1 t_2 - s_2 t_1} (x_2 - p_2). \end{aligned}$$

Nous pouvons récrire cette expression sous la forme suivante.

$$(s_2 t_3 - t_2 s_3) (x_1 - p_1) + (t_1 s_3 - s_1 t_3) (x_2 - p_2) + (s_1 t_2 - s_2 t_1) (x_3 - p_3) = 0.$$

C'est la représentation standard donnée en (10.4.1) où $\mathbf{m} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}$. ♠

10.4.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Si une droite ℓ n'est pas parallèle au plan \mathcal{M} , alors la droite coupe le plan en un point. La droite ℓ est parallèle au plan \mathcal{M} si le produit scalaire d'un vecteur \mathbf{q} parallèle à la droite ℓ avec un vecteur \mathbf{m} perpendiculaire au plan est 0 car le plan \mathcal{M} est une translation de l'ensemble des vecteurs \mathbf{u} tels que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{m} \rangle = 0$ (figure 10.14).

Exemple 10.4.11

Considérons la droite ℓ définie par la représentation standard

$$\frac{x_1 - 5}{3} = \frac{x_2 - 1}{2} = x_3 + 2$$

et le plan \mathcal{M} donné par $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$. Trouvons l'intersection (s'il y en a une) de la droite ℓ et du plan \mathcal{M} .

Une représentation paramétrique de la droite ℓ est

$$x_1 = 3\alpha + 5, \quad x_2 = 2\alpha + 1 \quad \text{et} \quad x_3 = \alpha - 2.$$

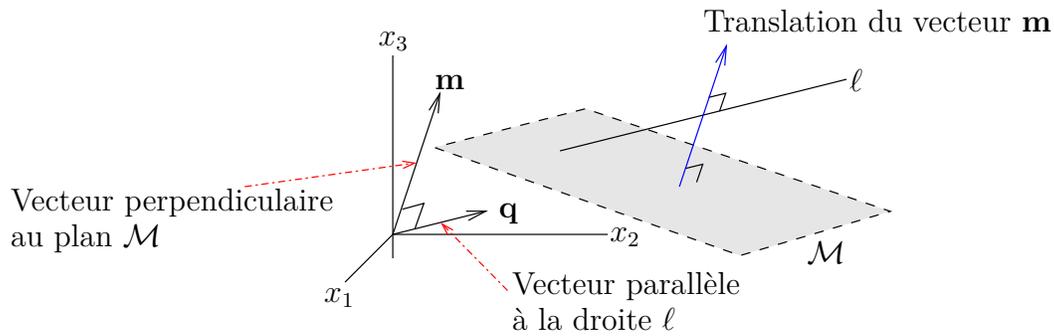


FIGURE 10.14 – La droite ℓ est parallèle au plan \mathcal{M} si $\langle \mathbf{q}, \mathbf{m} \rangle = 0$ où le vecteur \mathbf{q} est parallèle à la droite ℓ et \mathbf{m} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} .

Le point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de la droite ℓ qui appartient aussi au plan \mathcal{M} doit satisfaire

$$(3\alpha + 5) + 2(2\alpha + 1) + (\alpha - 2) = 4.$$

Nous obtenons $\alpha = -1/8$. Les coordonnées du point d'intersection sont donc

$$x_1 = 3\left(\frac{-1}{8}\right) + 5 = \frac{37}{8}, \quad x_2 = 2\left(\frac{-1}{8}\right) + 1 = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad x_3 = \left(\frac{-1}{8}\right) - 2 = -\frac{17}{8}.$$



Remarque 10.4.12

Il est facile de trouver un vecteur tangent à la droite ℓ de l'exemple 10.4.11 et un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} .

À partir de la représentation standard ou paramétrique de la droite ℓ , nous déduisons la représentation vectorielle $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{p} = (5, 1, -2)$ et $\mathbf{q} = (3, 2, 1)$. Le vecteur $\mathbf{q} = (3, 2, 1)$ est parallèle à la droite ℓ .

Un vecteur $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ perpendiculaire au plan \mathcal{M} est donné par les coefficients de x_1 , x_2 et x_3 dans l'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$. En effet, $x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$ est la représentation standard (10.4.2) du plan \mathcal{M} . Ainsi, $\mathbf{m} = (1, 2, 1)$ et $\langle \mathbf{x}, \mathbf{m} \rangle = 4$ pour les points \mathbf{x} du plan \mathcal{M} .

Puisque $\langle \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle = 8 \neq 0$, nous avons que \mathbf{q} n'est pas perpendiculaire à \mathbf{m} et donc que la droite ℓ n'est pas parallèle au plan \mathcal{M} . Ainsi, ℓ coupe le plan \mathcal{M} .



10.4.3 Intersection de deux plans

Deux plans distincts non parallèles vont se couper en une droite. Si \mathbf{m} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} et \mathbf{n} est un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{N} , alors les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} sont parallèles si les vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} sont colinéaires; c'est-à-dire, un multiple l'un de l'autre.

Si le plan \mathcal{M} est représenté par l'équation $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = k_{\mathbf{m}}$ et le plan \mathcal{N} par $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k_{\mathbf{n}}$, l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} est donc l'ensemble des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ qui satisfont ces deux équations simultanément. En d'autres mots, l'intersection des deux plans est l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = k_{\mathbf{m}} \quad (10.4.5a)$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = k_{\mathbf{n}} \quad (10.4.5b)$$

Les deux plans sont parallèles

Si les deux plans sont parallèles, alors $\mathbf{m} = \lambda\mathbf{n}$ pour un nombre réel λ .

1. Si $k_{\mathbf{m}} \neq \lambda k_{\mathbf{n}}$, il ne peut pas y avoir de points (p_1, p_2, p_3) qui satisfassent (10.4.5a) et (10.4.5b) simultanément. Si c'était le cas, alors nous aurions

$$m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = k_{\mathbf{m}}$$

$$n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = k_{\mathbf{n}}$$

avec $m_i = \lambda n_i$. Si nous soustrayons λ fois la deuxième équation de la première équation, nous obtenons $0 = k_{\mathbf{m}} - \lambda k_{\mathbf{n}}$. Ce qui contredit notre hypothèse. Nous avons donc deux plans distincts et parallèles.

2. Si $k_{\mathbf{m}} = \lambda k_{\mathbf{n}}$ alors l'équation (10.4.5a) est un multiple par λ de l'équation (10.4.5b) et tout point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ qui satisfait (10.4.5b) satisfait aussi (10.4.5a) et vice-versa. Les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} sont en fait un seul et même plan.

Les deux plans ne sont pas parallèles

Si les deux plans ne sont pas parallèles, \mathbf{m} n'est pas un multiple de \mathbf{n} . Nous verrons lors de l'étude de l'algèbre linéaire que les solutions du système d'équations linéaires donné par (10.4.5a) et (10.4.5b) représente alors une droite ℓ . Puisque cette droite est contenue dans les plans \mathcal{M} et \mathcal{N} , elle doit être perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} . Donc ℓ est parallèle au vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

Si \mathbf{p} est un point de ℓ , donc une solution du système d'équations linéaires donné par (10.4.5a) et (10.4.5b), alors l'équation de la droite d'intersection ℓ est donnée par

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle = r_1(x_1 - p_1) + r_2(x_2 - p_2) + r_3(x_3 - p_3) = 0 .$$

Le problème est donc de trouver au moins une solution du système d'équations linéaires donné par (10.4.5a) et (10.4.5b). En fait, trouver une solution n'est pas plus difficile que de trouver toutes les solutions et donc l'équation de la droite d'intersection. C'est ce que nous décrivons ci-dessous.

Si (10.4.5a) définit un plan dans l'espace, ces coefficients m_i ne peuvent pas tous être nuls. Supposons que $m_1 \neq 0$; le raisonnement est semblable si m_2 ou m_3 est non nul. Si nous soustrayons le produit de (10.4.5a) par n_1/m_1 de (10.4.5b), nous obtenons

$$\frac{n_2m_1 - n_1m_2}{m_1}x_2 + \frac{m_1n_3 - n_1m_3}{m_1}x_3 = \frac{k_{\mathbf{n}}m_1 - n_1k_{\mathbf{m}}}{m_1} . \quad (10.4.6)$$

Puisque nous supposons que \mathbf{m} et \mathbf{n} ne sont pas colinéaires, les coefficients de x_2 et x_3 ne peuvent pas être tous les deux nuls. Supposons que le coefficient de x_2 soit non nul. Le raisonnement est semblable si le coefficient de x_3 est non nul. Nous pouvons alors résoudre pour x_2 .

$$x_2 = C_1 + C_2 x_3, \quad (10.4.7)$$

où $C_1 = \frac{k_{\mathbf{n}} m_1 - n_1 k_{\mathbf{m}}}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$ et $C_2 = -\frac{m_1 n_3 - n_1 m_3}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$. Si nous substituons l'expression pour x_2 obtenue en (10.4.7) dans (10.4.5a), et résolvons pour x_1 , nous trouvons

$$x_1 = C_3 + C_4 x_3, \quad (10.4.8)$$

où $C_3 = \frac{k_{\mathbf{m}} n_2 - m_2 k_{\mathbf{n}}}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$ et $C_4 = -\frac{m_2 n_3 - n_2 m_3}{n_2 m_1 - n_1 m_2}$. Notez que C_2 et C_4 ne peuvent pas être tous les deux nuls pour la même raison que les coefficients de x_2 et x_3 dans (10.4.6) ne peuvent pas être tous les deux nuls¹

Nous obtenons donc la représentation paramétrique

$$x_1 = C_3 + C_4 \alpha, \quad x_2 = C_1 + C_2 \alpha \quad \text{et} \quad x_3 = \alpha$$

pour la droite d'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} .

Il ne faut surtout pas essayer de mémoriser les formules ci-haut pour trouver la représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans. L'exemple suivant illustre comment trouver l'intersection de deux plans.

Exemple 10.4.13

Trouvons, si elle existe, l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} donnés respectivement par les équations

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \quad (10.4.9a)$$

et

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \quad (10.4.9b)$$

Le vecteur $\mathbf{m} = (1, 2, 1)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{M} et le vecteur $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{N} . Comme ils ne sont pas colinéaires (nous ne pouvons pas écrire \mathbf{m} comme un multiple de \mathbf{n}), les deux plans se coupent en une droite ℓ .

1^{er} méthode: Le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} = (1, 1, -3)$ est parallèle à la droite ℓ . Il est facile de vérifier que $(0, 2, 1)$ est un point de la droite ℓ puisque c'est une point qui appartient aux deux plans. La représentation standard de ℓ est donc

$$x_1 = x_2 - 2 = \frac{x_3 - 1}{-3} \quad (10.4.10)$$

1. Nous verrons dans le chapitre sur l'algèbre linéaire que, si la matrice de dimension 2×3 dont les lignes sont données par les vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} est de rang 2, alors au moins deux des expressions $m_1 n_2 - n_1 m_2$, $m_2 n_3 - n_2 m_3$ et $m_1 n_3 - n_1 m_3$ sont non nuls.

2^e méthode: Si nous soustrayons deux fois l'équation (10.4.9a) de l'équation (10.4.9b), nous obtenons $-3x_2 - x_3 = -7$. Ainsi,

$$x_2 = \frac{x_3 - 7}{-3} = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{7}{3}.$$

Si nous substituons cette expression pour y dans (10.4.9a), nous obtenons

$$x_1 + 2\left(\frac{x_3 - 7}{-3}\right) + x_3 = 5.$$

Ceci donne

$$x_1 = -2\left(\frac{x_3 - 7}{-3}\right) - x_3 + 5 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}.$$

Nous obtenons donc la représentation paramétrique suivante pour la droite ℓ produite par l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} .

$$x_1 = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad x_3 = \alpha. \quad (10.4.11)$$

3^e méthode: Nous pouvons aussi résoudre pour x_3 l'équation $-3x_2 - x_3 = -7$ obtenue au début de la 2^e méthode. Nous trouvons alors $x_3 = -3x_2 + 7$. Si nous substituons cette expression dans (10.4.9a), nous obtenons $x_1 + 2x_2 + (-3x_2 + 7) = 5$. Ainsi, $x_1 = x_2 - 2$. Nous obtenons une nouvelle représentation paramétrique pour la droite ℓ produite par l'intersection des plans \mathcal{M} et \mathcal{N} .

$$x_1 = \beta - 2, \quad x_2 = \beta \quad \text{et} \quad x_3 = -3\beta + 7. \quad (10.4.12)$$

(10.4.10), (10.4.11) et (10.4.12) sont trois représentations équivalentes de la droite d'intersection ℓ .

Nous avons bien obtenu des représentations équivalentes de la droite ℓ . En effet, notons que les trois représentations décrivent des droites qui ont la même direction : $(1, 1, -3)$, $(-1/3, -1/3, 1)$ et $(1, 1, -3)$ respectivement. De plus, ils contiennent tous le point $(0, 2, 1)$. Nous obtenons $(0, 2, 1)$ avec $\alpha = 1$ dans (10.4.11) et $\beta = 2$ dans (10.4.12). Puisque les trois représentations décrivent des droites parallèles qui passent par le même point, nous avons donc la même droite.

Nous remarquons de plus, que si nous substituons $\alpha = -3\beta + 7$ dans (10.4.11), nous obtenons (10.4.12). De même, si nous substituons $\beta = -(\alpha - 7)/3$ dans (10.4.12), nous obtenons (10.4.11). Ainsi, l'ensemble des points produits par la représentation (10.4.11) est le même que l'ensemble des points produits par la représentation (10.4.12). Par exemple, si $\alpha = 1$ dans la représentation (10.4.11), nous obtenons $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 1)$. La représentation (10.4.12) donne ce même point avec $\beta = -(1 - 7)/3 = 2$. Si $\beta = 1$ dans la représentation (10.4.12), nous obtenons $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 4)$. La représentation (10.4.11) donne ce même point avec $\alpha = -3(1) + 7 = 4$. ♣

10.4.4 Intersection de trois plans

Les exemples suivants montrent comment nous pouvons résoudre un système de trois équations avec trois inconnues en utilisant la technique de substitution. Malheureusement, cette méthode ne nous permet pas de classifier les cas possibles d'intersections ; c'est-à-dire, une intersection vide, une droite ou un plan.

L'algèbre linéaire que nous verrons dans un prochain chapitre simplifiera grandement l'étude des cas possibles d'intersections de trois plans.

Exemple 10.4.14

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants ?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad (10.4.13a)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \quad (10.4.13b)$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \quad (10.4.13c)$$

De (10.4.13a), nous obtenons $x_3 = 3 - x_1 - x_2$ que nous substituons dans (10.4.13b) et (10.4.13c) pour obtenir

$$2x_1 + x_2 = 2 \quad (10.4.14a)$$

$$3x_1 + 3x_2 = 7 \quad (10.4.14b)$$

De (10.4.14a), nous obtenons $x_2 = 2 - 2x_1$ que nous substituons dans (10.4.14b) pour obtenir $-3x_1 = 1$. Ainsi, $x_1 = -1/3$, $x_2 = 2 - 2x_1 = 8/3$ et $x_3 = 3 - x_1 - x_2 = 2/3$. Le point $(-1/3, 8/3, 2/3)$ est le seul point commun (i.e. qui appartient) aux trois plans. ♣

Exemple 10.4.15

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants ?

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \quad (10.4.15a)$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad (10.4.15b)$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \quad (10.4.15c)$$

De (10.4.15a), nous obtenons $x_3 = 5 - x_1 - 2x_2$ que nous substituons dans (10.4.15b) et (10.4.15c) pour obtenir $x_1 - 3x_2 = -3$ dans les deux cas. Ainsi, $x_2 = x_1/3 + 1$ et $x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 = -5x_1/3 + 3$. Nous trouvons la représentation paramétrique

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \frac{\alpha}{3} + 1 \quad \text{et} \quad x_3 = -\frac{5\alpha}{3} + 3$$

d'une droite ℓ . La droite ℓ est l'ensemble des points communs aux trois plans. ♣

Exemple 10.4.16

Quelle est l'intersection, si elle existe, des trois plans suivants ?

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \quad (10.4.16a)$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad (10.4.16b)$$

$$-x_1 + 3x_2 = 7 \quad (10.4.16c)$$

De (10.4.16a), nous obtenons $x_3 = 5 - x_1 - 2x_2$ que nous substituons dans (10.4.16b) pour obtenir $x_1 - 3x_2 = -3$. Ainsi, $x_2 = x_1/3 + 1$. Malheureusement, si nous substituons cette expression pour x_2 dans (10.4.16c), nous trouvons $3 = 7$. Ce qui est absurde. Il n'existe donc aucun point (x_1, x_2, x_3) qui satisfasse les trois équations simultanément ; c'est-à-dire, qui est commun aux trois plans. ♣

10.5 Projections

10.5.1 Plus courte distance entre un point et une droite

Quelle est la plus courte distance entre un point \mathbf{a} et une droite ℓ qui passe par l'origine ? Pour répondre à cette question, nous avons premièrement besoin de trouver le point \mathbf{b} de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} comme il est illustré à la figure 10.15.

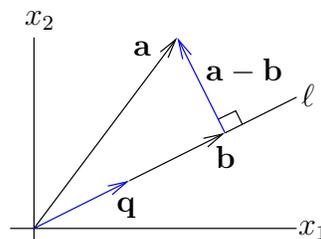


FIGURE 10.15 – Le point \mathbf{b} est le point de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur \mathbf{b} est appelé la projection du vecteur \mathbf{a} sur la droite ℓ passant pas l'origine.

Soit \mathbf{q} un vecteur contenu dans la droite ℓ . Pour trouver les coordonnées de \mathbf{b} , nous remarquons que $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{q}$ pour un certain nombre réel α . De plus $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire à \mathbf{q} . Nous avons donc

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \alpha \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle .$$

Ainsi,

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} . \quad (10.5.1)$$

Nous avons donc trouvé que

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} .$$

Il est maintenant facile de calculer la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ ; c'est-à-dire, la distance entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} . Il suffit de calculer la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Pour résumer, nous avons le résultat suivant.

Définition 10.5.1

Soit ℓ une droite qui contient le vecteur \mathbf{q} . Si \mathbf{a} un point quelconque, la **projection (orthogonale)** du vecteur \mathbf{a} sur la droite ℓ est le vecteur

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q}.$$

Le point \mathbf{b} est le point de la droite ℓ qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire à la droite ℓ . La plus courte distance entre \mathbf{a} et la droite ℓ est la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Exemple 10.5.2

Quelle est la plus courte distance entre le point $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ et la droite ℓ donnée par $x_1 = 4x_2 = 2x_3$?

Il faut premièrement trouver la projection \mathbf{b} du vecteur $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ sur la droite ℓ . Pour cela, il faut choisir un vecteur \mathbf{q} sur la droite ℓ . Comme nous considérons seulement des droites qui passent par l'origine, il suffit de prendre le vecteur qui donne la direction de la droite dans l'une des représentations de la droite. Par exemple, la représentation standard de la droite ℓ est

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1/4} = \frac{x_3}{1/2}.$$

Donc $\mathbf{q} = (1, 1/4, 1/2)$ est un bon choix. En fait, tout multiple non nul de \mathbf{q} est acceptable. Ainsi,

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} = \frac{4}{3} \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

La plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ est donc

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \left\| \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Exemple 10.5.3

Quelle est la plus courte distance entre le point $\mathbf{a} = (2, 7, 6)$ et la droite ℓ donnée par la représentation standard

$$x_1 - 1 = x_2 - 6 = \frac{x_3 - 2}{-3}?$$

Comme la droite ℓ ne passe pas par l'origine, nous ne pouvons pas utiliser directement les formules précédentes. Pour remédier à ce problème, il suffit de faire une translation du point \mathbf{a} et de la droite ℓ par un vecteur \mathbf{c} de telle sorte que la nouvelle droite ℓ' passe par l'origine. La plus courte distance entre le point \mathbf{a}' et la droite ℓ' obtenus de la translation par le vecteur \mathbf{c} sera égale à la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ car les translations préservent la distance entre les objets (figure 10.16).

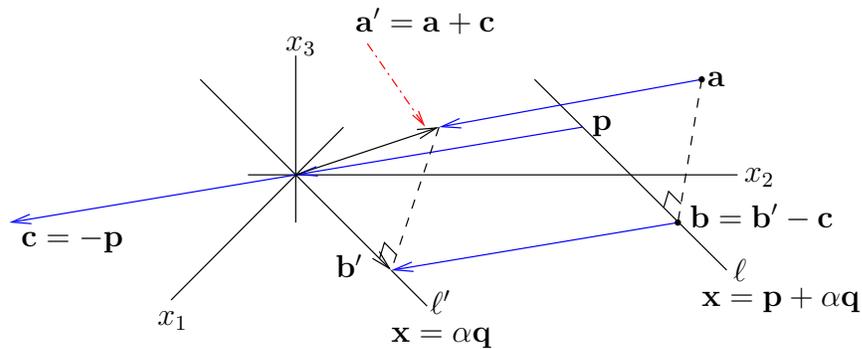


FIGURE 10.16 – Le point \mathbf{a}' et la droite ℓ' résultent d'une translation par le vecteur \mathbf{c} du point \mathbf{a} et de la droite ℓ respectivement.

La droite ℓ a la représentation vectorielle $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{p} = (1, 6, 2)$ et $\mathbf{q} = (1, 1, -3)$. Si nous faisons une translation par $\mathbf{c} = -\mathbf{p}$, nous obtenons la droite ℓ' donnée par la formule $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{q}$ et le point

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{p} = (1, 1, 4).$$

La droite ℓ' passe par l'origine car, avec cette translation, le point \mathbf{p} de la droite ℓ est envoyé à l'origine. Notez que ℓ et ℓ' sont parallèles comme il se doit pour deux droites dont l'une est la translation de l'autre.

Le vecteur $\mathbf{q} = (1, 1, -3)$ est naturellement sur la droite ℓ' . La projection \mathbf{b}' du vecteur \mathbf{a}' sur la droite ℓ' est

$$\mathbf{b}' = \frac{\langle \mathbf{a}', \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q} = -\frac{10}{11}(1, 1, -3) = \left(-\frac{10}{11}, -\frac{10}{11}, \frac{30}{11} \right).$$

La plus courte distance entre le point \mathbf{a}' et la droite ℓ' (et donc entre le point \mathbf{a} et la droite ℓ) est

$$\|\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\| = \left\| \left(\frac{21}{11}, \frac{21}{11}, \frac{14}{11} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{21}{11} \right)^2 + \left(\frac{21}{11} \right)^2 + \left(\frac{14}{11} \right)^2} = \frac{7\sqrt{22}}{11}.$$



10.5.2 Plus courte distance entre un point et un plan de l'espace

Quelle est la plus courte distance entre un point \mathbf{a} et un plan \mathcal{M} qui contient l'origine? La méthode utilisée pour répondre à cette question est très semblable à la méthode utilisée pour trouver la plus courte distance entre un point et une droite.

Nous avons premièrement besoin de trouver le point \mathbf{b} du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} comme il est illustré à la figure 10.17.

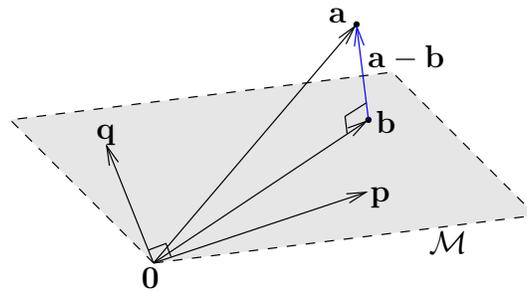


FIGURE 10.17 – Le point \mathbf{b} est le point du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur \mathbf{b} est appelé la projection du vecteur \mathbf{a} sur le plan \mathcal{M} contenant l'origine.

Soit \mathbf{p} et \mathbf{q} deux vecteurs contenus dans le plan \mathcal{M} . Nous assumons que ces deux vecteurs sont perpendiculaires pour simplifier les calculs qui vont suivre. Il est en générale plus simple de travailler avec un système de coordonnées orthogonales.

Pour trouver les coordonnées de \mathbf{b} , nous remarquons que $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}$ pour deux nombres réels α et β . De plus $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est perpendiculaire au deux vecteurs \mathbf{p} et \mathbf{q} . Nous avons donc

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha\mathbf{p} - \beta\mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$$

et

$$0 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a} - \alpha\mathbf{p} - \beta\mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \alpha \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle - \beta \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$$

car $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$. Ainsi,

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}. \quad (10.5.2)$$

Donc

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p} + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q}.$$

Il est maintenant facile de calculer la plus courte distance entre le point \mathbf{a} et le plan \mathcal{M} ; c'est-à-dire, la distance entre les points \mathbf{a} et \mathbf{b} . Il suffit de calculer la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Pour résumer, nous avons le résultat suivant.

Définition 10.5.4

Soit \mathcal{M} un plan qui contient deux vecteurs perpendiculaires \mathbf{p} et \mathbf{q} . Si \mathbf{a} un point quelconque, la **projection (orthogonale)** du vecteur \mathbf{a} dans le plan \mathcal{M} est le vecteur

$$\mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p} + \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} \mathbf{q}.$$

Le point \mathbf{b} est le point du plan \mathcal{M} qui est le plus près de \mathbf{a} . Le vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ est

perpendiculaire au plan \mathcal{M} . La plus courte distance entre \mathbf{a} et le plan \mathcal{M} est la longueur du vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

10.6 Exercices

10.6.1 Équation d'une droite

Question 10.1

Donnez une représentation de la droite qui passe par les points $(2, -5, 5)$ et $(-4, 3, 4)$.

10.6.2 Équation d'un plan

Question 10.2

Trouvez l'équation du plan parallèle au plan $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$ et qui passe par le point $(2, 3, 2)$.

Question 10.3

Trouvez l'équation du plan \mathcal{M} qui contient la droite ℓ définie par

$$\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 + 3}{3} = \frac{x_3 - 3}{-2}$$

et le point $(1, 2, 1)$.

Question 10.4

Déterminez si les deux plans suivants se coupent et, si c'est le cas, trouvez l'intersection des deux plans.

$$2x_1 + 5x_3 + 3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 - 3x_2 + x_3 + 2 = 0 .$$



Ce chapitre se veut une brève introduction à l'algèbre linéaire. À la fin de ce chapitre, le lecteur devrait être en mesure de calculer le déterminant d'une matrice, de trouver les valeurs propres d'une matrice et les vecteurs propres qui leurs sont associés. Pour ce faire, la première partie du chapitre est dédiée à la résolution de systèmes d'équations linéaires ; en particulier, nous introduisons la méthode d'élimination de Gauss.

Puisqu'elles sont très utiles, nous avons aussi inclus une section sur les matrice et les opérations sur les matrices. En particulier, elles fournissent une structure simple pour la méthode d'élimination de Gauss grâce à la matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires. Les opérations sur les matrices sont aussi très utiles pour décrire les systèmes dynamiques discrets linéaires de plus d'une dimension.

Par la suite, nous définissons ce qu'est le déterminant d'une matrice et comment nous pouvons le calculer. Finalement, nous définissons ce qu'est une valeur propre et un vecteur propre d'une matrice, et nous expliquons comment utiliser la méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires pour trouver les vecteurs propres associées à une valeur propre.

Nous terminons le chapitre avec les chaînes de Markov, une application très intéressante de l'algèbre linéaire. nous donnons des exemples de chaînes de Markov en science économique mais elles sont aussi très utiles en science naturel et en génie.

11.1 Systèmes d'équations linéaires

Exemple 11.1.1

Nous avons eu à quelques reprises dans le passé à résoudre des systèmes d'équations linéaires comme, par exemple,

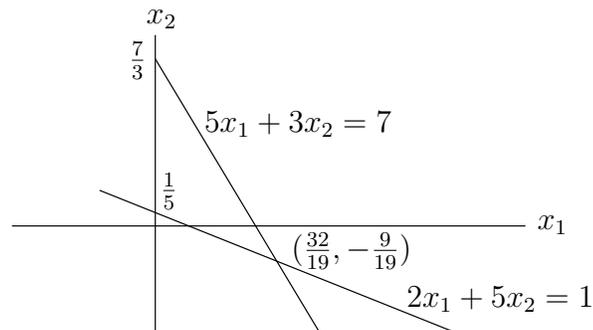
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{11.1.1}$$

Pour résoudre un tel système, nous résolvons la première équation pour x_2 . Nous trouvons $x_2 = (7 - 5x_1)/3$. Puis, nous substituons cette dernière expression pour x_2 dans la deuxième équation pour obtenir

$$2x_1 + 5(7 - 5x_1)/3 = 1 .$$

Après simplification, nous trouvons $x_1 = 32/19$ et donc $x_2 = (7 - 5x_1)/3 = -9/19$.

Nous pouvons donner une interprétation graphique à la solution $(x_1, x_2) = (32/19, -9/19)$ du système d'équations linéaires précédent. Chacune des équations du système d'équations linéaires ci-dessus est l'équation d'une droite dans le plan et la solution $(x_1, x_2) = (32/19, -9/19)$ de ce système est le point d'intersection de ces deux droites comme il est illustré dans le dessin ci-dessous.



Les coordonnées du point d'intersection satisfont les deux équations linéaires simultanément puisque que ce point appartient aux deux droites. 

Nous présentons une autre façon de résoudre un système d'équations linéaires.

Méthode 11.1.2

Pour résoudre les systèmes d'équations linéaires comme celui en (11.1.1), les trois opérations suivantes peuvent être utilisées pour réduire (avec une bonne combinaison de ses opérations) le système initial à un système plus simple qui possède les mêmes solutions.

1. Multiplier une équation par un nombre réel non nul.
2. Additionner une équation à une autre équation.
3. Échanger l'ordre des équations.

Les opérations (1) et (2) peuvent être combinées pour permettre l'addition d'un multiple d'une équation à une autre équation.

Exemple 11.1.3

Résolvons le système d'équations linéaires (11.1.1) à l'aide des opérations sur les équations.

Si nous multiplions la première équation de (11.1.1) par $1/5$, Nous obtenons le système d'équations linéaires suivant qui possède les mêmes solutions que (11.1.1).

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3}{5}x_2 &= \frac{7}{5} \\ 2x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

Si nous soustrayons 2 fois la première équation de la deuxième équation dans le système d'équations linéaires (11.1.2), nous obtenons le système d'équations linéaires suivant qui

possède toujours les mêmes solutions que (11.1.1).

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{3}{5}x_2 &= \frac{7}{5} \\ \frac{19}{5}x_2 &= -\frac{9}{5}\end{aligned}\tag{11.1.3}$$

Si nous multiplions la deuxième équation de (11.1.3) par $5/19$, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant qui possède les mêmes solutions que (11.1.1).

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{3}{5}x_2 &= \frac{7}{5} \\ x_2 &= -\frac{9}{19}\end{aligned}\tag{11.1.4}$$

Finalement, si nous soustrayons $3/5$ fois la deuxième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (11.1.4), nous obtenons la solution de (11.1.1).

$$x_1 = \frac{32}{19} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{9}{19}.$$



11.1.1 Systèmes d'équations linéaires avec deux inconnues

Exemple 11.1.4

Résolvons si possible le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}2x_1 - 5x_2 &= 1 \\ 4x_1 - 10x_2 &= 1\end{aligned}\tag{11.1.5}$$

Pour résoudre ce système, nous procédons comme nous avons fait pour le système d'équations linéaires à l'exemple 11.1.3 de la section précédente. Si nous multiplions la première équation de (11.1.5) par $1/2$, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant.

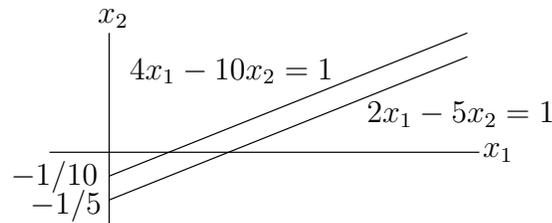
$$\begin{aligned}x_1 - \frac{5}{2}x_2 &= \frac{1}{2} \\ 4x_1 - 10x_2 &= 1\end{aligned}\tag{11.1.6}$$

Si nous soustrayons 4 fois la première équation de la deuxième équation dans le système d'équations linéaires (11.1.6), nous obtenons le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{aligned}x_1 - \frac{5}{2}x_2 &= \frac{1}{2} \\ 0 &= -1\end{aligned}$$

Ce système est absurde. Cela veut dire qu'il n'y a pas de solutions pour le système (11.1.5).

Graphiquement, ce n'est pas une surprise qu'il n'y ait pas de solutions car les deux droites sont parallèles et donc ne se coupent pas comme il est illustré dans le dessin ci-dessous.



Exemple 11.1.5

Le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 1 \\ 1.5x_1 - 2.5x_2 &= 0.5 \end{aligned} \quad (11.1.7)$$

a un nombre infini de solutions. Ce sont tous les points (x_1, x_2) de la droite $x_2 = 3x_1/5 - 1/5$. En effet, si nous soustrayons $1/2$ fois la première équation de la seconde équation, nous obtenons le système

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Les deux équations du système (11.1.7) représentent donc la même droite dans le plan. Tous les points de cette droite satisfont les deux équations linéaires. La forme paramétrique de cette droite est $(x_1, x_2) = (s, 3s/5 - 1/5)$ pour $s \in \mathbb{R}$.



Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des systèmes d'équations linéaires formés de seulement deux équations linéaires. Il pourrait y avoir plus de deux équations linéaires.

Exemple 11.1.6

Réolvons le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned} \quad (11.1.8)$$

Nous échangeons la première et deuxième équation du système d'équations linéaires (11.1.8) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

Nous soustrayons 2 fois la première équation de la deuxième équation et 3 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (11.1.9) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 \\ 7x_2 &= -7 \\ 7x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Nous soustrayons la deuxième équation de la troisième équation dans ce dernier système d'équations linéaires pour obtenir le système

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= 4 \\7x_2 &= -7 \\0 &= 0\end{aligned}\tag{11.1.10}$$

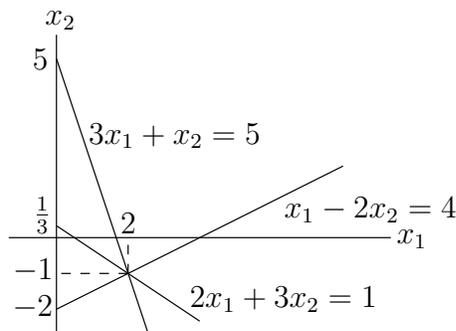
Nous pouvons éliminer la troisième équation du système d'équations linéaires (11.1.10) car elle est évidemment toujours satisfaite. De plus, nous pouvons diviser la deuxième équation par 7 pour obtenir le système

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= 4 \\x_2 &= -1\end{aligned}\tag{11.1.11}$$

Finalement, si nous additionnons 2 fois la deuxième équation à la première équation dans le système d'équations linéaires (11.1.11), nous obtenons la solution de (11.1.8).

$$x_1 = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = -1$$

Le dessin ci-dessous illustre le fait que le point $(2, -1)$ est le point d'intersection des trois droites $2x_1 + 3x_2 = 1$, $x_1 - 2x_2 = 4$ et $3x_1 + x_2 = 5$.



Les exemples précédents semblent indiquer que pour un système d'équations linéaires à deux inconnues, nous retrouvons une des situations suivantes : le système n'a pas de solutions, le système a une seule solution, ou le système a une nombre infini de solutions. C'est en fait ce que l'interprétation graphique démontre. En géométrie Euclidienne, deux droites distinctes peuvent être parallèles, et donc elles ne se coupent pas, ou elles peuvent se couper en un seul point.

11.1.2 Systèmes d'équations linéaires avec plus de deux inconnues

Exemple 11.1.7

Résolvons si possible le système d'équations linéaires avec trois inconnues

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1\end{aligned}\tag{11.1.12}$$

Pour résoudre un tel système, nous pouvons utiliser la méthode classique de substitution. De la première équation, nous obtenons

$$x_3 = 1 - 2x_1 - x_2 . \quad (11.1.13)$$

Si nous substituons cette expression pour x_3 dans la deuxième équation de (11.1.12), nous obtenons

$$x_1 + 2x_2 + (1 - 2x_1 - x_2) = -x_1 + x_2 + 1 = 1 .$$

Après simplification, nous trouvons

$$x_2 = x_1 . \quad (11.1.14)$$

Si nous substituons (11.1.14) dans (11.1.13), nous trouvons

$$x_3 = 1 - 3x_1 . \quad (11.1.15)$$

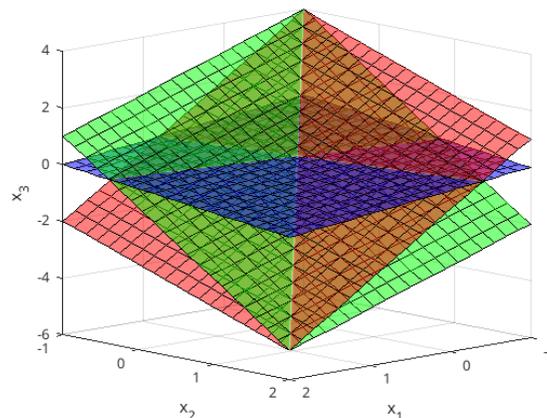
Finalement, si nous substituons (11.1.14) et (11.1.15) dans la troisième équation de (11.1.12), nous trouvons

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = x_1 + x_1 + 3(1 - 3x_1) = 1 .$$

Ce qui donne $x_1 = 2/7$. Si nous substituons cette valeur de x_1 dans (11.1.14) et (11.1.15), nous trouvons $x_2 = 2/7$ et $x_3 = 1/7$.

Nous obtenons donc la solution $(x_1, x_2, x_3) = (2/7, 2/7, 1/7)$.

Nous pouvons interpréter graphiquement la solution du système d'équations linéaires ci-dessus. Chaque équation est l'équation d'un plan. La solution est le point d'intersection des trois plans.



Il peut être difficile de visualiser le point d'intersection des trois plans.

le plan $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$ est en rouge, le plan $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ est en vert et le plan $x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$ est en bleu. 

Nous pouvons aussi utiliser les opérations sur les équations pour résoudre le système d'équations linéaires (11.1.12).

Exemple 11.1.8

Résolvons le système d'équations linéaires (11.1.12) à l'aide des opérations sur les équations.

Nous échangeons la première et troisième équation de (11.1.12) pour obtenir le système

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}\tag{11.1.16}$$

Nous soustrayons la première équation de la deuxième équation et nous soustrayons 2 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (11.1.16) pour obtenir le système

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\x_2 - 2x_3 &= 0 \\-x_2 - 5x_3 &= -1\end{aligned}\tag{11.1.17}$$

Nous additionnons la deuxième équation à la troisième équation dans le système d'équations linéaires (11.1.17) pour obtenir le système

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\x_2 - 2x_3 &= 0 \\-7x_3 &= -1\end{aligned}$$

Nous multiplions la troisième équation de ce système d'équations linéaires par $-1/7$ pour obtenir le système

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\x_2 - 2x_3 &= 0 \\x_3 &= 1/7\end{aligned}\tag{11.1.18}$$

Nous additionnons 2 fois la troisième équation à la deuxième équation et nous soustrayons 3 fois la troisième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (11.1.18) pour obtenir le système

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 4/7 \\x_2 &= 2/7 \\x_3 &= 1/7\end{aligned}\tag{11.1.19}$$

Finalement, nous soustrayons la deuxième équation de la première équation dans le système d'équations linéaires (11.1.19), pour obtenir la solution du système d'équations linéaires (11.1.12) que nous avons trouvé ci-haut ; c'est-à-dire,

$$x_1 = 2/7 \quad , \quad x_2 = 2/7 \quad \text{et} \quad x_3 = 1/7 .$$



Exemple 11.1.9

Résolvons si possible le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{11.1.20}$$

Nous échangeons la première et troisième équation de (11.1.20) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{11.1.21}$$

Nous soustrayons la première équation de la deuxième équation et nous soustrayons 2 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (11.1.21) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{11.1.22}$$

Nous soustrayons la deuxième équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (11.1.22) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons éliminer la troisième équation. Si nous multiplions la deuxième équation de ce système par $1/3$, nous obtenons le système

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{11.1.23}$$

Nous additionnons la deuxième équation à la première équation dans le système d'équations linéaires (11.1.23) pour obtenir le système

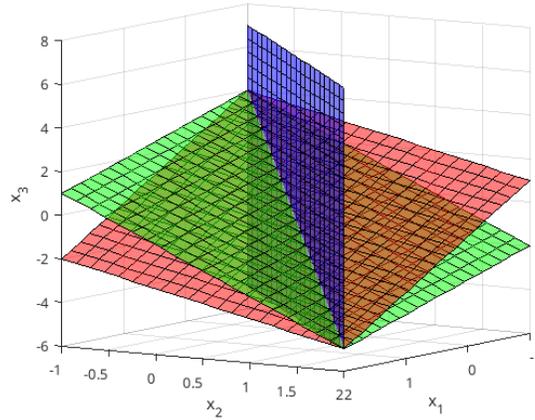
$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{3}x_3 &= \frac{1}{3} \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{11.1.24}$$

Nous ne pouvons plus simplifier le système. Nous avons $x_1 = 1/3 - x_3/3$ et $x_2 = 1/3 - x_3/3$. Les points (x_1, x_2, x_3) qui résolvent le système d'équations linéaires (11.1.20) forment donc une droite dont la représentation paramétrique est

$$(x_1, x_2, x_3) = (-s/3 + 1/3, -s/3 + 1/3, s)$$

pour $s \in \mathbb{R}$.

Les solutions du système d'équations linéaires forment une droite dans l'espace qui représente l'intersection des trois plans.



le plan $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$ est en rouge, le plan $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ est en vert et le plan $x_1 - x_2 = 0$ est en bleu.

Le droite d'intersection des trois plans possède la représentation paramétrique $(x_1, x_2, x_3) = (-s/3 + 1/3, -s/3 + 1/3, s)$ pour $s \in \mathbb{R}$. La forme standard pour cette droite est $x_1 = x_2 = \frac{x_3 - 1}{-3}$. ♣

Exemple 11.1.10

Nous laissons au lecteur la tâche de montrer que le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

possède un nombre infini de solutions de la forme $(x_1, x_2, x_3) = (s, t, 1 - 2s - t)$ pour tout s et t réels. L'ensemble des solutions forme le plan $x_3 = 1 - 2x_1 - x_2$. En fait, les trois équations linéaires de ce système sont trois équations qui représentent le même plan. ♣

Exemple 11.1.11

Montrons que le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{11.1.25}$$

n'a pas de solution.

Nous échangeons la première et deuxième équation de (11.1.25) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{11.1.26}$$

Nous soustrayons 2 fois la première équation de la deuxième équation et 3 fois la première équation de la troisième équation dans le système d'équations linéaires (11.1.26) pour obtenir le système

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\-3x_2 - x_3 &= -3 \\-3x_2 - x_3 &= -5\end{aligned}\tag{11.1.27}$$

Il est impossible de satisfaire simultanément la deuxième et la troisième équation du système d'équations linéaires (11.1.17); si nous soustrayons la deuxième équation de la troisième équation, nous obtenons $0 = -2$ qui est impossible.



L'interprétation des solutions de systèmes d'équations linéaires à l'aide de plan dans l'espace nous permet de conclure qu'un système d'équations linéaires (avec trois inconnues et trois équations) peut avoir aucune solution, une seule solution, un nombre infini de solutions qui forment une droite, ou un nombre infini de solutions qui forment un plan.

Avec trois inconnues, nous avons déjà atteint les limites de la visualisation graphique des systèmes d'équations linéaires. De plus, il devient laborieux de résoudre algébriquement de tels systèmes. Nous allons donc introduire une nouvelle approche pour résoudre les systèmes d'équations linéaires qui nous permettra de travailler avec plus de trois inconnues. Ce nouvel outil est l'algèbre linéaire.

11.2 Matrices

À la section précédente, nous avons constaté que le travail nécessaire pour résoudre les systèmes d'équations linéaires avec trois équations et trois inconnues demandait beaucoup d'attention. Nous pouvons facilement imaginer que le travail nécessaire pour résoudre les systèmes d'équations linéaires avec plus que trois inconnues et trois équations devient rapidement très ardu.

Nous allons donc développer des outils qui nous permettront de résoudre efficacement les systèmes avec un grand nombre d'inconnues et d'équations. Notre premier but est de représenter de façon simple et claire les systèmes d'équations linéaires. En fait, cette notation va grandement influencer le développement des outils pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Définition 11.2.1

Une **matrice** A est un tableau de nombres de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a n lignes et m colonnes. Nous disons que c'est **une matrice de dimension** $n \times m$. Les nombres $a_{i,j}$ sont appelés les **composantes** ou **éléments** de la matrice A . Le nombre $a_{i,j}$ est la composante sur la i^e ligne et dans la j^e colonne. Nous disons que la matrice A est **carrée** lorsque $n = m$; nous avons le même nombre de lignes et colonnes.

Exemple 11.2.2

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \pi & 5 & 2.3 \\ 0 & 4 & -7.56 & 1 & -10 \\ -7 & e^2 & 10^6 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimension 3×5 alors que

$$B = (1 \quad 4 \quad 7 \quad 10)$$

est une matrice de dimension 1×4 . Nous avons que $a_{1,3} = \pi$, $a_{3,2} = e^2$, $a_{3,5} = \sqrt{5}$, $b_{1,1} = 1$, $b_{1,3} = 7$, etc. ♣

11.2.1 Opérations sur les matrices

Avant de définir des opérations sur les matrices, il faut définir quand deux matrices sont égales.

Définition 11.2.3

Nous disons que deux matrices A et B sont **égales**, dénoté $A = B$, lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. A et B ont le même nombre de lignes et de colonnes.
2. Si n est le nombre de lignes et m est le nombre de colonnes, alors $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

Nous voulons définir des opérations sur les matrices qui prolongeront les opérations sur les vecteurs que nous connaissons déjà; c'est-à-dire, le produit d'un vecteur par un scalaire, la somme de deux vecteurs et le produit scalaire de deux vecteurs. Il faut premièrement généraliser la définition de vecteur que nous avons donnée pour \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Définition 11.2.4

Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est une liste de n nombres réels que nous dénotons

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (11.2.1)$$

ou

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (11.2.2)$$

La représentation du vecteur \mathbf{x} en (11.2.1) est associée à l'aspect géométrique des vecteurs (i.e. \mathbf{x} est le point où se termine une flèche qui part de l'origine) alors que la représentation de \mathbf{x} en (11.2.2) est associée à l'aspect algébrique des vecteurs. En effet, la représentation de \mathbf{x} en (11.2.2) représente une matrice de dimension $n \times 1$. Par la suite, nous parlerons souvent du vecteur \mathbf{x} quand, en fait, nous ferons référence à la matrice que nous retrouvons en (11.2.2). C'est le contexte qui déterminera quelle interprétation doit être donnée à \mathbf{x} .

Le produit d'un vecteur \mathbf{x} par un scalaire α et la somme des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} prennent alors la forme suivante.

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

La somme de matrices et le produit d'une matrice par un scalaire sont des reformulations de ces mêmes opérations pour les vecteurs.

Définition 11.2.5

Soit A et B deux matrices de dimension $n \times m$ et α un nombre réel.

1. La **somme** de A et B , dénotée $A + B$, est la matrice C de dimension $n \times m$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

2. Le **produit** du scalaire α et de la matrice A , dénoté αA , est la matrice C de dimension $n \times m$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j}$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

Nous remarquons que la somme de matrices n'est pas définie si les matrices n'ont pas la même dimension. La somme de matrices et le produit d'une matrice par un scalaire possèdent les propriétés suivantes.

Proposition 11.2.6

1. $A+B = B+A$ pour toutes matrices A et B de dimension $n \times m$ (commutativité de l'addition).
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ pour toutes matrices A , B et C de dimension $n \times m$ (associativité de l'addition).
3. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ pour toutes matrices A et B de dimension $n \times m$ et tout nombre réel α (distributivité du produit par un scalaire sur la somme de matrices).
4. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et tous nombres réels α et β .
5. $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et tous nombres réels α et β .

Exemple 11.2.7

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} C = A + 2B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -10 & 4 \\ 4 & -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+4 & -1+4 & 3+4 & 1-2 \\ -4-6 & 5+2 & -7-10 & 2+4 \\ 3+4 & 6-8 & 9+10 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & -1 \\ -10 & 7 & -17 & 6 \\ 7 & -2 & 19 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Avant d'introduire le produit de deux matrices, revoyons le produit scalaire de deux vecteurs. Pour cela, nous aurons besoin de la notion de transposée d'une matrice.

Définition 11.2.8

Soit A une matrice de dimension $n \times m$, la **transposée de A** , dénotée A^\top , est la matrice de dimension $m \times n$ dont les éléments $a_{i,j}^\top$ sont $a_{i,j}^\top = a_{j,i}$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

La première ligne de A est la première colonne de A^\top . La deuxième ligne de A est la deuxième colonne de A^\top , etc.

Exemple 11.2.9

Si

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 5 & 7 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

alors

$$A^\top = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$



Soit \mathbf{x} et \mathbf{y} , deux vecteurs de \mathbb{R}^n que nous représentons sous la forme de matrices de dimension $n \times 1$. Nous définissons le produit de \mathbf{x}^\top et \mathbf{y} de la façon suivante.

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right).$$

La matrice \mathbf{x}^\top est de dimension $1 \times n$, la matrice \mathbf{y} est de dimension $n \times 1$, et le produit $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ est la matrice de dimension 1×1 définie par $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)$.

La tradition veut qu'une matrice (z) de dimension 1×1 soit simplement dénotée z , la valeur de son unique composante. Avec cette convention, le produit de \mathbf{x}^\top et \mathbf{y} est

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Nous retrouvons du côté droit de l'égalité le produit scalaire de deux vecteurs que nous avons défini au chapitre 10. En particulier, \mathbf{x} et \mathbf{y} désignent les vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_n) à droite du signe d'égalité et non plus les matrices de dimension $n \times 1$ comme c'est le cas du côté gauche.

Définition 11.2.10

À partir de maintenant, le **produit scalaire** de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^n sera définie par

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

C'est cette présentation du produit scalaire de deux vecteurs que nous prolongeons pour définir le produit de deux matrices.

Définition 11.2.11

Soit A et B deux matrices. La matrice A est de dimension $n \times m$ et la matrice B est de dimension $m \times q$. Le produit AB est la matrice C de dimension $n \times q$ qui possède les éléments

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^m a_{i,k} b_{k,j} \quad (11.2.3)$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$.

Les rectangles dans le produit suivant indiquent la ligne de A et la colonne de B qui sont utilisées pour calculer $c_{3,2}$.

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \boxed{a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \boxed{b_{1,2}} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,q} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \cdots & b_{3,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \boxed{b_{m,2}} & b_{m,3} & \cdots & b_{m,q} \end{pmatrix}.$$

Nous avons $c_{3,2} = a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} + a_{3,4}b_{4,2} + \cdots + a_{3,m}b_{m,2}$.

La formule (11.2.3) est le produit scalaire du vecteur formé par les composantes de la i^e ligne de A avec le vecteur formé de composantes de la j^e colonne de B . En effet, si

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,m} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{m,j} \end{pmatrix},$$

alors $c_{i,j} = \mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Exemple 11.2.12

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

alors

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \boxed{-4} & 5 & -7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \boxed{2} & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -11 & 22 & -9 \\ -37 & 25 & \boxed{-68} & 28 \\ 6 & -24 & 21 & -9 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $c_{2,3} = (-4) \times 2 + 5 \times (-5) + (-7) \times 5 = -68$.

Le produit BA est impossible car nous ne pouvons pas faire le produit scalaire d'une ligne de B qui a 4 composantes avec une colonne de A qui a seulement 3 composantes. ♣

Exemple 11.2.13

Si A est une matrice de dimension 3×4 et B est une matrice de dimension 4×2 , alors

AB est une matrice de dimension 3×2 . Le produit BA n'est pas défini car le nombre de colonnes de B (i.e. 2) n'est pas égal au nombre de lignes de A (i.e. 3). 

Le produit de matrices possède les propriétés suivantes.

Proposition 11.2.14

1. $A(BC) = (AB)C$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$, toute matrice B de dimension $m \times q$ et toute matrice C de dimension $q \times p$ (associativité du produit de matrices).
2. $A(B + C) = AB + AC$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$ et toutes matrices B et C de dimension $m \times q$ (distributivité du produit de matrices sur la somme de matrices).
3. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ pour toute matrice A de dimension $n \times m$, toute matrice B de dimension $m \times q$ et tout nombre réel α .

Le produit de nombres réels est commutatif; c'est-à-dire que $ab = ba$ pour tous les nombres réels a et b . Nous ne retrouvons pas cette propriété dans la liste ci-dessus car elle n'est pas vraie pour le produit de matrices.

Pour pouvoir parler de commutativité du produit de matrices, il faut que les matrices soient carrées et de même dimension. En effet, si A est une matrice de dimension $n_1 \times m_1$ et B est une matrice de dimension $n_2 \times m_2$, alors il faut avoir $m_1 = n_2$ pour que AB soit défini, $m_2 = n_1$ pour que BA soit défini, $n_1 = n_2$ et $m_2 = m_1$ pour que BA et AB ait la même dimension. Le fait d'avoir des matrices carrées de même dimension n'est pas suffisant pour avoir commutativité. Même si A et B sont deux matrices carrées de dimension $n \times n$, il est rare que nous ayons $AB = BA$. L'exemple suivant illustre ce fait.

Exemple 11.2.15

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont deux matrices carrées de dimension 2×2 . Nous avons

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Donc $AB \neq BA$. 

Nous terminons cette section avec une proposition qui lie la transposée d'une matrice au produit scalaire de deux vecteurs. Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant qui, en lieu même, est très important. La démonstration de ce résultat est une simple mais fastidieuse conséquence de la définition du produit de matrices. Nous laissons donc le soin aux lecteurs de s'en convaincre.

Proposition 11.2.16

Si A est une matrice de dimension $n \times m$ et B est une matrice de dimension $m \times q$ alors $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Proposition 11.2.17

Soit A , une matrice de dimension $n \times m$, alors

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle$$

pour tout vecteur \mathbf{x} de \mathbb{R}^m et tout vecteur \mathbf{y} de \mathbb{R}^n

Comme les expressions de la forme $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ jouent un rôle prédominant en algèbre linéaire, nous allons prouver cette proposition.

Il découle de la définition 11.2.10 que

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top A^\top) \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (A^\top \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle$$

où nous avons utilisé la proposition 11.2.16 pour obtenir la deuxième égalité.

Une autre façon de prouver la proposition précédente est de développer chacun des côtés de l'égalité donnée à la proposition précédente. Posons $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$. Les composantes de \mathbf{z} sont

$$z_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$. Ainsi,

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n z_i y_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j \right) y_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} x_j y_i. \quad (11.2.4)$$

De plus, posons $\mathbf{w} = A^\top \mathbf{y}$. Les composantes de \mathbf{w} sont

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i$$

pour $j = 1, 2, \dots, m$. Ainsi,

$$\langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{j=1}^m x_j w_j = \sum_{j=1}^m x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} x_j y_i. \quad (11.2.5)$$

Il découle de (11.2.4) et (11.2.5) que la conclusion de la proposition précédente est vraie.

Exemple 11.2.18

Vérifions que

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle$$

si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\mathbf{z} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{z}^\top \mathbf{y} = (5 \quad -3 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -8.$$

De plus,

$$\mathbf{w} = A^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{w} = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -8.$$



Pour conclure cette section, nous présentons une dernière opération sur les matrices. Celle-ci est valide seulement pour les matrices carrées. Elle ne jouera pas un grand rôle dans ce manuel mais elle est utile en algèbre linéaire, en analyse numérique, etc.

Définition 11.2.19

Soit la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

la **Trace** de la matrice A , dénotée $\text{tr}(A)$, est la somme des éléments sur la diagonale de A ; c'est-à-dire, $\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}$.

11.2.2 Inverse additif et multiplicatif d'une matrice

Nous savons que 0 est un élément neutre pour l'addition de nombres réels; c'est-à-dire que $a + 0 = 0 + a = a$ pour tout nombre réel a . De même, le nombre 1 est un élément neutre pour la multiplication de nombres réels; c'est-à-dire que $a \times 1 = 1 \times a = a$ pour tout nombre réel a . Est-ce que l'addition de matrices possède un élément neutre? De même, est-ce que le produit de matrices possède un élément neutre? Pour l'addition, la réponse est simple.

Définition 11.2.20

0 dénote une matrice dont les composantes sont toutes nulles.

Proposition 11.2.21

La matrice 0 de dimension $n \times m$ est l'élément neutre pour l'addition de matrices de dimension $n \times m$. C'est-à-dire que $0 + A = A + 0 = A$ pour toutes matrices A de dimension $n \times m$.

Définition 11.2.22

L'inverse additif d'une matrice A de dimension $n \times m$ est la matrice B de dimension $n \times m$ telle que $A + B = B + A = 0$ où 0 est la matrice nulle de dimension $n \times m$.

Comme l'addition de matrices est définie par l'addition composante par composante, nous avons $b_{i,j} = -a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. La matrice B est dénotée $-A$. Nous avons $-A = (-1)A$.

L'inverse additif d'une matrice A est unique. En effet, si B et C sont deux inverses additifs de A alors

$$B = B + 0 = B + \underbrace{(A + C)}_{=0} = \underbrace{(B + A)}_{=0} + C = 0 + C = C.$$

Toute matrice A a un seul inverse additif.

Pour définir un élément neutre I pour le produit de matrices, il faut considérer seulement les matrices carrées car cet élément neutre doit satisfaire $IA = AI = A$ pour toutes matrices A . Pour que AI et IA soient définis, et que AI et IA soient de même dimension, il faut que I et A soient des matrices carrées de même dimension.

Certaines composantes d'une matrice carrée jouent un rôle particulier dans l'étude des matrices, c'est le cas des composantes qui forment la diagonale de la matrice.

Définition 11.2.23

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La **diagonale** de la matrice A est l'ensemble des éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ de A .

Définition 11.2.24

I dénote une matrice carrée dont les composantes sur la diagonale sont 1 et les autres composantes sont nulles. La matrice I est appelée la **matrice identité**.

Proposition 11.2.25

La matrice I de dimension $n \times n$ est l'élément neutre pour la multiplication de matrices carrées de dimension $n \times n$. C'est-à-dire que $IA = AI = A$ pour toutes matrices carrées

A de dimension $n \times n$.

Exemple 11.2.26

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = A$$

et

$$AI = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = A.$$



Maintenant que nous avons un élément neutre pour le produit de matrices carrées, il est naturel de chercher à définir ce que serait l'inverse d'une matrice. Commençons par revoir la définition de l'inverse multiplicatif pour les nombre réels. L'inverse multiplicatif pour le nombre réel a est le nombre réel b tel que $ba = ab = 1$. Sauf pour $a = 0$, tout nombre réel a possède un inverse multiplicatif.

Exemple 11.2.27

Si $a = 4$, alors $b = 0.25$ est l'inverse de a car $ab = ba = 1$.



Comme pour la multiplication de nombres réels, nous pouvons définir l'inverse d'une matrice carrée.

Définition 11.2.28

S'il existe, l'inverse (multiplicatif) d'une matrice carrée A de dimension $n \times n$ est la matrice B de dimension $n \times n$ telle que $AB = BA = I$. La matrice B est dénotée A^{-1} . Nous disons que la matrice carrée A est **inversible** si A possède un inverse.

Contrairement aux nombres réels, les matrices carrées ne possèdent pas toutes des inverses. Par contre, si la matrice carrée A a un inverse B alors cet inverse est unique. En effet, si C est une autre matrice telle que $AC = CA = I$ alors

$$B = BI = B \underbrace{(AC)}_{=I} = \underbrace{(BA)}_{=I} C = IC = C.$$

Exemple 11.2.29

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons que $AB = BA = I$. Donc $A^{-1} = B$.



Exemple 11.2.30

Par contre, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

n'a pas d'inverse. Supposons que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

soit l'inverse de A . Il faut donc avoir $AB = I$; c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -a - 2c & -b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est impossible de trouver a et b tels que $a + 2c = 1$ et $-a - 2c = 0$ simultanément. De même, il est impossible de trouver b et d tels que $b + 2d = 0$ et $-b - 2d = 1$. Nous ne pouvons donc pas trouver d'inverse pour A . ♣

Il est généralement très difficile de déterminer si une matrice possède un inverse et de trouver cet inverse s'il existe. Dans une prochaine section, nous donnerons une méthode pour trouver l'inverse d'une matrice si cet inverse existe.

11.3 Représentations matricielles des systèmes d'équations linéaires

Les matrices nous permettent de développer une méthode pour déterminer si un système d'équations linéaires possède une solution, un nombre infini de solutions ou aucune solution. Nous commençons par une méthode qui nous permet de trouver les solutions d'un système d'équations linéaires quand celui-ci a des solutions.

Considérons le système d'équations linéaires suivant avec m inconnues et n équations.

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \dots + a_{n,m}x_m &= b_n \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

Nous pouvons exprimer ce système d'équations linéaires à l'aide des matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Alors, le système d'équations linéaires (11.3.1) peut être exprimé sous la forme

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{11.3.2}$$

Proposition 11.3.1

Résoudre (11.3.1) est équivalent à trouver les vecteurs \mathbf{x} qui satisfont (11.3.2) s'il y en a.

La matrice A est la matrice des coefficients de \mathbf{x} dans le système d'équations linéaires (11.3.1).

11.3.1 Méthode d'élimination de Gauss**Définition 11.3.2**

La **matrice augmentée** associée au système d'équations linéaires (11.3.1) est la matrice

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{array} \right).$$

Au lieu d'effectuer les opérations sur les équations du système d'équations linéaires (11.3.1) présentées à la méthode 11.1.2, nous effectuons les mêmes opérations sur les lignes de la matrice augmentée. Afin de simplifier la description des opérations sur les lignes, nous utiliserons la terminologie suivante.

Définition 11.3.3

1. R_i désigne la i^e ligne.
2. Multiplier la i^e ligne par α est dénoté $\alpha R_i \rightarrow R_i$.
3. Additionner α fois la j^e ligne à la i^e ligne est dénoté $\alpha R_j + R_i \rightarrow R_i$.
4. Échanger la i^e ligne et la j^e ligne est dénoté $R_i \leftrightarrow R_j$.

Exemple 11.3.4

Utilisons la notation matricielle pour résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{11.3.3}$$

La matrice augmentée associée à ce système d'équations linéaires est

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$ et $2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right).$$

$-R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ et $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right).$$

$(1/4)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_2 - R_3 \rightarrow R_2$ et $R_1 - R_3 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(A \mid \mathbf{b} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19/4 \\ 0 & 1 & 0 & -37/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{array} \right).$$

Puisque la première, deuxième et troisième colonne de la matrice augmentée sont respectivement associées à x_1 , x_2 et x_3 , nous obtenons la solution

$$x_1 = 19/4, \quad x_2 = -37/4 \quad \text{et} \quad x_3 = 5/4$$

du système d'équations linéaires (11.3.3). ♣

11.3.2 Matrices inverses

Avec cette nouvelle notation pour les systèmes d'équations linéaires, nous pouvons maintenant donner une méthode pour trouver la matrice inverse d'une matrice carrée si un tel inverse existe.

Soit A et B deux matrices carrées tel que $B = A^{-1}$. Nous pouvons déduire de l'égalité $AB = I$ que

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons de

$$\begin{array}{ccc} & 2^{\text{e}} \text{ colonne} & 2^{\text{e}} \text{ colonne} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \boxed{b_{1,2}} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \boxed{b_{2,2}} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n} \\ b_{3,1} & \boxed{b_{3,2}} & b_{3,3} & \dots & b_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \boxed{b_{n,2}} & b_{n,3} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

que

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ b_{3,2} \\ \vdots \\ b_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La deuxième colonne de la matrice I est A multiplié à droite par la deuxième colonne de la matrice B . En générale, la k^{e} colonne de la matrice identité I est A multiplié à droite par la k^{e} colonne de la matrice B .

Chaque colonne de B donne un vecteur (i.e. une matrice de dimension $n \times 1$). La k^{e} colonne de B donne le vecteur

$$\mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1,k} \\ b_{2,k} \\ \vdots \\ b_{n,k} \end{pmatrix}.$$

De même, la k^{e} colonne de I donne le vecteur \mathbf{e}_k dont les composantes sont 0 sauf pour la k^{e} qui est 1. Par exemple,

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons donc reformuler la remarque du paragraphe précédent par $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ pour $1 \leq k \leq n$. C'est cette dernière propriété qui justifie la méthode suivante pour trouver l'inverse d'une matrice carrée si celui-ci existe.

Proposition 11.3.5

Si A est une matrice de dimension $n \times n$ qui possède une matrice inverse, alors la k^{e} colonne \mathbf{b}_k de la matrice A^{-1} est la solution de l'équation

$$A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$$

pour $1 \leq k \leq n$. De plus, si A est une matrice de dimension $n \times n$ et une des équations

$A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ pour $1 \leq k \leq n$ n'a pas de solution, alors A n'est pas inversible.

Soit A une matrice inversible (i.e. qui a un inverse) de dimension $n \times n$. Pour trouver les n colonnes de la matrice inverse A^{-1} , il faut résoudre n équations de la forme $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$. Pour chaque valeur de k , il faut donc réduire la matrice augmentée $(A \mid \mathbf{e}_k)$ à une forme simple qui donnera la k^e colonne \mathbf{b}_k de A^{-1} . Comme A est une matrice carrée inversible de dimension $n \times n$, nous pouvons assumer que la forme simple qui résulte de la réduction de la matrice augmentée $(A \mid \mathbf{e}_k)$ remplace A par la matrice identité de dimension $n \times n$. C'est-à-dire que la forme simple finale est $(I \mid \mathbf{b}_k)$. Si ce n'était pas le cas, nous aurions qu'une des équations $A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k$ n'a pas de solutions.

Or, pour les n matrices augmentées $(A \mid \mathbf{e}_k)$ pour $1 \leq k \leq n$, les mêmes opérations sur les lignes sont effectuées pour réduire la matrice A à la matrice identité. Nous pouvons donc regrouper les n matrices augmentées en une large matrice augmentée

$$(A \mid I) = (A \mid \mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n).$$

Si nous réduisons la matrice A à la matrice identité I de dimension $n \times n$, nous obtenons

$$(I \mid B) = (I \mid \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n).$$

\mathbf{b}_1 est la solution de l'équation $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1$, \mathbf{b}_2 est la solution de l'équation $A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$, etc. Ainsi,

$$A^{-1} = B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n).$$

Exemple 11.3.6

Trouvons l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous considérons la matrice augmentée

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$3R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$(A \mid I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$R_3 - 5R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$(A \mid I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right).$$

$(1/2)R_2 \rightarrow R_2$ et $(1/10)R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(A \mid I \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{array} \right).$$

$R_2 + (1/2)R_3 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(A \mid I \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(A \mid I \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/20 & -3/4 & -3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{array} \right).$$

L'inverse de la matrice A est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/20 & -3/4 & -3/20 \\ 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 3/10 & -1/2 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Nous invitons le lecteur à vérifier que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. 

Proposition 11.3.7

Si A est une matrice inversible de dimension $n \times n$ et \mathbf{b} est un vecteur de dimension $n \times 1$, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution et cette solution est unique. Cette solution est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

En effet, si A est inversible, une solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ car

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

De plus, si \mathbf{y} est un solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alors

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A^{-1}(A\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow (A^{-1}A)\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow I\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

De la proposition précédente, nous déduisons que si A est une matrice inversible alors la seule solution de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ce qui est un peu plus surprenant est que l'inverse est aussi vrai.

Proposition 11.3.8

Si A est une matrice de dimension $n \times n$ telle que la seule solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, alors A est inversible.

11.3.3 Intersection de trois plans dans \mathbb{R}^3

Lors de l'étude des vecteurs, nous avons donné quelques exemples où il fallait déterminer si trois plans se coupaient simultanément et, si oui, déterminer l'intersection de ces trois plans.

Considérons les trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 donnés respectivement par

$$\begin{aligned} m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + m_{1,3}x_3 &= b_1, \\ m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + m_{2,3}x_3 &= b_2 \end{aligned}$$

et

$$m_{3,1}x_1 + m_{3,2}x_2 + m_{3,3}x_3 = b_3.$$

Les points \mathbf{x} qui appartiennent à l'intersection des trois plans doivent satisfaire le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} m_{1,1}x_1 + m_{1,2}x_2 + m_{1,3}x_3 &= b_1 \\ m_{2,1}x_1 + m_{2,2}x_2 + m_{2,3}x_3 &= b_2 \\ m_{3,1}x_1 + m_{3,2}x_2 + m_{3,3}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

C'est un système de la forme $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & b_1 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & b_2 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & b_n \end{array} \right).$$

Il y a quatre possibilités :

1. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solutions. Les trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 n'ont aucun point en commun.
2. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une seule solution. Les trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 ont un seul point commun.
3. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a un nombre infini de solutions qui dépendent d'un paramètre. L'intersection des trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 est une droite donnée par la représentation paramétrique des solutions.
4. Le système $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a un nombre infini de solutions qui dépendent de deux paramètres. L'intersection des trois plans \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 est un plan. C'est le cas où les trois équations linéaires sont des multiples l'une de l'autre et représentent le même plan.

11.4 Déterminant

Dans cette section, nous définissons une fonction qui, à toute matrice carrée A , associe un nombre réel dénoté $\det(A)$ (certains auteurs écrivent simplement $\det A$ mais nous ne ferons pas comme eux). Cette fonction permettra en théorie de déterminer si une matrice possède un inverse. L'expression « en théorie » indique qu'il est en fait très onéreux d'évaluer cette fonction. En pratique, pour les matrices de grandes dimensions, nous utilisons d'autres méthodes (par exemple, la proposition 11.3.8) pour déterminer si une matrice est inversible.

11.4.1 introduction

Pour définir ce qu'est le déterminant d'une matrice $n \times n$, il faut premièrement définir ce qu'est une permutation des éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Définition 11.4.1

Comme le nom l'indique, une **permutation** des éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ est tout simplement une liste ordonnée $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ de tous les éléments de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. En termes mathématiques, $\sigma_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ et $\sigma_i \neq \sigma_j$ pour $i \neq j$.

Par exemple, les permutations de l'ensemble $\{1, 2\}$ sont $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Les permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ et $(3, 2, 1)$. Quelles seront les 24 permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$?

Nous dénotons par S_2 l'ensemble $\{(1, 2), (2, 1)\}$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2\}$. Nous dénotons par S_3 l'ensemble $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. En générale, nous dénotons par S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Définition 11.4.2

Inverser deux éléments d'une permutation est appelé une **transposition** sur une permutation.

Par exemple, inverser le deuxième et troisième élément de $(1, 3, 2)$ donne $(1, 2, 3)$, inverser le troisième et quatrième élément de $(1, 4, 3, 2, 5)$ donne $(1, 4, 2, 3, 5)$, et inverser le deuxième et quatrième élément de $(1, 4, 3, 2)$ donne $(1, 2, 3, 4)$.

Définition 11.4.3

Le **signe d'une permutation** de S_n est définie par

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} 1 & \text{s'il faut effectuer un nombre pair de transpositions} \\ & \text{pour réduire } (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ à } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{s'il faut effectuer un nombre impair de transpositions} \\ & \text{pour réduire } (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ à } (1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Ainsi, $\text{sgn}(2, 1) = -1$ car une seule transposition est nécessaire pour réduire $(2, 1)$ à $(1, 2)$; il suffit d'inverser le premier et deuxième élément. Nous avons que $\text{sgn}(2, 3, 1) = 1$ car deux transpositions sont nécessaires pour réduire $(2, 3, 1)$ à $(1, 2, 3)$; nous inversons le deuxième et troisième élément de $(2, 3, 1)$ pour obtenir $(2, 1, 3)$ et nous inversons le premier et deuxième élément de $(2, 1, 3)$ pour obtenir $(1, 2, 3)$.

Définition 11.4.4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} .$$

Le **déterminant** de la matrice A , dénoté $\det(A)$, est défini par

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in S_2} \text{sgn}(\sigma_1, \sigma_2) a_{1, \sigma_1} a_{2, \sigma_2} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} . \end{aligned}$$

Exemple 11.4.5

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

alors $\det(A) = 1 \times 5 - 2 \times (-1) = 7$.



Définition 11.4.6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} .$$

Le **déterminant** de la matrice A , dénoté $\det(A)$, est défini par

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S_3} \text{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) a_{1, \sigma_1} a_{2, \sigma_2} a_{3, \sigma_3} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} \\ &\quad + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} . \end{aligned}$$

Exemple 11.4.7

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} ,$$

alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \times 5 \times 4 - 1 \times 3 \times (-5) - 2 \times (-2) \times 4 + 2 \times 3 \times (-3) \\ &\quad + (-1) \times (-2) \times (-5) - (-1) \times 5 \times (-3) = 8 . \end{aligned}$$



En générale, le déterminant est définie de la façons suivante.

Définition 11.4.8

Si A est une matrice de dimension $n \times n$, le **déterminant** de A , dénoté $\det(A)$, est définie par

$$\det(A) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) a_{1, \sigma_1} a_{2, \sigma_2} \cdots a_{n, \sigma_n} .$$

11.4.2 Signe d'une permutation

Est-ce que le déterminant est bien défini? En particulier, il y a plusieurs choix possibles de transpositions pour réduire une permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ à la permutation trivial $(1, 2, \dots, n)$. Est-ce que le nombre de transpositions pour chaque choix est toujours pair ou impaire? Il faut une réponse affirmative à cette question si nous voulons que le signe d'une permutation soit indépendant du choix de transpositions utilisées pour réduire cette permutation à la permutation trivial.

Nous commençons par donner une définition plus précise d'une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Définition 11.4.9

Une **permutation** sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ est une fonction injective de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dans lui même.

L'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ est dénoté S_n .

Une **transposition** est une permutation $\tau \in S_n$ qui est définie de la façon suivante. Ils existent i et j dans $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tels que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ et $\tau(k) = k$ pour $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$.

Théorème 11.4.10

Si σ est une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ alors ils existent des transpositions $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ telles que

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_s .$$

La représentation de σ en termes de transpositions n'est pas unique. Par contre, si $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$ est un autre ensemble de transpositions telles que

$$\sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_t ,$$

alors t est pair si et seulement si s est pair (donc t est impair si et seulement si s est impair).

Ce dernier théorème nous permet donc de définir sans ambiguïté le signe d'une permutation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

Définition 11.4.11

Le **signe** d'une permutation $\sigma \in S_n$, dénoté $\text{sgn}(\sigma)$, est définie par

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{s'il faut un nombre pair de transpositions} \\ & \text{pour représenter } \sigma \\ -1 & \text{s'il faut un nombre impair de transpositions} \\ & \text{pour représenter } \sigma \end{cases}$$

Maintenant que nous savons que le signe d'une permutation est bien défini, nous pouvons dire que le déterminant d'une matrice carré est bien définie.

11.4.3 Calcul du déterminant

Il y a un lien entre la formule pour calculer le déterminant d'une matrice de dimension 2×2 et celle pour calculer le déterminant d'une matrice de dimension 3×3 .

Soit A une matrice de dimension 3×3 et posons

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{1,3} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \\ &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \\ &= a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{1,2} \det(A_{1,2}) + a_{1,3} \det(A_{1,3}). \end{aligned}$$

De façon semblable, nous pouvons démontrer la proposition suivante.

Proposition 11.4.12

Si $A_{i,j}$ est la matrice de dimension 2×2 obtenue d'une matrice A de dimension 3×3 en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne, alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(A_{k,j}) \quad (11.4.1)$$

et

$$\det(A) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{k+i} a_{i,k} \det(A_{i,k}) \quad (11.4.2)$$

quelle que soit la valeur de l'indice $k \in \{1, 2, 3\}$.

La somme en (11.4.1) est un développement selon une ligne pour calculer le déterminant de A alors que la somme en (11.4.2) est un développement selon une colonne pour calculer le déterminant de A . Un bon choix de développement peut grandement simplifier le calcul du déterminant.

Exemple 11.4.13

Pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

il est très avantageux de développer selon la deuxième ligne. Ainsi,

$$\begin{aligned} \det(A) &= -a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{2,2} \det(A_{2,2}) - a_{2,3} \det(A_{2,3}) \\ &= -0 \times \det(A_{2,1}) + 5 \times \det(A_{2,2}) - 0 \times \det(A_{2,3}) \\ &= 5 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = 5(3 \times 7 - (-1) \times (-2)) = 95. \end{aligned}$$

Les matrices $A_{i,j}$ proviennent de la matrice A à laquelle nous avons enlevé la i^e ligne et la j^e colonne.

$$\begin{aligned} A_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} & \text{ provient de } A = \begin{pmatrix} \blacksquare & 2 & -1 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ -\blacksquare & 4 & 7 \end{pmatrix} \\ A_{2,2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} & \text{ provient de } A = \begin{pmatrix} 3 & \blacksquare & -1 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ -2 & \blacksquare & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ provient de } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -\blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ -2 & 4 & \blacksquare \end{pmatrix}.$$



La proposition 11.4.12 a une version équivalente pour les matrices de dimension $n \times n$ avec n un entier positif.

Proposition 11.4.14

Si $A_{i,j}$ est la matrice de dimension $(n-1) \times (n-1)$ obtenue d'une matrice A de dimension $n \times n$ en enlevant la i^e ligne et la j^e colonne, alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(A_{k,j})$$

et

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} a_{i,k} \det(A_{i,k})$$

quelle que soit la valeur de l'indice $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Nous pouvons utiliser cette proposition récursivement pour calculer le déterminant d'une matrice.

Exemple 11.4.15

Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si nous développons selon la troisième ligne, nous obtenons

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{3,1} \det(A_{3,1}) - a_{3,2} \det(A_{3,2}) + a_{3,3} \det(A_{3,3}) - a_{3,4} \det(A_{3,4}) + a_{3,5} \det(A_{3,5}) \\ &= 0 \times \det(A_{3,1}) - 3 \det(A_{3,2}) + 0 \times \det(A_{3,3}) - 0 \times \det(A_{3,4}) + 0 \times \det(A_{3,5}) \\ &= -3 \det(A_{3,2}). \end{aligned}$$

Posons

$$B = A_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si nous développons la matrice B selon la deuxième ligne, nous obtenons

$$\begin{aligned} \det(B) &= -b_{2,1} \det(B_{2,1}) + b_{2,2} \det(B_{2,2}) - b_{2,3} \det(B_{2,3}) + b_{2,4} \det(B_{2,4}) \\ &= -0 \times \det(B_{2,1}) + 0 \times \det(B_{2,2}) - 0 \times \det(B_{2,3}) + 3 \det(B_{2,4}) \\ &= 3 \det(B_{2,4}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\det(A) = -3 \det(B) = -9 \det(B_{2,4}).$$

Posons

$$C = B_{2,4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si nous développons selon la deuxième ligne de C (toute autre choix de ligne ou colonne serait valable), nous obtenons

$$\det(C) = -c_{2,1} \det(C_{2,1}) + c_{2,2} \det(C_{2,2}) - c_{2,3} \det(C_{2,3})$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2(1 - 3) + 7(-3 - 3) - 5(3 + 1) = -66 .
\end{aligned}$$

Ainsi.

$$\det(A) = -9 \det(C) = -9 \times (-66) = 594 .$$



Exemple 11.4.16

Pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} ,$$

il est très avantageux de développer selon la première colonne. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{3,1} \det(A_{3,1}) \\
&= 3 \det(A_{1,1}) - 0 \times \det(A_{2,1}) + 0 \times \det(A_{3,1}) \\
&= 3 \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 3 \times 5 \times 4 = 60 .
\end{aligned}$$



La matrice de l'exemple précédent est d'un type particulier.

Définition 11.4.17

Une matrice A de dimension $n \times n$ est **triangulaire supérieure** si les composantes de A qui sont sous la diagonale sont nulles. En d'autres mots, $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

Une matrice A de dimension $n \times n$ est **triangulaire inférieure** si les composantes de A qui sont au-dessus de la diagonale sont nulles. En d'autres mots, $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$.

L'exemple précédent montre que le déterminant des matrices triangulaires supérieures (de dimensions 2×2 ou 3×3) est le produit des éléments sur la diagonale. Il en est de même pour les matrices triangulaires inférieures.

Proposition 11.4.18

Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure) de dimension $n \times n$, alors

$$\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n} .$$

C'est-à-dire que le déterminant de A est le produit des éléments sur la diagonale de A .

Remarque 11.4.19

La démonstration de cette proposition est très simple. Le seul terme de la forme

$$a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

dans la définition 11.4.8 du déterminant qui ne contient possiblement pas un facteur nul est donné par la permutation $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Toutes les autres permutations σ vont avoir $\sigma(k) < k$ pour au moins une valeur de k . ♠

Le déterminant possède les propriétés suivantes.

Proposition 11.4.20

Soit A une matrice de dimension $n \times n$.

1. Si nous échangeons deux lignes (ou deux colonnes) de A , nous obtenons une matrice B telle que $\det(B) = -\det(A)$.
2. Si nous ajoutons une ligne de A à une autre ligne de A , nous obtenons une matrice B telle que $\det(B) = \det(A)$.
3. Si nous ajoutons une colonne de A à une autre colonne de A , nous obtenons une matrice B telle que $\det(B) = \det(A)$.
4. Si nous multiplions une ligne (ou une colonne) de A par un nombre α , nous obtenons une matrice B telle que $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Nous pouvons utiliser ces propriétés pour calculer le déterminant d'une matrice. Dans l'exemple qui suit, nous dénotons la i^e ligne par R_i et la j^e colonne par C_j , comme nous avons fait précédemment.

Exemple 11.4.21

Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons les opérations sur les lignes et colonnes de A pour réduire le calcul du déterminant de A au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

$R_1 \leftrightarrow R_3$ donne

$$\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(1/3)R_2 \rightarrow R_2$ et $-(1/3)R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$\det(A) = -(3)(-3) \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & 5/3 & -2/3 \\ -1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & 5/3 & -2/3 \\ -1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$R_2 + R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 + R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\det(A) = 9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & -10/3 & 10/3 \\ 0 & -17/3 & 13/3 \end{pmatrix}.$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$ donne

$$\det(A) = -9 \det \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & -17/3 & 13/3 \\ 0 & -10/3 & 10/3 \end{pmatrix}.$$

$C_2 + C_3 \rightarrow C_2$ donne

$$\det(A) = -9 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\det(A) = -9 \times 1 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \frac{10}{3} = 40.$$



Les propriétés énoncées à la proposition 11.4.20 sont vrais pour toutes les valeurs positives de n . Pour calculer le déterminant d'une matrice A , nous n'utilisons pas la définition du déterminant mais nous utilisons les propriétés données à la proposition 11.4.20 pour réduire la matrice A à une matrice triangulaire supérieure. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est alors très simple à calculer puisque c'est le produit des éléments sur sa diagonale.

Nous concluons cette section en remplissant la promesse que nous avons faite au premier paragraphe de la section.

Théorème 11.4.22

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Remarque 11.4.23

Comme nous avons promis lors de la présentation du produit vectoriel, nous pouvons utiliser formellement la définition du déterminant d'une matrice 3×3 pour donner une formule symbolique simple pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs.

Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ sont deux vecteurs, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur \mathbf{m} donné par

$$\mathbf{m} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne. En effet, nous obtenons alors

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = (p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} - (p_1q_3 - p_3q_1)\mathbf{j} + (p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k}$$

comme à la définition 10.2.13. Nous insistons sur le fait que cette formule est seulement symbolique et est introduite seulement comme aide mémoire pour ne pas oublier la formule pour le produit vectoriel de deux vecteurs. 

11.5 Suites dans \mathbb{R}^n

Dans les exemples qui suivent, nous aurons besoin de la notion de convergence dans \mathbb{R}^n . Soit $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{\infty}$, une suite de vecteurs dans \mathbb{R}^n . Que voulons-nous dire par la suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{\infty}$ tend vers un vecteur \mathbf{w} ?

Définition 11.5.1

Nous disons que la suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ **converge** (ou **tend**) vers \mathbf{w} si $\|\mathbf{v}_j - \mathbf{w}\| \rightarrow 0$ lorsque $j \rightarrow \infty$. Nous écrivons $\mathbf{v}_j \rightarrow \mathbf{w}$ lorsque $j \rightarrow \infty$ ou $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{v}_j = \mathbf{w}$.

La formule introduite en (10.1.3) pour calculer la longueur d'un vecteur est utilisé dans la définition précédente pour calculer la distance entre deux vecteurs. Plus précisément, la formule qui a été utilisée est

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 11.5.2

La suite de vecteurs $\{\mathbf{v}_j\}_{j=0}^{\infty}$ converge vers \mathbf{w} si et seulement si la i^{th} composante de \mathbf{v}_j converge vers la i^{th} composante de \mathbf{w} lorsque $j \rightarrow \infty$ pour tout i .

11.6 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 11.6.1

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. Le nombre λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur non nul \mathbf{v} tel que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Les vecteurs non nuls \mathbf{v} qui satisfont $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ sont appelés les **vecteurs propres** de A associés à la valeur propre λ .

Notons que si \mathbf{v} est un vecteur propre associé à la valeur propre λ alors $\alpha\mathbf{v}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ est aussi un vecteur propre associé à la valeur propre λ . En effet,

$$A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(A\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}).$$

Il y a donc un nombre infini de vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

Pour trouver les valeurs propres d'une matrice carrée A , nous remarquons que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$$

donne l'équation

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (11.6.1)$$

Le nombre λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul qui satisfait (11.6.1). Or, il découle de la proposition 11.3.7 qu'une condition nécessaire pour que (11.6.1) ait une solution non nulle est que $A - \lambda I$ n'ait pas d'inverse. Grâce au théorème 11.4.22, $A - \lambda I$ n'a pas d'inverse si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$. Nous obtenons ainsi la méthode suivante pour trouver les valeurs propres d'une matrice carrée.

Proposition 11.6.2

Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines du **polynôme caractéristique**

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) .$$

Pour trouver un vecteur propre \mathbf{v} associé à une valeur propre λ , il faut résoudre le système d'équations linéaires

$$(A - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

Rappelons ce qu'est un nombre complexe. Cela va être nécessaire pour l'étude des valeurs propres.

Définition 11.6.3

Un **nombre complexe** est un nombre de la forme

$$z = a + bi$$

où $a \in \mathbb{R}$ est la **partie réelle** de z , $b \in \mathbb{R}$ est la **partie imaginaire** de z et $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est dénoté \mathbb{C} .

Le nombre complexe i est la racine carrée de -1 . Pour cette raison, il est fréquent de voir l'énoncé $i = \sqrt{-1}$. Les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle représentent les nombres réelles. Pour cette raison, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 11.6.4

Les opérations d'addition et de multiplication pour les nombres complexes $a_1 + b_1 i$ et $a_2 + b_2 i$ sont définies par :

1. $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$
2. $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$

Définition 11.6.5

Le **complexe conjugué** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$.

Définition 11.6.6

La **valeur absolue** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est définie par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si $z = a + bi$ et $b = 0$ (i.e. $z \in \mathbb{R}$), alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. La valeur absolue pour les nombres complexes est donc une extension de la valeur absolue pour les nombres réelles. Puisque $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$, nous avons que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Remarque 11.6.7

Toutes les matrices A que nous allons considérer ont seulement des composantes réelles. Néanmoins, les racines du polynôme caractéristique associé à A , et donc les valeurs propres de A , peuvent être des nombres complexes. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une valeur propre pour une matrice dont toutes les composantes sont réelles, alors certaines des composantes d'un vecteur propre associé à λ seront complexes. ♠

Exemple 11.6.8

Trouvons les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et donnons un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -1$. Ce sont les deux valeurs propres de A .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 4$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

nous obtenons le système

$$(A - 4I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.6.2)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/3)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (11.6.2) satisfont donc $x_1 - x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = x_2$. Nous obtenons une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons vérifier que $A\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$. Tout autre choix pour α aurait été acceptable et aurait donné un vecteur propre \mathbf{x}_1 associé à λ_1 .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A + I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.6.3)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (11.6.3) satisfont donc $2x_1 + 3x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_2 = -2x_1/3$. Nous obtenons une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha/3 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 3$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons vérifier que $A\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_2$. Comme pour la valeur propre λ_1 , tout autre choix pour α aurait été acceptable et aurait donné un vecteur propre \mathbf{x}_2 associé à λ_2 . 

Exemple 11.6.9

Trouvons les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et donnons un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Les racines de ce polynôme sont

$$\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 5}}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i.$$

et

$$\lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 5}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i = \overline{\lambda_1}.$$

Il est normal que λ_2 soit le complexe conjugué de λ_1 car, pour les polynômes avec coefficients réels, si z est une racine du polynôme alors \bar{z} est aussi une racine du polynôme. λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres de A .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1 + 2i$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

nous obtenons le système

$$(A - (1 + 2i)I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.6.4)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2i & -1 & 0 \\ 4 & -2i & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2i & 0 \\ -2i & -1 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/4)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i/2 & 0 \\ -2i & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_2 + 2i R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (11.6.4) satisfont donc $x_1 - (i/2)x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = (i/2)x_2$. Nous obtenons une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i/2)\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 2$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons bien $A\mathbf{x}_1 = (1 + 2i)\mathbf{x}_1$.

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1 - 2i$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - (1 - 2i)I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.6.5)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & -1 & 0 \\ 4 & 2i & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2i & 0 \\ 2i & -1 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/4)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i/2 & 0 \\ 2i & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_2 - (2i)R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (11.6.5) satisfont donc $x_1 + (i/2)x_2 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = -(i/2)x_2$. Nous obtenons une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(i/2)\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 2$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons bien $A\mathbf{x}_2 = (1 - 2i)\mathbf{x}_2$. ♣

À l'exemple précédent, nous aurions pu trouver un vecteur propre associé à λ_2 sans faire de calculs grâce au résultat de la proposition qui suit. Si \mathbf{v} est un vecteur dont les composantes sont les nombres complexes v_1, v_2, \dots, v_n . Nous définissons le **complexe conjugué** du vecteur \mathbf{v} comme étant le vecteur $\overline{\mathbf{v}}$ dont les composantes sont $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$.

Proposition 11.6.10

Soit A une matrice de dimension $n \times n$ avec des composantes réelles. Si λ est une valeur propre complexe de A et \mathbf{v} est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A et $\bar{\mathbf{v}}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$.

À l'exemple précédent, nous avons trouvé le vecteur propre $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1 + 2i$. Il découle de la proposition précédente que $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ est une valeur propre et $\mathbf{x}_2 = \bar{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ_2 . C'est effectivement ce que nous avons trouvé à l'exemple précédent.

Exemple 11.6.11

Trouvons les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 3.5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1.5 & -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

et donnons un vecteur propre pour chacune des valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -0.5 - \lambda & -1 & 3.5 \\ 3 & 1 - \lambda & -3 \\ 1.5 & -1 & 1.5 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-0.5 - \lambda) ((1 - \lambda)(1.5 - \lambda) - 3) + (3(1.5 - \lambda) + 4.5) + 3.5(-3 - 1.5(1 - \lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 \end{aligned}$$

où nous avons calculé le déterminant en développant selon la première ligne. Il y a une formule pour calculer les racines d'un polynôme de degré trois mais elle n'est pas simple. Après avoir essayé certaines valeurs entières, nous trouvons que 1 est une racine (hourra!). Nous pouvons alors diviser le polynôme caractéristique par $\lambda - 1$ pour obtenir

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Les racines du polynôme caractéristique sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 3$. Ce sont les trois valeurs propres de A .

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

nous obtenons le système

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 & 3.5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.6.6)$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1.5 & -1 & 0.5 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/3)R_2 \rightarrow R_2$ et $R_3 + R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

$-(1/2)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.5 & -1 & 3.5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_1 + 1.5R_2 + R_3 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{x} de (11.6.6) satisfont donc $x_1 - x_3 = 0$ et $x_2 - 2x_3 = 0$; c'est-à-dire, $x_1 = x_3$ et $x_2 = 2x_3$. Nous obtenons une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$, nous résolvons le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De façon semblable à ce que nous venons de faire pour λ_1 , nous trouvons que les solutions \mathbf{x} de $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ satisfont $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 2x_3$. Nous obtenons une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$, nous résolvons le système d'équations linéaires $(A - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nous trouvons que les solutions \mathbf{x} de $(A - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ satisfont $x_1 = x_3$ et $x_2 = 0$. Nous obtenons une famille de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



La recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre λ d'une matrice a peut devenir très complexe lorsque la matrice A est de dimension plus grande que 2×2 . Par exemple, il peut y avoir des vecteurs propres associés à la valeur propre λ qui ne sont pas des multiples l'un de l'autre. En fait, la situation est encore plus complexe. Pour adresser ce problème, il faut introduire la notion suivante.

Définition 11.6.12

Soit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ des vecteurs de \mathbb{R}^n . Nous dirons que les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ sont **linéairement indépendants** s'il est impossible d'avoir

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{v}_j = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

pour des valeurs de α_i qui ne sont pas tous nulles. Autrement, nous dirons que les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ sont **linéairement dépendants**.

Exemple 11.6.13

Deux vecteurs colinéaires \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont linéairement dépendants. En effet, si $\mathbf{v}_1 = \beta \mathbf{v}_2$ pour $\beta \neq 0$, alors $\mathbf{v}_1 - \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Donc $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ pour $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -\beta$. 

Le notion d'indépendance linéaire généralise la notion de colinéarité entre deux vecteurs.

Remarque 11.6.14

La notion d'indépendance linéaire ouvre la porte à une multitude d'autres sujets en algèbre linéaire : espaces vectoriels, dimension d'un espace vectoriel (le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants qu'un espace peut avoir), base d'un espace vectoriel, etc. Tout cela est nécessaire pour étudier l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre.

La recherche de vecteurs propres associés à une valeur propre est donc plus complexe que les exemples précédents semblent indiquer.

Supposons que le polynôme caractéristique après factorisation d'une matrice A de dimension $n \times n$ soit

$$p(\lambda) = (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \dots (x - \lambda_s)^{n_s} .$$

Les racines distinctes de ce polynôme sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Comme p est un polynôme de degré n , nous avons que

$$n = \sum_{j=1}^s n_j .$$

Nous disons que n_j est la **multiplicité algébrique** de la valeur propre λ_j .

Si $n_j > 1$, il est fort possible que l'ensemble E_j des vecteurs propres de A associé à la valeur propre λ_j ne représente pas seulement une droite dans l'espace qui passe par l'origine mais un plan qui contient l'origine ou un espace plus grande si $n_j \geq 3$. En fait, l'ensemble E_j des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_j forme un espace vectoriel. La dimension de E_j est la **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ_j .

Il n'est pas rare que la multiplicité géométrique soit plus petite que la multiplicité algébrique. Il faut alors parler de vecteurs propres généralisés. Tout cela est pour un cours futur d'algèbre linéaire. 

11.7 Systèmes Dynamiques Discrets Linéaires

Exemple 11.7.1

Nous considérons le **système dynamique discret** en deux dimensions

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1} &= A\mathbf{v}_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{v}_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} .$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= A\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_2 &= A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -4/9 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_3 &= A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ -4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 17/54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_4 = A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/8 \\ 17/54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ -61/324 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Nous semblons avoir $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (chacune des composantes de \mathbf{v}_n semble tendre vers 0). Mais! En sommes-nous certain? Existe-t-il une façon de répondre à cette question sans avoir à calculer les vecteurs \mathbf{v}_n ? ♣

À l'exemple précédent, nous pourrions penser que $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ car tous les éléments de la matrice A sont plus petit que 1 en valeur absolue. Mais l'exemple suivant montre que ce n'est pas une bonne raison.

Exemple 11.7.2

Nous considérons le système dynamique discret en deux dimensions

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} .$$

Nous avons

$$\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.44 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.44 \\ 1.728 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.44 \\ 1.728 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.728 \\ 2.736 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\mathbf{v}_{40} = A\mathbf{v}_{39} \approx \begin{pmatrix} 1469.77156796909 \dots \\ 1763.72588156290 \dots \end{pmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\mathbf{v}_{100} = A\mathbf{v}_{99} \approx \begin{pmatrix} 8.28179745220147 \dots \times 10^7 \\ 9.93815694264176 \dots \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Nous ne semblons pas avoir $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. ♣

Il est donc nécessaire de trouver un critère infallible pour déterminer si l'origine est stable; c'est-à-dire, pour déterminer si $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ quelle que soit la condition initial \mathbf{v}_0 .

Exemple 11.7.3

Nous avons vu que nous pouvions estimer périodiquement le nombre d'individus (par km²) d'une population à l'aide d'un système dynamique discret de la forme

$$p_{k+1} = rp_k \quad (11.7.1)$$

où p_k est le nombre d'individus à la fin de la k^e période et r est le taux de croissance relatif. Cette formule ne tient pas compte du fait que le taux de reproduction peut varier avec l'âge. Le taux de croissance r utilisé dans la formule ci-dessus est une moyenne pour l'ensemble de la population.

Supposons que nous ayons une population que nous pouvons diviser en quatre groupes d'âge. Le premier groupe est formé des jeunes individus qui ne peuvent pas encore se reproduire. Le deuxième groupe est formé des individus qui sont les plus « performants » au niveau reproductif. Le troisième groupe est formé des individus dont les capacités de reproduction déclinent. Finalement, le quatrième groupe est formé des individus qui sont trop âgés pour pouvoir se reproduire.

Nous possédons les statistiques suivantes pour une période donnée (e.g. une année).

groupe	taux de reproduction	taux de décès	taux de transfert au groupe suivant
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0.2
3	0.1	0.1	0.2
4	0	0.4	0

Le taux de reproduction des jeunes individus est 0 car ils ne peuvent pas encore se reproduire. Le taux de reproduction des individus les plus âgés est aussi 0 car ils ont passé la période de reproduction. Le deuxième groupe a le taux de reproduction le plus élevé. Nous notons qu'à la fin de chaque période, plusieurs individus d'un groupe ont atteint l'âge requis pour passer au groupe suivant. Nous indiquons ce transfert d'un groupe au groupe suivant dans la dernière colonne du tableau ci-dessus.

Nous aimerions prédire le nombre d'individus dans chacun des quatre groupes à la fin de chaque période.

Posons

$$\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_{k,1} \\ v_{k,2} \\ v_{k,3} \\ v_{k,4} \end{pmatrix}$$

où $v_{k,i}$ est le nombre d'individus du groupe i après k périodes. Nous déduisons les équations suivantes des statistiques ci-dessus.

$$v_{k+1,1} = 0.7v_{k,1} + 0.2v_{k,2} + 0.1v_{k,3}$$

$$v_{k+1,2} = 0.2v_{k,1} + 0.7v_{k,2}$$

$$v_{k+1,3} = 0.2v_{k,2} + 0.7v_{k,3}$$

$$v_{k+1,4} = 0.2v_{k,3} + 0.6v_{k,4}$$

Par exemple, pour obtenir la première équation, nous notons qu'il reste $0.7v_{k,1}$ individus du premier groupe après une période : $0.1v_{k,1}$ individus sont décédés et $0.2v_{k,1}$ ont transférés au deuxième groupe. Par contre, durant cette période, $0.2v_{k,2}$ individus et $0.1v_{k,3}$ individus se sont ajoutés au premier groupe grâce aux naissances provenant du deuxième et troisième groupes respectivement. En raisonnant de façon semblable, nous arrivons aux trois autres équations.

Nous pouvons exprimer ces équations sous la forme du système dynamique discret

$$\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k \quad (11.7.2)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Si \mathbf{v}_0 est donné, nous pouvons calculer les autres vecteurs \mathbf{v}_k récursivement.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= A\mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_2 &= A\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_0) = A^2\mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_3 &= A\mathbf{v}_2 = A(A^2\mathbf{v}_0) = A^3\mathbf{v}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_k &= A^k\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Soit

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 5,000 \\ 20,000 \\ 15,000 \\ 4,000 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_0 &= \begin{pmatrix} 9000 \\ 15000 \\ 14500 \\ 5400 \end{pmatrix}, & \mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 10750 \\ 12300 \\ 13150 \\ 6140 \end{pmatrix}, \dots \\ \mathbf{v}_{20} = A\mathbf{v}_{19} &\approx \begin{pmatrix} 4562.7737 \\ 3828.2253 \\ 3215.0260 \\ 1907.2974 \end{pmatrix}, & \mathbf{v}_{30} = A\mathbf{v}_{29} &\approx \begin{pmatrix} 2413.1867 \\ 2025.3504 \\ 1699.8553 \\ 1005.0093 \end{pmatrix}, \dots \end{aligned}$$

où les valeurs ont été arrondie à quatre décimales. Les résultats numériques semblent indiquer que chacune des composantes de \mathbf{v}_k tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$. Si c'est le cas, la population va disparaître ?

Est-il possible qu'avec des conditions initiales \mathbf{v}_0 différentes, nous ayons que la population ne disparaît pas ?

Pour le système dynamique discret (11.7.1), nous avons que la suite $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ tend vers 0 si $|r| < 1$ et la suite $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ne converge pas si $|r| > 1$.

Pour le système dynamique discret (11.7.2), pouvons-nous trouver une condition qui nous permettra de conclure que toute orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ approche $\mathbf{0}$. Donc, quelle que soit la condition initiale, la population va disparaître. 

L'étude du comportement asymptotique (i.e. lorsque $k \rightarrow \infty$) des orbites $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ du système dynamique discret (11.7.2) est beaucoup plus complexe que l'étude du comportement asymptotique des orbites p_0, p_1, p_2, \dots du système dynamique discret (11.7.1). Dans le cas de (11.7.1), la condition $|r| < 1$ est suffisante (et nécessaire) pour montrer que toutes les orbites approchent l'origine. Nous aimerions bien avoir un résultat équivalent pour (11.7.2). L'étude des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A va nous permettre d'obtenir un tel résultat. En fait, la valeur absolue des valeurs propres de la matrice A en (11.7.2) va nous permettre de déterminer si toutes les orbites de (11.7.2) vont converger vers $\mathbf{0}$.

Proposition 11.7.4

Soit A une matrice de dimension $n \times n$ et considérons le système dynamique discret $\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$. Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont plus petites que 1 en valeur absolue, alors les orbites $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{\infty}$ tendent vers l'origine (i.e. $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $k \rightarrow \infty$) quel que soit le choix de \mathbf{v}_0 .

Exemple 11.7.5 (suite de l'exemple 11.7.3)

Si nous revenons au système dynamique discret (11.7.2) du début de la section et que nous calculons les valeurs propres de A , nous trouvons les quatre valeurs propres : $\lambda_1 \approx 0.9382976$, $\lambda_2 \approx 0.6$, $\lambda_3 \approx 0.58085121 + 0.050885178i$ et $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$. Puisque toutes les valeurs propres de A sont plus petite que 1 en valeur absolue, nous aurons que les orbites $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{\infty}$ tendront vers $\mathbf{0}$ quelle que soit la condition initiale \mathbf{v}_0 . 

Remarque 11.7.6

Si les valeurs propres d'une matrice A de dimension $n \times n$ ne sont pas toutes plus petites que 1 en valeur absolue, une étude détaillée des vecteurs propres généralisés associés aux valeurs propres qui sont plus petites que 1 en valeur absolue nous permettrait de déterminer la région de l'espace où choisir la condition initiale \mathbf{v}_0 pour que l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ du système $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i$ tend vers l'origine. L'étude des espaces propres généralisés est le sujet d'un cours plus avancé d'algèbre linéaire.

En fait, les espaces propres généralisés mentionnés au paragraphe précédent forment un sous-espace de dimension plus petite que n dans \mathbb{R}^n . Si \mathbf{v}_0 est dans ce sous-espace, l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ tend vers l'origine. Par contre, si \mathbf{v}_0 n'est pas dans ce sous-espace, l'orbite $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{\infty}$ ne tend pas vers l'origine. Ce sous-espace est très petit dans le sens suivant. Si vous choisissez au hasard un point de \mathbb{R}^n , il est presque certain que ce point ne sera pas dans ce sous-espace. Pour bien comprendre l'explication donnée précédemment, considérons \mathbb{R}^2 . Un sous-espace de dimension 1 dans \mathbb{R}^2 est une droite dans \mathbb{R}^2 qui passe par l'origine. Si vous choisissez un

point au hasard de \mathbb{R}^2 , les chances sont nulles que ce soit un point de cette droite. 

Nous ferons appel aux valeurs propres lors de l'étude de la stabilité des points d'équilibre des systèmes d'équations différentielles. Mais avant de quitter cette section, nous étudierons une application importante des valeurs propres et vecteurs propres.

11.8 Chaînes de Markov

Exemple 11.8.1

Considérons la population d'une région donnée qui peut être divisée en deux groupes : les citadins et les paysans. Supposons de plus que la population totale de la région ne change pas.

Soit $x_{j,1}$ le nombre de citadins à la j^e année et $x_{j,2}$ le nombre de paysans à la j^e année. Comme nous supposons que la population totale ne change pas, nous avons que $x_{j,1} + x_{j,2}$ est constant en fonction de j .

Une étude montre que 10% des citadins déménagent à la campagne chaque année et 20% des paysans déménagent dans les villes. Étant donné $x_{j,1}$ et $x_{j,2}$, nous pouvons donc déterminer la population des villes et de la campagne l'année suivante.

Après un an, 0.9 des citadins demeurent dans les villes (0.1 des citadins quittent pour la campagne) et 0.2 des paysans déménagent dans les villes pour donner le total de $x_{j+1,1}$ citadins. De même, après un an, 0.8 des paysans demeurent à la campagne (0.2 des paysans quittent pour les villes) et 0.1 des citadins déménagent à la campagne pour donner le total de $x_{j+1,2}$ paysans. En termes mathématiques, le système dynamique discret est

$$\begin{aligned}x_{j+1,1} &= 0.9x_{j,1} + 0.2x_{j,2} \\x_{j+1,2} &= 0.1x_{j,1} + 0.8x_{j,2}\end{aligned}$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots$. Nous pouvons récrire ce système sous la forme matricielle suivante.

$$\begin{pmatrix} x_{j+1,1} \\ x_{j+1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$x_{j+1,1} + x_{j+1,2} = (0.9x_{j,1} + 0.2x_{j,2}) + (0.1x_{j,1} + 0.8x_{j,2}) = x_{j,1} + x_{j,2}.$$

Donc, effectivement, la population total ne change pas.

Nous supposons que

$$\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où les populations sont en unités de un million par exemple.

Qu'arrivera-t-il dans 10, 20, \dots , 100 ans ? Qu'arrivera-t-il lorsque j tend vers l'infini ? Est-ce que nous aurons un équilibre entre le nombre de paysans et le nombre de citadins ?

Est-ce le nombre de paysans et le nombre de citadins vont toujours osciller ? Nous pouvons répondre à ces questions à l'aide des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Avant de répondre à ces questions, nous allons étudier les matrices comme la matrice A qui ont une structure assez spéciale. 

La matrice A de l'exemple précédent a deux caractéristiques fondamentales que nous présentons dans la définition suivante.

Définition 11.8.2

Une matrice A de dimension $n \times n$ est appelée une **matrice de Markov** si les composantes $a_{i,j}$ satisfont :

1. $a_{i,j} \geq 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et
2. $\sum_{i=0}^n a_{i,j} = 1$ (la somme des éléments de chacune des colonnes de A est 1).

Une **chaîne de markov** ou **procédure de Markov** est un système dynamique discret $\mathbf{x}_{i+1} = A\mathbf{x}_i$ où A est une matrice de Markov.

Les chaînes de Markov ont une propriété très particulière.

Proposition 11.8.3

Une matrice de Markov A possède toujours la valeur propre 1. Si nous considérons la chaîne de Markov $\mathbf{x}_{j+1} = A\mathbf{x}_j$ pour $j = 0, 1, 2, \dots$ avec une condition initiale \mathbf{x}_0 donnée, l'orbite $\{\mathbf{x}_j\}_{j=0}^{\infty}$ tend vers un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

Exemple 11.8.4 (Suite de l'exemple 11.8.1)

Nous considérons la chaîne de Markov

$$\begin{pmatrix} x_{j+1,1} \\ x_{j+1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \end{pmatrix} \quad \text{pour } j = 0, 1, 2, \dots$$

où $\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'après la proposition précédente, $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \end{pmatrix}$ tend vers un vecteur propre associée à la valeur propre 1 lorsque j tend vers l'infini. Trouvons ce vecteur propre.

En premier, vérifions que 1 est bien une valeur propre de A . Pour trouver les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix},$$

nous considérons le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0.9 - \lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (0.9 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.02 = \lambda^2 - 1.7\lambda - 0.7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7).$$

Les racines de ce polynôme sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0.7$. Nous avons bien la valeur propre 1 comme il a été prédit par la proposition précédente.

Pour trouver les vecteurs propres de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ où

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons le système

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ suivie de $-10R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{v} du système $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfont donc $v_1 - 2v_2 = 0$; c'est-à-dire, $v_1 = 2v_2$. Ainsi, les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer le vecteur propre associée à la valeur propre 1 vers lequel $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \end{pmatrix}$ converge lorsque j tend vers l'infini. Il faut utiliser le fait que la population total est constante. Or, au départ, nous avons 2 millions d'individus; soit, $x_{0,1} = 1$ million de citadins et $x_{0,2} = 1$ million de paysans. Le vecteur propre que nous cherchons est donc $\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$ où $2a + a = 2$ (en unités de un million). Donc $a = 2/3$ et

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ lorsque j tend vers l'infini ♣

Remarque 11.8.5

À l'exemple précédent, nous pouvons vérifier que $\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ lorsque j tend vers l'infini quelque soit la condition initiale $\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ y_{0,2} \end{pmatrix}$ avec $x_{0,1} + x_{0,2} = 2$.

Pour ce faire, nous aurons besoin des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.7. Pour trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0.7$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ où

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons le système

$$(A - 0.7I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ suivie de $10R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{v} de $(A - 0.7I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfont donc $v_1 + v_2 = 0$; c'est-à-dire, $v_2 = -v_1$. Les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 0.7 sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

pour b un nombre réel. Nous avons que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

pour $a = 2/3$ et $b = -1/3$. Donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{1,2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

car $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. De

plus, $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.7. De même,

$$\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7}{3}A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^2}{3}A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

De façon générale,

$$\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0.7^j}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour $j = 1, 2, 3, \dots$. Puisque $\lim_{j \rightarrow \infty} 0.7^j = 0$, nous obtenons bien

$$\begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{lorsque } j \rightarrow \infty.$$



11.9 Exercices

11.9.1 Matrices

Question 11.1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Évaluez si possible les expressions suivantes.

- | | | | |
|----------------------|------------------------|-----------------------|--------------------|
| a) $D + E$ | b) $D - E$ | c) $5C$ | d) $-7C$ |
| e) $2B - C$ | f) $4E - 2D$ | g) $-3(D + 2E)$ | h) $A - A$ |
| i) $\text{tr}(D)$ | j) $\text{tr}(D - 3E)$ | k) $\text{tr}(A)$ | l) $2A^\top + C$ |
| m) $D^\top - E^\top$ | n) $(D - E)^\top$ | o) $B^\top + 5C^\top$ | p) $B - B^\top$ |
| q) AB | r) BA | s) $(3E)D$ | t) $A(BC)$ |
| u) $(AB)C$ | v) CC^\top | w) $(DA)^\top$ | x) $E^\top D^\top$ |
| y) $(DE)^\top$ | z) $(C^\top B)A^\top$ | | |

Question 11.2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Évaluez A^2 .
- Évaluez A^3 .
- Quelle sera la forme générale de A^n ?

11.9.2 Représentations matricielles des systèmes d'équations linéaires

Question 11.3

Résolvez les systèmes d'équation linéaires suivants.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x + y + 2z = 9 \\ & 2x + 4y - 3z = 1 \\ & 3x + 6y - 5z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 5x + 2y + 6z = 0 \\ & -2x + y + 3z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ & 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ & 6x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 7x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 3x + 2y - z = -15 \\ & 3x + y + 3z = 11 \\ & -6x - 4y + 2z = 30 \end{aligned}$$

Question 11.4

Montrez que le système

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x + z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

possède au moins une solution seulement si $c = a + b$.

Question 11.5

Pour chacun des systèmes d'équations linéaires suivant, donnez les valeurs de a et b pour que le système ait :

I: Une seule solution.

II: Un nombre infini de solutions.

III: Aucune solution.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x + ay = 1 \\ & 2x + 3y = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x + ay = 1 \\ & b + 5y = 2 \end{aligned}$$

Question 11.6

Considérons le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ x + y + 4z &= h \\ 2x - 3y + hz &= 2 \end{aligned}$$

Donnez les valeurs de h pour que le système ait :

- a) Une seule solution.
- b) Aucune solution.
- c) Un nombre infini de solutions.

Question 11.7 🌲

Deux espèces d'insectes, X et Y , se nourrissent de deux espèces de plantes, A et B . L'espèce X consomme 5 unités de A et 3 unités de B par jour, et l'espèce Y consomme 2 unités de A et 4 unités de B par jour. Si nous fournissons 900 unités de A et 960 unités de B par jour. combien d'individus des espèces X et Y devons-nous avoir dans notre insectarium pour que toutes les unités de A et B soient consommées à chaque jours.

Question 11.8

Un manufacturier vent trois types d'engrais (I , II et III) qui sont des mélanges de trois produits (A , B et C). L'engrais de type I contient 10 kg de A , 30 kg de B et 60 kg de C par sac. L'engrais de type II contient 20 kg de A , 30 kg de B et 50 kg de C par sac. Finalement, l'engrais de type III contient 50 kg de A et 50 kg de C par sac ; cet engrais de contient pas de produit B . L'entrepôt du manufacturier contient 1600 kg de A , 1200 kg de B et 3200 kg de C . Combien de sacs de chaque type d'engrais doivent être produit par le manufacturier si celui-ci veut utiliser tous les produits A , B et C dans son entrepôt ?

11.9.3 Déterminant**Question 11.9**

Déterminez si les matrices suivantes ont un inverse. Pour celles qui ont un inverse, trouvez cet inverse.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{b)} & A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{c)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{d)} & A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} & \text{e)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \text{f)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ \text{g)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} & & & & \end{array}$$

Question 11.10

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 15 & 7 & 9 \\ -7 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- a) Montrez que $AB \neq BA$.
 b) Évaluez $\det(2A - 3B^T - C)$.
 c) Montrez que C n'a pas d'inverse.
 d) Trouvez A^{-1} .

11.9.4 Valeurs propres et vecteurs propres**Question 11.11**

Trouvez les valeurs et vecteurs propres des matrices suivantes et donnez la multiplicité algébrique de chacune des valeurs propres.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	c) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
d) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	e) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$	f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$
g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	h) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$	i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
j) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	k) $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 7 & -7 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	

Question 11.12

Pour chacune des matrices A ci-dessous.

- I:** Montrez que le déterminant de A est différent de 0.
II: Trouvez l'inverse multiplicatif A^{-1} de A .
III: Résolvez le système d'équations linéaires $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pour le vecteur \mathbf{b} donné.
IV: Trouvez les valeurs propres de A .
V: Pour chaque valeur propre, trouvez un ensemble de vecteurs propres linéairement indépendants.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \\ \text{c)} & A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \\ \text{b)} & A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \\ \text{d)} & A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

11.9.5 Chaînes de Markov

Question 11.13

Une compagnie de location de voitures possède deux succursales : succursale S et succursale T. Un analyse des inventaires à chacune des succursales à la fin de chaque mois révèle que 70% des voitures louées à la succursale S sont retournées à la succursale S alors que les autres voitures (30%) sont retournées à la succursale T. De plus, 80% des voitures louées à la succursale T sont retournées à la succursale T alors que les autres voitures (20%) sont retournées à la succursale S.

Soit x_0 et y_0 le nombre de voitures au début du mois aux succursales S et T respectivement, et soit x_1 et y_1 le nombre de voitures à la fin du mois aux succursales S et T respectivement.

a) Exprimez le nombre de voitures à chaque succursale à la fin du mois en fonction du nombre de voitures à chaque succursale au début du mois sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

pour une matrice A .

b) Évaluez A^2 .

c) Si au début de mars nous avons 60 voitures à la succursale S et 40 voitures à la succursale T, Combien de voitures y-aura-t-il dans chaque succursale au début d'avril ? Au début de mai ?

d) Quel est le nombre de voitures que la compagnie devrait avoir à chaque succursale au début du mois pour qu'elle retrouve le même nombre de voiture à chaque succursale à la fin du mois ? Vous devez premièrement écrire le problème sous la forme d'un problème de valeurs et vecteurs propres.

Question 11.14

Une île est divisée en 1000 lots dans le but de faire une étude écologique. Chaque année, un certain nombre de lots sont choisis pour une observation. La probabilité qu'un lot soit choisi une année est de 20% si le lot a été choisi l'année précédente et de 50% si le lot n'a pas été choisi l'année précédente.

a) Donnez la matrice de transition A pour cette procédure de markov.

b) Combien de lots seront choisis l'année prochaine si 300 lots sont choisis cette année ?

c) Combien de lots seront choisis dans deux ans si 300 lots sont choisis cette année ?

d) Combien de lots seront choisis à long terme si 300 lots sont choisis cette année? En d'autres mots, combien de lots devons-nous choisir si nous voulons que le nombre de lots choisis chaque année soit constant?

Question 11.15 

Nous divisons une population de femelles en trois groupes.

1. Groupe I : Ceux dont le poids à la naissance était inférieure au poids minimal recommandé.
2. Groupe II : Ceux dont le poids à la naissance était entre le poids minimal et le poids maximal recommandés.
3. Groupe III : Ceux dont le poids à la naissance était supérieure au poids maximal recommandé.

Nous observons que les femelles du groupe I donnent naissance dans 50% des cas à des femelles qui sont dans le groupe I, dans 45% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 5% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III. De même, nous observons que les femelles du groupe II donnent naissance dans 25% des cas à des femelles qui sont dans le groupe I, dans 50% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 25% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III. Finalement, nous observons que les femelles du groupe III donnent naissance dans 30% des cas à des femelles qui sont dans le groupe I, dans 30% des cas à des femelles qui sont dans le groupe II, et dans 40% des cas à des femelles qui sont dans le groupe III.

Déterminez la tendance à long terme pour la distribution des poids à la naissance pour les femelles.

Note : Ce problème demande une connaissance (intuitive) des probabilités conditionnelles.

Question 11.16 

Chaque jour, une épicerie offre en solde une variété de pommes parmi trois variétés possibles : Cortland, McIntosh et Spartan. L'épicerie a la politique de vente suivante.

1. Les pommes McIntosh ne sont jamais en vente deux jours de suite.
2. Si les pommes McIntosh sont en vente une journée, alors les pommes Cortland et Spartan ont la même probabilité d'être en vente le jour suivant.
3. Si les pommes Cortland et Spartan sont en vente une journée, il y a une chance sur deux qu'ils seront en vente la journée suivante.
4. Si les pommes Cortland et Spartan sont en vente une journée, il a une chance sur trois que les pommes McIntosh seront en vente le jour suivant.

Pour chaque item, déterminez la probabilité (ne faite pas les calculs) qu'il soit en vente après 100 jours si les items avaient une probabilité égale d'être en vente la première journée? Pour chaque item, déterminez la probabilité qu'il soit en vente dans un future éloigné?



Représentations paramétriques des courbes



12

Les deux premières sections de ce chapitre sont nécessaires en outre pour le calcul vectoriel et l'étude des systèmes d'équations différentielles que nous ferons prochainement. Nous verrons comment calculer l'intégrale de fonctions et champs de vecteurs le long de courbes paramétriques dans le chapitre sur le calcul vectoriel. Les solutions d'un système d'équations différentielles sont des courbes paramétriques.

Les dernières sections de ce chapitre offrent plus d'information sur la représentation paramétrique des courbes et peuvent servir de matériel optionnel pour les étudiants en génie.

12.1 Définition

Définition 12.1.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un sous-intervalle de la droite réelle. De plus, soit $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ un ensemble de n fonctions continues à valeurs réelles définies sur I .

L'ensemble des points

$$\Gamma = \{(\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) : t \in I\}$$

définit une courbe (figure 12.1) dans l'espace \mathbb{R}^n . Les n fonctions $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ définissent une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) \quad (12.1.1)$$

pour $t \in \mathbb{R}$. L'image de ϕ est la courbe Γ . La fonction ϕ est une **représentation paramétrique** de la courbe Γ .

Puisque les éléments de \mathbb{R}^n sont bien souvent représentés par des matrices de dimensions $n \times 1$, une matrice avec n ligne et une colonne, nous définissons aussi une représentation paramétrique $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} \quad (12.1.2)$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

(12.1.1) est généralement associée à la représentation géométrique de la courbe alors (12.1.2) associée à la représentation algébrique. Le contexte détermine quelle forme est utilisée.

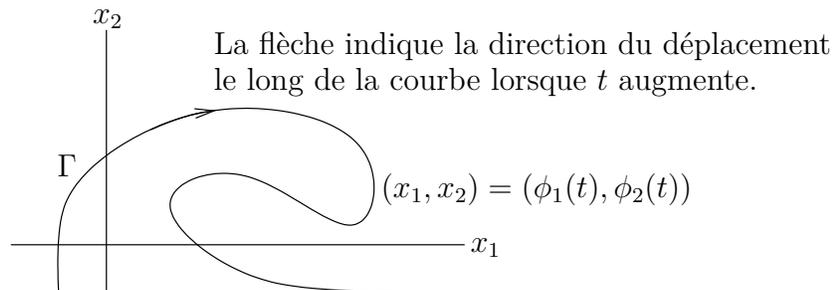


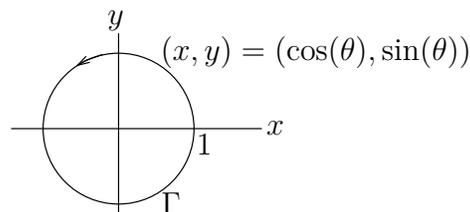
FIGURE 12.1 – Une courbe dans le plan donnée par une représentation paramétrique $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. Nous indiquons à l'aide d'une flèche la direction du déplacement le long de la courbe lorsque t augmente.

Exemple 12.1.2

Une représentation paramétrique du cercle Γ de rayon 1 centré à l'origine est donnée par les fonctions trigonométriques $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Plus précisément, une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$.



Lorsque θ augmente, nous parcourons le cercle unité dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Puisque $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des fonctions périodiques de période 2π , nous parcourons la courbe Γ au complet à chaque fois que θ augmente de 2π . 

Exemple 12.1.3

Une autre représentation paramétrique du cercle Γ de rayon 1 centré à l'origine est donnée par

$$(x, y) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Lorsque θ augmente, nous parcourons le cercle unité dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Puisque $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ sont des fonctions périodiques de période π , nous parcourons la courbe Γ au complet à chaque fois que θ augmente de π . Cette représentation permet de parcourir la courbe Γ deux fois plus rapidement que la représentation donnée à l'exemple précédent. ♣

Les deux exemples précédents montrent qu'une courbe Γ a plus qu'une représentation paramétrique.

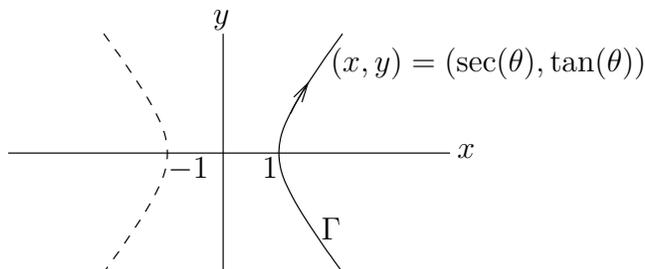
Exemple 12.1.4

Quelle est la courbe Γ décrite par la représentation paramétrique

$$(x, y) = (\sec(\theta), \tan(\theta))$$

pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$?

Puisque $\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$, nous obtenons que $y^2 + 1 = x^2$. La courbe Γ fait donc partie de la courbe décrite par $x^2 - y^2 = 1$. L'équation $x^2 - y^2 = 1$ est l'équation d'une hyperbole dont l'axe est la droite horizontale $y = 0$ et les sommets sont aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.



Par contre, la représentation paramétrique ne représente pas toute l'hyperbole. Nous avons $x = \sec(\theta) > 0$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \sec(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \tan(\theta) = +\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow -\pi/2} \sec(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow -\pi/2} \tan(\theta) = -\infty$ et $(\sec(0), \tan(0)) = (1, 0)$. La courbe Γ est donc la branche de l'hyperbole à droite de l'axe des y que nous parcourons de bas en haut lorsque θ augmente. ♣

Exemple 12.1.5

Quelle est la courbe Γ décrite par la représentation paramétrique

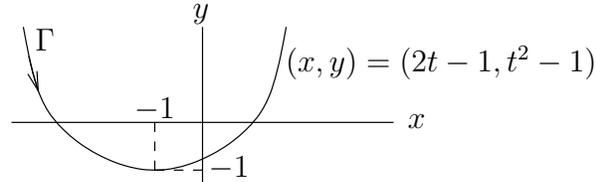
$$(x, y) = (2t - 1, t^2 - 1)$$

pour $t \in \mathbb{R}$?

De l'équation $x = 2t - 1$, nous trouvons $t = (x + 1)/2$. Si nous substituons cette expression pour t dans l'équation $y = t^2 - 1$, nous obtenons $y = (x + 1)^2/4 - 1$. Cette dernière équation donne

$$(x + 1)^2 = 4(y + 1).$$

C'est l'équation d'une parabole convexe dont l'axe est la droite verticale $x = -1$ et le sommet est au point $(-1, -1)$.



Puisque $x = 2t - 1$ augmente de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque t augmente de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe est parcourue de gauche à droite. 

12.2 Droite tangente à une courbe

Supposons qu'une courbe Γ possède la représentation paramétrique

$$\mathbf{x} = \phi(t)$$

ou, plus explicitement,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$, où les fonctions $\phi_i :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables. Nous ne demandons pas seulement que les fonctions ϕ_i soient continues mais qu'elles soient aussi différentiables.

Pour trouver la direction de la droite tangente à la courbe Γ au point

$$\phi(t_0) = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) ,$$

nous considérons la sécante qui passe par les points

$$\phi(t_0) = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) \text{ et } \phi(t_0 + h) = (\phi_1(t_0 + h), \phi_2(t_0 + h), \dots, \phi_n(t_0 + h))$$

où h est petit. Le vecteur

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h &= \frac{1}{h} (\phi(t_0 + h) - \phi(t_0)) \\ &= \frac{1}{h} (\phi_1(t_0 + h) - \phi_1(t_0), \phi_2(t_0 + h) - \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0 + h) - \phi_n(t_0)) \\ &= \left(\frac{\phi_1(t_0 + h) - \phi_1(t_0)}{h}, \frac{\phi_2(t_0 + h) - \phi_2(t_0)}{h}, \dots, \frac{\phi_n(t_0 + h) - \phi_n(t_0)}{h} \right) \end{aligned}$$

est parallèle à la sécante qui passe par les points $\phi(t_0)$ et $\phi(t_0 + h)$.

Lorsque h tend vers 0, le vecteur \mathbf{v}_h approche un vecteur parallèle à la droite tangente à Γ au point $\phi(t_0)$. Or, cette limite est

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{v}_h &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_1(t_0 + h) - \phi_1(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_2(t_0 + h) - \phi_2(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_n(t_0 + h) - \phi_n(t_0)}{h} \right) \\ &= (\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0)) , \end{aligned}$$

Nous avons donc le résultat suivant.

Proposition 12.2.1

Soit Γ , une courbe qui possède la représentation paramétrique

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$, où les fonctions $\phi_i :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables. Le vecteur

$$\phi'(t_0) = (\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0))$$

est parallèle à la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(t_0)$ (figure 12.2). De plus, le vecteur $\phi'(t_0)$ pointe dans la direction associée à t croissant.

Lorsque les éléments de \mathbb{R}^n sont représentés par des matrices de dimension $n \times 1$, nous avons

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi'(t) = \begin{pmatrix} \phi'_1(t) \\ \phi'_2(t) \\ \vdots \\ \phi'_n(t) \end{pmatrix}$$

Le contexte détermine quelle formulation doit être utilisée.

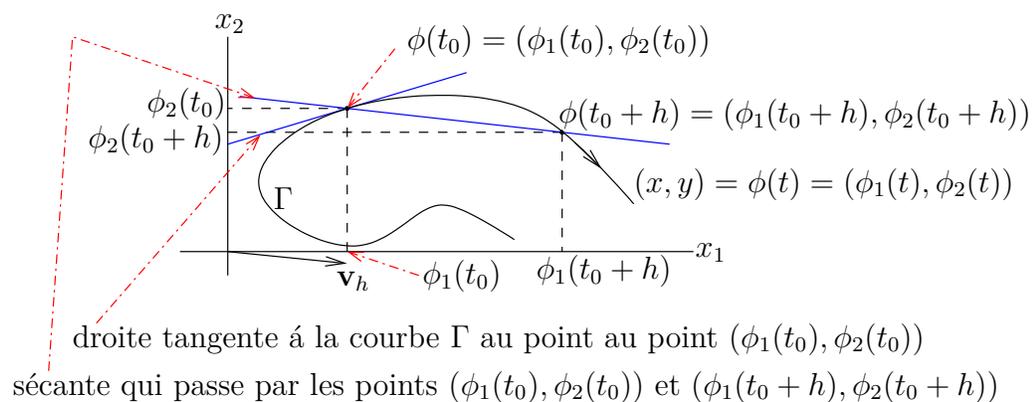


FIGURE 12.2 – La courbe Γ donnée par la représentation paramétrique $(x_1, x_2) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. La sécante qui passe par $\phi(t_0)$ et $\phi(t_0 + h)$, et la tangente à la courbe au point $\phi(t_0)$ sont aussi incluses. Le vecteur \mathbf{v}_h est parallèle à la sécante.

Ainsi, la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(t_0)$ possède la représentation paramétrique

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) &= \phi(t_0) + \alpha \phi'(t_0) \\ &= (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0)) + \alpha(\phi'_1(t_0), \phi'_2(t_0), \dots, \phi'_n(t_0)) \\ &= (\phi_1(t_0) + \alpha\phi'_1(t_0), \phi_2(t_0) + \alpha\phi'_2(t_0), \dots, \phi_n(t_0) + \alpha\phi'_n(t_0)) \end{aligned}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 12.2.2

Soit Γ une courbe dans \mathbb{R}^2 (i.e. $n = 2$ dans la discussion précédente) qui possède la représentation paramétrique

$$(x, y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$, où les fonctions $\phi_1 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_2 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables.

Si $\phi_1'(t_0) = 0$ alors la tangente à la courbe Γ au point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ est verticale car la tangente est parallèle au vecteur $(\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0)) = (0, \phi_2'(t_0))$.

Si $\phi_2'(t_0) = 0$ alors la tangente à la courbe Γ au point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ est horizontale car la tangente est parallèle au vecteur $(\phi_1'(t_0), \phi_2'(t_0)) = (\phi_1'(t_0), 0)$. 

Remarque 12.2.3

Soit Γ une courbe dans \mathbb{R}^2 qui possède la représentation paramétrique

$$(x, y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$, où les fonctions $\phi_1 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_2 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables.

Il est possible de démontrer que si $\phi_1'(t_0) \neq 0$ alors nous pouvons représenter Γ près du point $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$ par une expression de la forme $y = f(x)$ où f est aussi différentiable. En effet, si $\phi_1'(t_0) \neq 0$ alors ϕ_1 est strictement croissant ou décroissant au voisinage de t_0 . Ce qui implique que ϕ_1 est localement inversible au voisinage de t_0 . Nous avons donc $t = \phi_1^{-1}(x)$ pour x près de $\phi_1(t_0)$. Si nous substituons cette expression dans $y = \phi_2(t)$, nous trouvons $y = f(x) \equiv \phi_2(\phi_1^{-1}(x))$ pour x près de $\phi_1(t_0)$. Cette situation est illustrée à la figure 12.3. Nous avons que $y = f(x)$ représente la courbe Γ près du point $(\phi_1(t_1), \phi_2(t_1))$. 

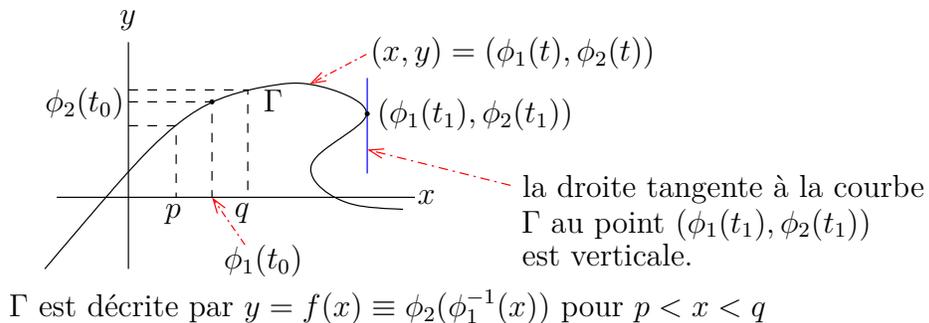


FIGURE 12.3 – La courbe Γ donnée par la représentation paramétrique $(x, y) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. Pour x près de $\phi_1(t_0)$, nous pouvons représenter la courbe Γ par $y = f(x) \equiv \phi_2(\phi_1^{-1}(x))$.

Exemple 12.2.4

Trouvons l'équation de la droite tangente à la courbe Γ au point $(0, -\pi)$ si Γ possède la représentation paramétrique

$$(x, y) = (t \sin(t), t \cos(t))$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

Il faut trouver t tel que $t \sin(t) = 0$ et $t \cos(t) = -\pi$. De la première équation, nous trouvons $t = n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Parmi ces valeurs, seul $t = \pi$ satisfait la deuxième équation. Nous avons donc que $(0, \pi)$ est donné par $t = \pi$ dans la représentation paramétrique.

Posons $\phi_1(t) = t \sin(t)$ et $\phi_2(t) = t \cos(t)$, la représentation paramétrique de la droite tangente à Γ au point $(\phi_1(\pi), \phi_2(\pi)) = (0, -\pi)$ est

$$\begin{aligned}(x, y) &= (\phi_1(\pi) + \alpha \phi_1'(\pi), \phi_2(\pi) + \alpha \phi_2'(\pi)) \\ &= \left(\alpha (\sin(t) + t \cos(t)) \Big|_{t=\pi}, -\pi + \alpha (\cos(t) - t \sin(t)) \Big|_{t=\pi} \right) = (-\alpha \pi, -\pi - \alpha)\end{aligned}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Si nous éliminons α des deux équations $x = -\alpha \pi$ et $y = -\pi - \alpha$, nous trouvons l'équation suivante pour la droite tangente.

$$y = \frac{1}{\pi} x - \pi .$$



Exemple 12.2.5

Traçons la courbe qui possède la représentation paramétrique $x = t^3 - 3t^2$ et $y = t^3 - 3t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Trouvons les points de la courbe où la tangente est horizontale ou verticale. La tangente est horizontal si $y' = 3t^2 - 3 = 0$. Donc $t = \pm 1$. Nous obtenons le point $(-2, -2)$ pour $t = 1$ et le point $(-4, 2)$ pour $t = -1$. La tangente est verticale si $x' = 3t^2 - 6t = 0$. Donc $t = 0$ ou $t = 2$. Nous obtenons le point $(0, 0)$ pour $t = 0$ et le point $(-4, 2)$ pour $t = 2$.

La courbe passe au moins deux fois par le point $(-4, 2)$. De plus, $x'(t)$ et $y'(t)$ ne changent pas de signes lorsque t est dans un des intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$, $] 0, 1[$, $] 1, 2[$ et $] 2, \infty[$.

Nous pouvons déterminer la pente de la tangente à la courbe au point $(x(t), y(t))$ à l'aide du rapport $y'(t)/x'(t)$ si $x'(t) \neq 0$. Par contre, pour déterminer la courbure, nous utilisons la représentation locale $y = f(x)$ de la courbe car $f''(x)$ va nous permettre de déterminer si la courbe est concave ou convexe.

Il découle du théorème de la dérivée de fonctions composées que

$$\frac{df}{dx}(x(t)) = \frac{dy}{dx}(x(t)) = \frac{dy}{dt}(t) \Big/ \frac{dx}{dt}(t) = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 - 6t} = \frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t}$$

pour t dans un des intervalles mentionnés précédemment dans lesquels $x'(t) \neq 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{dx^2}(x(t)) &= \frac{d^2y}{dx^2}(x(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx}(x(t)) \right) \Big/ \frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{3t^2 - 6t} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t} \right) \\ &= \frac{-2(t^2 - t + 1)}{3(t^2 - 2t)^3}\end{aligned}$$

pour tout t appartenant à un des intervalles mentionnés précédemment. Puisque $t^2 - t + 1 > 0$ pour tout t , nous avons que $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t))$ peut changer de signe seulement lorsque cette dérivée

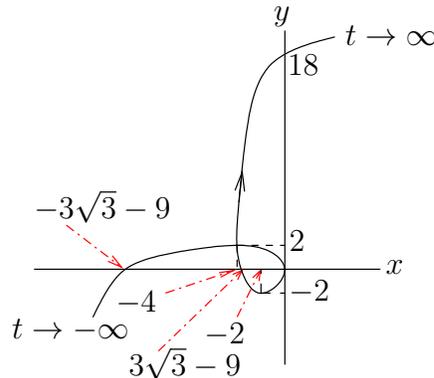
seconde n'est pas définie ; c'est-à-dire, lorsque $t = 0$ ou 2 . Donc $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t))$ ne change pas de signe lorsque t est dans un des intervalles considérés ci-dessus.

Le tableau suivant donne le signe des dérivées dans les différents intervalles.

t	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	description de $y = f(x)$
$] -\infty, -1[$	+	-	croissante et concave
$] -1, 0[$	-	-	décroissante et concave
$] 0, 1[$	+	+	croissante et convexe
$] 1, 2[$	-	+	décroissante et convexe
$] 2, \infty[$	+	-	croissante et concave

Pour faciliter le travail de tracer la courbe, il est souvent utile de trouver les points où la courbe coupe l'axe des x et l'axe des y quand cela est possible. La courbe coupe l'axe des y (i.e. $x(t) = t^3 - 3t^2 = 0$) lorsque $t = 0$ et 3 . Nous obtenons les deux points $(0, 0)$ et $(0, 18)$. La courbe coupe l'axe des x (i.e. $y(t) = t^3 - 3t = 0$) lorsque $t = 0$ et $\pm\sqrt{3}$. Nous obtenons les trois points $(0, 0)$ et $(-3\sqrt{3} - 9, 0)$ et $(3\sqrt{3} - 9, 0)$.

Le dessin de la courbe est donné ci-dessous.



Exemple 12.2.6

Traçons la courbe qui possède la représentation paramétrique $x = \sin(2t)$ et $y = \sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Puisque cette représentation paramétrique est périodique de période 2π , nous pouvons assumer que $0 \leq t \leq 2\pi$.

Trouvons les points de la courbe où la tangente est horizontale ou verticale. La tangente est horizontale si $y' = \cos(t) = 0$; c'est-à-dire, si $t = \pi/2$ ou $3\pi/2$. Nous obtenons les points suivants.

t	(x, y)
$\pi/2$	$(0, 1)$
$3\pi/2$	$(0, -1)$

La tangente est verticale si $x' = 2 \cos(2t) = 0$; c'est-à-dire, si $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ ou $7\pi/4$. Nous obtenons les points suivants.

t	(x, y)
$\pi/4$	$(1, \sqrt{2}/2)$
$3\pi/4$	$(-1, \sqrt{2}/2)$
$5\pi/4$	$(1, -\sqrt{2}/2)$
$7\pi/4$	$(-1, -\sqrt{2}/2)$

Nous avons que la courbe passe trois fois par le point $(0, 0)$, lorsque $t = 0, \pi$ et 2π . De plus, $x'(t)$ et $y'(t)$ ne changent pas de signes lorsque t est dans un des intervalles de la forme $]n\pi/4, (n+1)\pi/4[$.

Pour déterminer la courbure, nous utilisons la représentation locale $y = f(x)$ de la courbe car $f''(x)$ va nous permettre de déterminer si la courbe est concave ou convexe.

Il découle du théorème de la dérivée de fonctions composées que

$$\frac{df}{dx}(x(t)) = \frac{dy}{dx}(x(t)) = \frac{dy}{dt}(t) \Big/ \frac{dx}{dt}(t) = \frac{\cos(t)}{2 \cos(2t)}$$

pour t dans un des intervalles mentionnés précédemment. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dx^2}(x(t)) &= \frac{d^2y}{dx^2}(x(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx}(x(t)) \right) \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2 \cos(2t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos(t)}{2 \cos(2t)} \right) \\ &= \frac{(2 \cos^2(t) + 1) \sin(t)}{4 \cos^3(2t)} \end{aligned}$$

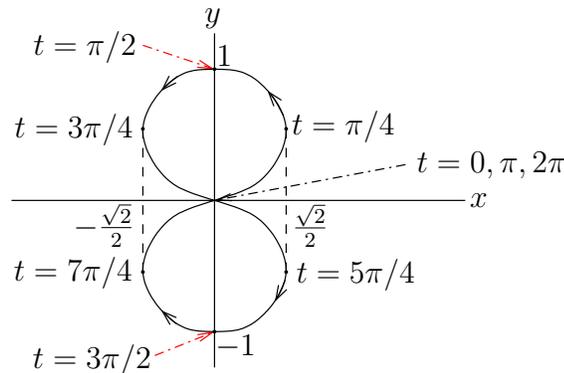
pour tout t appartenant à un des intervalles mentionnés précédemment. Pour simplifier le numérateur, nous avons utilisé les identités $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ et $\sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t)$. Notons que $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t))$ ne change pas de signe lorsque t est dans un des intervalles considérés ci-dessus car $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t)) = 0$ seulement pour $t = 0, \pi$ ou 2π ; et $\frac{d^2y}{dx^2}(x(t))$ n'est pas définie seulement pour $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ ou $7\pi/4$.

Le tableau suivant donne le signe des dérivées dans les différents intervalles.

t	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	description de $y = f(x)$
$]0, \pi/4[$	+	+	croissante et convexe
$] \pi/4, \pi/2[$	-	-	décroissante et concave
$] \pi/2, 3\pi/4[$	+	-	croissante et concave
$] 3\pi/4, \pi[$	-	+	décroissante et convexe
$] \pi, 5\pi/4[$	-	-	décroissante et concave
$] 5\pi/4, 3\pi/2[$	+	+	croissante et convexe
$] 3\pi/2, 7\pi/4[$	-	+	décroissante et convexe
$] 7\pi/4, 2\pi[$	+	-	croissante et concave

Pour faciliter le travail de tracer la courbe, il est souvent utile de trouver les points où la courbe coupe l'axe des x et l'axe des y (quand cela est possible). La courbe coupe l'axe des y (i.e. $x(t) = \sin(2t) = 0$) lorsque $t = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$. Nous obtenons seulement trois points, $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$. La courbe coupe l'axe des x (i.e. $y(t) = \sin(t) = 0$) lorsque $t = 0, \pi$ et 2π . Dans les trois cas, nous obtenons l'origine.

Le dessin de la courbe est donné ci-dessous.



12.3 Longueur d'une courbe 🛠️

Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une représentation paramétrique d'une courbe Γ dans le plan. Nous pouvons estimer la longueur de la courbe Γ en approchant cette courbe par une courbe formée de petits segments de droite (figure 12.4). La somme de la longueur de chacun des petits segments va donner une approximation de la longueur de la courbe qui ira en s'améliorant si nous prenons des segments de plus en plus petits.

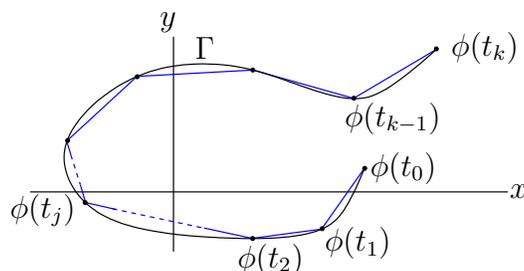


FIGURE 12.4 – Une courbe dans le plan que nous approchons avec des segments de droites.

Soit k un entier positif. Posons $\Delta t = (b - a)/k$ et $t_j = a + j \Delta t$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous avons que $t_0 = a$ et $t_k = b$. L'intervalle $[a, b]$ est partagé en k sous-intervalles de la

forme $[t_j, t_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$. La longueur du segment de droite qui joint les points

$$\phi(t_j) = (\phi_1(t_j), \phi_2(t_j)) \quad \text{et} \quad \phi(t_{j+1}) = (\phi_1(t_{j+1}), \phi_2(t_{j+1}))$$

est

$$\sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}$$

grâce au théorème de Pythagore. Ainsi, la longueur de la courbe formée de tous les petits segments de droite pour $j = 0, 1, \dots, k-1$ est

$$L_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}, \quad (12.3.1)$$

Si nous utilisons le théorème de la moyenne, nous pouvons trouver α_j et β_j entre x_j et x_{j+1} tels que

$$\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j) = \phi_1'(\alpha_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi_1'(\alpha_j)\Delta t$$

et

$$\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j) = \phi_2'(\beta_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi_2'(\beta_j)\Delta t.$$

Ainsi, La longueur du segment de droite qui joint les points $\phi(t_j)$ et $\phi(t_{j+1})$ est

$$\begin{aligned} \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2} &= \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j)\Delta t)^2 + (\phi_2'(\beta_j)\Delta t)^2} \\ &= \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j))^2 + (\phi_2'(\beta_j))^2} \Delta t. \end{aligned}$$

Si nous substituons cette expression dans (12.3.1) nous obtenons la formule suivante pour la longueur de la courbe formée de tous les petits segments de droite pour $j = 0, 1, \dots, k-1$.

$$L_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j))^2 + (\phi_2'(\beta_j))^2} \Delta t. \quad (12.3.2)$$

Si α_j était égale à β_j , nous aurions une somme de Riemann mais α_j n'est généralement pas égal à β_j . De façon **non rigoureuse**, nous allons quand même procéder comme si nous avions une somme de Riemann car α_j et β_j sont dans l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ qui devient de plus en plus petit lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi, si $k \rightarrow \infty$, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 12.3.1

La longueur L d'une courbe Γ qui possède la représentation paramétrique $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2} dt. \quad (12.3.3)$$

Remarque 12.3.2

Avec la définition de l'intégrale de Riemann donnée à la section 6.3.5, nous pourrions démontrer rigoureusement que la formule (12.3.3) est vrai. 

Il est possible de démontrer à l'aide de la règle de substitution pour l'intégration que la formule (12.3.3) est indépendante de la représentation paramétrique de la courbe Γ qui est utilisées.

Remarque 12.3.3

Lorsque nous calculons la longueur d'une courbe décrite par une représentation paramétrique, il faut vérifier que celle-ci ne parcourt pas une section de la courbe plus d'une fois. Par exemple, les deux représentations paramétriques suivantes tracent le cercle unité.

$$\phi(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

pour $0 \leq t \leq 2\pi$ et

$$\psi(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$$

pour $0 \leq t \leq 2\pi$. Cependant,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2} dt = 2\pi$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\psi_1'(t))^2 + (\psi_2'(t))^2} dt = 4\pi .$$

La représentation paramétrique ψ parcourt deux fois le cercle unité. Ce qui fait que l'intégrale donne deux fois la circonférence du cercle unité. 

Exemple 12.3.4

Calculons la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x = t^3$ et $y = t^2$ pour $0 \leq t \leq 4$.

Cette longueur est

$$L = \int_0^4 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^4 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} dt = \int_0^4 t \sqrt{9t^2 + 4} dt$$

Si $u = 9t^2 + 4$, alors $du = 18t dt$, $u = 4$ lorsque $t = 0$ et $u = 148$ lorsque $t = 4$. Ainsi,

$$L = \frac{1}{18} \int_4^{148} u^{1/2} du = \frac{1}{27} u^{3/2} \Big|_4^{148} = \frac{8}{27} (37^{3/2} - 1) .$$



Dans le cas particulier où la courbe Γ peut être représentée par le graphe d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$, nous pouvons utiliser la représentation $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\phi_1(x) = x$ et $\phi_2(x) = f(x)$ pour obtenir le résultat suivant directement de (12.3.3).

Proposition 12.3.5

La longueur L d'une courbe Γ qui peut être représentée par le graphe d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dx . \quad (12.3.4)$$

Exemple 12.3.6

Calculons la longueur de la courbe donnée par le graphe de $f(x) = \ln(\sin(x))$ pour $\pi/6 \leq x \leq \pi/3$.

Puisque $f'(x) = \cos(x)/\sin(x) = \cot(x)$, nous obtenons la longueur

$$\begin{aligned} L &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{1 + \cot^2(x)} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\csc^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc x dx \\ &= -\ln(\csc(x) + \cot(x)) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

car $\csc(x) = 1/\cos(x) > 0$ pour $\pi/6 \leq x \leq \pi/3$. ♣

Exemple 12.3.7

Calculons la longueur de la courbe définie par $y = (x - 1)^2$ entre les points (1,0) et (2,1).

La courbe dont nous voulons calculer la longueur est la partie de la parabole $y = (x - 1)^2$ pour $1 \leq x \leq 2$. Si nous posons $f(x) = (x - 1)^2$, alors $f'(x) = 2(x - 1)$. La longueur de la courbe est

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} (x - 1) \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} + \frac{1}{4} \ln \left| 2(x - 1) + \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} \right| \right) \Big|_{x=1}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln |2 + \sqrt{5}| . \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale précédente demande plusieurs substitutions et une intégration par parties. Nous donnons les détails dans le paragraphe qui suit.

Pour évaluer l'intégrale indéfinie

$$\int \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} dx ,$$

nous posons $x = 1 + \frac{1}{2} \tan(\theta)$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Nous avons que

$$\sqrt{1 + 4(x - 1)^2} = \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \sec(\theta)$$

car $\sec(\theta) > 0$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. De plus, $dx = \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} dx &= \int \sec(\theta) \left(\frac{1}{2} \sec^2(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^3(\theta) d\theta . \end{aligned}$$

À l'exemple 6.2.22, nous avons montré que

$$\int \sec^3(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sec(\theta) \tan(\theta) + \frac{1}{2} \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4(x-1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \sec^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \tan(\theta) \sec(\theta) + \frac{1}{4} \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C. \end{aligned}$$

Puisque $\tan(\theta) = 2(x-1)$ et $\sec(\theta) = \sqrt{1 + 4(x-1)^2}$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4(x-1)^2} dx &= \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{1 + 4(x-1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{4} \ln |2(x-1) + \sqrt{1 + 4(x-1)^2}| + C. \end{aligned}$$

♣

Exemple 12.3.8

Calculons la longueur de la courbe définie par $y = \ln(1 - x^2)$ pour $0 \leq x \leq 1/2$.

Si nous posons $f(x) = \ln(1 - x^2)$, alors $f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$. La longueur de la courbe est

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1-x^2)^2}} dx \\ &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(1-x^2)^2}} dx = \int_0^{1/2} \frac{x^2 + 1}{1-x^2} dx = \int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) dx \\ &= \int_0^{1/2} \left(-1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(-x - \ln|x-1| + \ln(x+1)\right) \Big|_0^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2} + \ln(3). \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale précédente a demandé une intégration par fractions partielles. 

12.4 Aire d'une surface

Soit Γ une courbe dans le plan possédant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour $a \leq t \leq b$. La rotation autour d'un axe de cette courbe Γ produit une surface S dans l'espace (figure 12.5). Il est possible de calculer l'aire de cette surface.

Avant de développer la formule pour calculer l'aire de la surface S que nous retrouvons à la figure 12.5, considérons la section horizontale d'un cône qui est donnée à la figure 12.6.

L'aire de cette section horizontale est $2\pi \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right) L$.

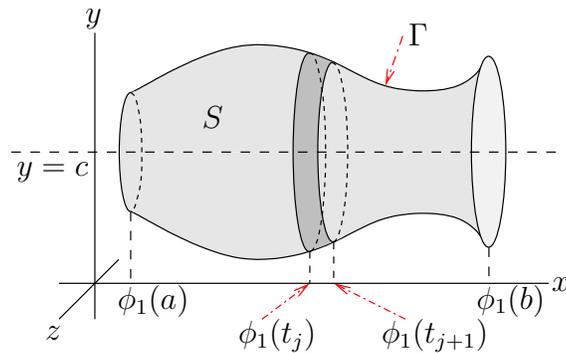


FIGURE 12.5 – Une surface produite par la rotation de la courbe Γ autour d'un axe horizontal $y = c$.

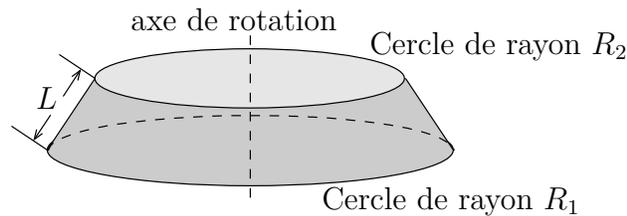


FIGURE 12.6 – Une section horizontale d'un cône dont l'axe est vertical.

Soit k un entier positif. Posons $\Delta t = (b - a)/k$ et $t_j = a + j \Delta t$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous avons que $t_0 = a$ et $t_k = b$. L'intervalle $[a, b]$ est partagé en k sous-intervalles de la forme $[t_j, t_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

La section de la surface S entre t_j et t_{j+1} (figure 12.7) représente approximativement une section d'un cône comme celui que nous retrouvons à la figure 12.6. L'aire de cette section est donc approximativement

$$2\pi \left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2} \right) \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}.$$

L'aire total A de la surface S est donc donné approximativement par

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} 2\pi \left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2} \right) \times \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2}.$$

D'après le théorème de la moyenne, ils existent α_j et β_j entre t_j et t_{j+1} tels que

$$\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j) = \phi_1'(\alpha_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi_1'(\alpha_j) \Delta t$$

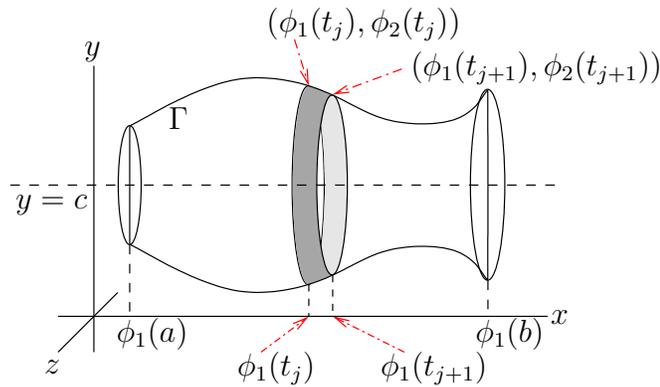


FIGURE 12.7 – Une section de la surface S représenté à la figure 12.5 pour $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ est approximativement une section d'un cône comme celle que nous retrouvons à la figure 12.6.

et

$$\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j) = \phi_2'(\beta_j)(t_{j+1} - t_j) = \phi_2'(\beta_j) \Delta t .$$

Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{(\phi_1(t_{j+1}) - \phi_1(t_j))^2 + (\phi_2(t_{j+1}) - \phi_2(t_j))^2} &= \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j) \Delta t)^2 + (\phi_2'(\beta_j) \Delta t)^2} \\ &= \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j))^2 + (\phi_2'(\beta_j))^2} \Delta t \end{aligned}$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots$. De plus, le théorème des valeurs intermédiaires donne γ_j entre t_j et t_{j+1} tel que

$$\left(\frac{|\phi_2(t_j) - c| + |\phi_2(t_{j+1}) - c|}{2} \right) = |\phi_2(\gamma_j) - c| .$$

L'aire A de la surface S est donc approximativement

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} 2\pi |\phi_2(\gamma_j) - c| \sqrt{(\phi_1'(\alpha_j))^2 + (\phi_2'(\beta_j))^2} \Delta t .$$

Si α_j , β_j et γ_j étaient égaux, nous aurions une somme de Riemann mais α_j , β_j et γ_j ne sont généralement pas égaux. De façon **non rigoureuse**, nous allons quand même procéder comme si nous avons une somme de Riemann car α_j , β_j et γ_j sont dans l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ qui devient de plus en plus petit lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi, si $k \rightarrow \infty$, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 12.4.1

Soit S une surface produite par la rotation autour d'un axe $y = c$ d'une courbe Γ

possédant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

pour $a \leq t \leq b$. L'aire total A de la surface S est

$$A = 2\pi \int_a^b |\phi_2(t) - c| \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2} dt. \quad (12.4.1)$$

Si S est une surface produite par la rotation autour d'un axe $x = c$ de la courbe Γ , alors l'aire total A de la surface S est

$$A = 2\pi \int_a^b |\phi_1(t) - c| \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2} dt.$$

Remarque 12.4.2

Comme pour le calcul de la longueur d'une courbe, lorsque que nous calculons l'aire d'une surface produite par la rotation d'une courbe autour d'un axe, il faut vérifier que la représentation paramétrique de la courbe ne parcourt pas une section de la courbe plus d'une fois. ♠

Si la courbe Γ est donnée par le graphe d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, en prenant la représentation paramétrique

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)) = (x, f(x))$$

pour $a \leq x \leq b$, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 12.4.3

Soit Γ une courbe représentée par le graphe d'une fonction différentiable f sur l'intervalle $[a, b]$. L'aire A de la surface S produite par la rotation de Γ autour de l'axe $y = c$ est

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x) - c| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (12.4.2)$$

Exemple 12.4.4

Calculons l'aire A de la surface S obtenue par la rotation autour de l'axe des x de la courbe Γ ayant la représentation paramétrique

$$\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) = (t^3, t^2)$$

pour $0 \leq t \leq 1$.

Posons $x = t^3$ et $y = t^2$. La première équation donne $t = x^{1/3}$. Si nous substituons cette expression dans la deuxième équation, nous obtenons $y = x^{2/3}$. La courbe Γ est donc le graphe de la fonction $y = f(x) = x^{2/3}$ pour $0 \leq x \leq 1$. Nous pourrions donc utiliser (12.4.2) pour calculer l'aire de la surface S . Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul. Nous calculons l'aire de la surface S à l'aide de (12.4.1).

Puisque $\phi_1'(t) = 3t^2$ et $\phi_2'(t) = 2t$, nous avons

$$A = 2\pi \int_0^1 t^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} dt = 2\pi \int_0^1 t^3 \sqrt{9t^2 + 4} dt .$$

Si $u = 9t^2 + 4$, alors $u = 4$ pour $t = 0$, $u = 13$ pour $t = 1$ et $du = 18t dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 t^3 \sqrt{9t^2 + 4} dt = \frac{\pi}{9} \int_0^1 t^2 (9t^2 + 4)^{1/2} 18t dt \\ &= \frac{\pi}{9} \int_4^{13} \frac{u-4}{9} u^{1/2} du = \frac{\pi}{81} \int_4^{13} (u^{3/2} - 4u^{1/2}) du \\ &= \frac{\pi}{81} \left(\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{8}{3} u^{3/2} \right) \Big|_{u=4}^{13} = \frac{\pi (494\sqrt{13} + 128)}{1215} \approx 4.9364177 . \end{aligned}$$



12.5 Coordonnées polaires

Chaque point P du plan est uniquement déterminé par ses coordonnées cartésiennes (x, y) où x est le déplacement horizontal et y est le déplacement vertical pour se rendre de l'origine O au point P .

Le système de coordonnées polaires est une autre façon d'identifier les points du plan. Ce système de coordonnées est très utile lorsque nous travaillons avec un objet qui exécute un mouvement circulaire.

Dans le système de coordonnées polaires, le point P est représenté par le couple (r, θ) où r est la distance entre le point P et l'origine O et θ est l'angle entre l'axe des x et la droite \overline{OP} mesuré dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (figure 12.8).

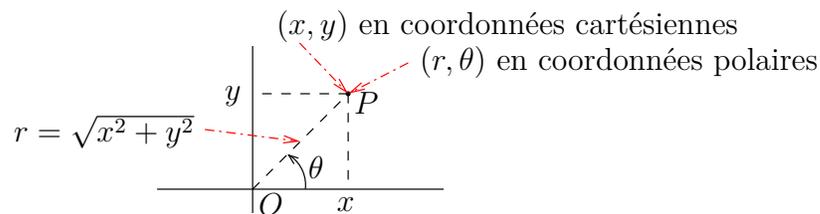


FIGURE 12.8 – Relation entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes d'un point P .

Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires d'un point du plan ne sont pas uniques. Si (r, θ) représente un point P , alors $(r, \theta + 2n\pi)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ représentent aussi le point P . L'origine est encore plus problématique car $(0, \theta)$ représente l'origine quel que soit θ .

Si (r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point P , alors les coordonnées cartésiennes (x, y) de ce point sont données par

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r \sin(\theta).$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$ sont les coordonnées cartésiennes d'un point P , alors les coordonnées polaires (r, θ) de ce point (modulo un multiple de 2π pour θ) sont donnée par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}.$$

Puisque $-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \neq 0$ et y , nous avons que θ donnée par la formule précédente satisfait $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Remarque 12.5.1

Il est permis d'avoir des coordonnées polaires de la forme (r, θ) où $r < 0$. Dans ce cas, il est sous-entendu que $(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$. C'est-à-dire que (r, θ) avec $r < 0$ est la réflexion par rapport à l'origine du point $(|r|, \theta)$. ♠

Exemple 12.5.2

Quelles sont les coordonnées cartésiennes du point P dont les coordonnées polaires sont $(3, -\pi/3)$?

Nous avons $x = 3 \cos(-\pi/3) = 3/2$ et $y = 3 \sin(-\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$. Les coordonnées cartésiennes de P sont donc $(3/2, -3\sqrt{3}/2)$. ♣

Exemple 12.5.3

Quelles sont les coordonnées polaires du point P dont les coordonnées cartésiennes sont $(-1, -\sqrt{3})$?

Nous avons $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Puisque $x < 0$, nous avons

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \arctan(\sqrt{3}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Les coordonnées polaires de P sont donc $(2, 4\pi/3)$. ♣

12.5.1 Équations en coordonnées polaires

Commençons notre apprentissage des courbes décrites par des équations en coordonnées polaires par l'étude de quelques équations élémentaires ; c'est-à-dire, r constant ou θ constant.

Exemple 12.5.4

Quelle est la courbe décrite par l'équation $r = 3$ et celle décrite par $r = -3$?

Comme aucune contrainte n'est imposée sur l'angle θ dans l'équation $r = 3$, l'angle θ est libre. En d'autres mots, l'équation $r = 3$ est vraie quelle que soit la valeur de θ . La courbe représentée par cette équation est le cercle de rayon 3 centré à l'origine ; c'est l'ensemble de tous les points dont les coordonnées cartésiennes (x, y) satisfont $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$. Lorsque θ augmente, nous parcourons le cercle de rayon 3 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

L'équation $r = -3$ décrit aussi le cercle de rayon 3 centré à l'origine car c'est la courbe qui est la réflexion par rapport à l'origine du cercle $r = 3$. 

Exemple 12.5.5

Quelle est la courbe décrite par l'équation $\theta = \pi/4$?

Comme aucune contrainte n'est imposée sur le rayon r dans l'équation $\theta = \pi/4$, le rayon r est libre. En d'autres mots, l'équation $\theta = \pi/4$ est vraie quelle que soit la valeur de $r \in \mathbb{R}$. La courbe représentée par cette équation est la droite de pente $\pi/4$ qui passe par l'origine ; c'est-à-dire, la droite $y = x$ au complet car nous acceptons les valeurs négatives de r . Lorsque r augmente, x et y vont de $-\infty$ à $+\infty$. 

Exemple 12.5.6

Traçons la courbe Γ décrite par l'équation $r = 2 \sin(\theta)$ et trouvons l'équation cartésienne qui décrit cette courbe.

Si nous multiplions l'équation $r = 2 \sin(\theta)$ par r , nous obtenons $r^2 = 2r \sin(\theta)$. Or $r^2 = x^2 + y^2$ et $y = r \sin(\theta)$. Nous avons donc $x^2 + y^2 = 2y$. Nous obtenons l'équation en coordonnées cartésiennes

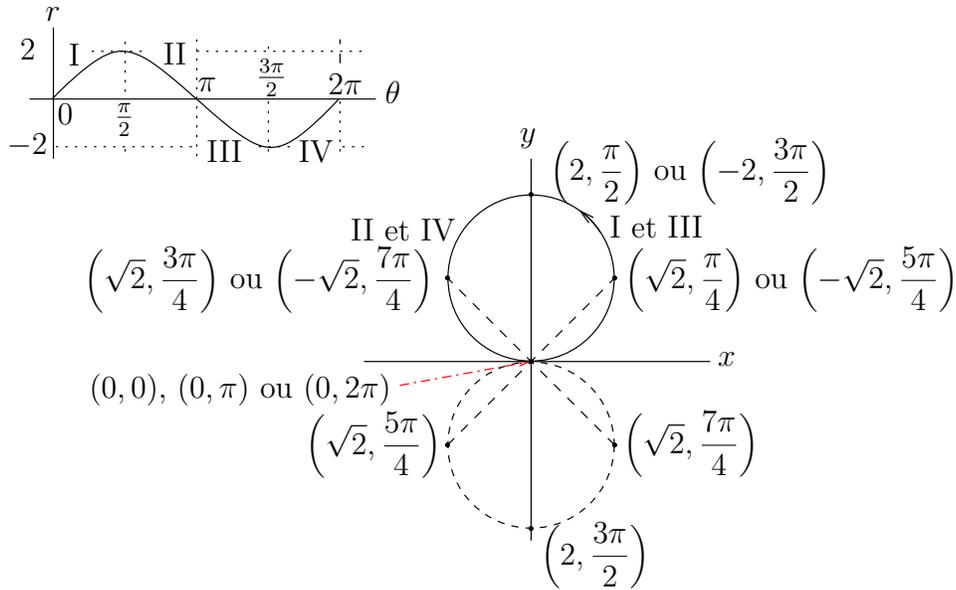
$$1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + (y - 1)^2 .$$

Γ est le cercle de rayon 1 centré au point $(0, 1)$.

Le graphe de r en fonction de θ ainsi que le dessin de la courbe Γ sont donnés ci-dessous. Les points suivants appartiennent à la courbe Γ .

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/2$	2π
r	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0

Ces points apparaissent sur la courbe Γ dans le dessin ci-dessous. Nous parcourons la courbe Γ deux fois dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre lorsque θ varie de 0 à 2π .



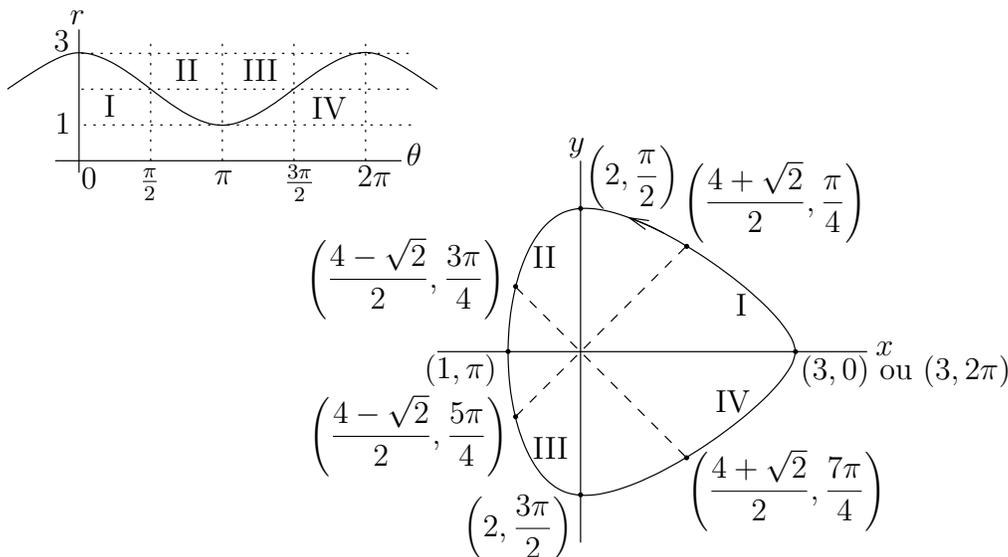
Exemple 12.5.7

Traçons la courbe Γ décrite par l'équation $r = 2 + \cos(\theta)$.

Le graphe de r en fonction de θ ainsi que le dessin de la courbe Γ sont donnés ci-dessous. Les points suivants appartiennent à la courbe Γ .

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/2$	2π
r	3	$\frac{4 + \sqrt{2}}{2} \approx 2.7071$	2	$\frac{4 - \sqrt{2}}{2} \approx 1.29289$	1	$\frac{4 - \sqrt{2}}{2}$	2	$\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$	0

Ces points apparaissent sur la courbe Γ dans le dessin ci-dessous. Nous parcourons la courbe Γ une fois dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre lorsque θ varie de 0 à 2π .



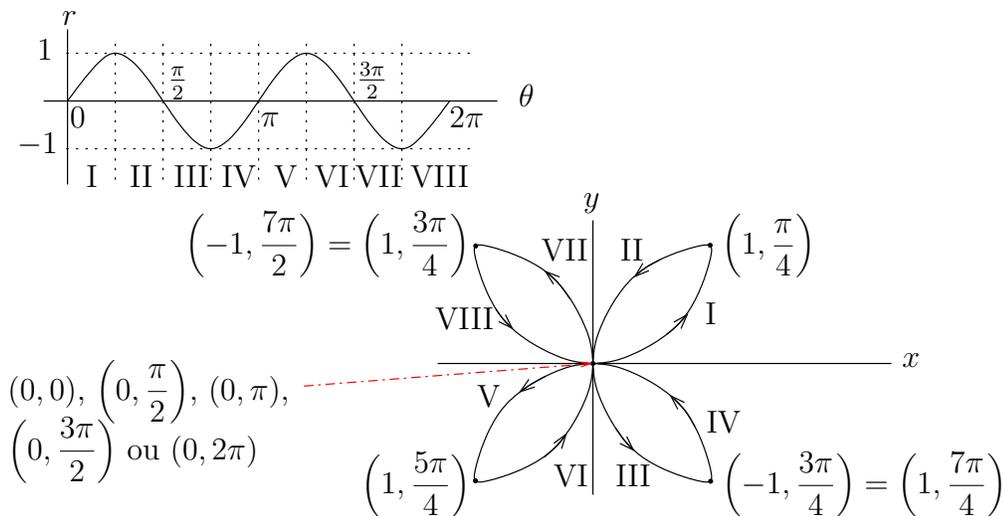
**Exemple 12.5.8**

Traçons la courbe Γ décrite par l'équation $r = \sin(2\theta)$.

Le graphe de r en fonction de θ ainsi que le dessin de la courbe Γ sont donnés ci-dessous. Les points suivants appartiennent à la courbe Γ .

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/2$	2π
r	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Ces points apparaissent sur la courbe Γ dans le dessin ci-dessous. Nous parcourons la courbe Γ en suivant l'ordre des intervalles I, II, III, ..., VIII lorsque θ varie de 0 à 2π .

**Remarque 12.5.9**

Les courbes que nous avons obtenues aux exemples 12.5.6, 12.5.7 et 12.5.8 ont certaines symétries. La courbe de l'exemple 12.5.6 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des y . La courbe de l'exemple 12.5.7 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x . La courbe de l'exemple 12.5.8 est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x , à l'axe des y , à la droite $x = y$, à la droite $y = -x$, et à l'origine. Elle est de plus inchangée par une rotation autour de l'origine de $\pi/2$, π ou $3\pi/2$. En fait, nous disons que la courbe de l'exemple 12.5.8 a la symétrie d'un carré car les opérations qui transforment un carré en lui-même vont aussi transformer cette courbe en elle-même.

Résumons comment déterminer les principales symétries d'une courbe donnée en coordonnées polaires. Soit Γ une courbe donnée par l'équation en coordonnées polaires $f(r, \theta) = 0$.

- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des x si $f(r, \theta) = f(r, -\theta) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f(-r, \pi - \theta) = 0$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'axe des y si $f(r, \theta) = f(r, \pi - \theta) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f(-r, -\theta) = 0$).

- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à l'origine (cela correspond aussi à une rotation par π) si $f(r, \theta) = f(-r, \theta) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f(r, \pi + \theta) = 0$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à la droite $\theta = \pi/4$ (i.e. $y = x$) si $f(r, \theta) = f\left(r, \frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f\left(-r, -\frac{\pi}{2} - \theta\right)$).
- La courbe Γ est inchangée par une réflexion par rapport à la droite $\theta = -\pi/4$ (i.e. $y = -x$) si $f(r, \theta) = f\left(r, -\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f\left(-r, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$).
- La courbe Γ est inchangée par une rotation centrée à l'origine de $\pi/2$ dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre si $f(r, \theta) = f\left(r, \frac{\pi}{2} + \theta\right) = 0$ (ou $f(r, \theta) = f\left(-r, -\frac{\pi}{2} + \theta\right)$).

Les conditions entre parenthèses dans la liste précédente sont données car ils sont parfois plus simples à vérifier que les conditions standards. ♠

12.5.2 Longueur d'une courbe donnée par une équation en coordonnées polaires

Supposons qu'une courbe Γ soit décrite par l'équation en coordonnées polaires $f(r, \theta) = 0$. Supposons de plus que nous puissions résoudre cette équation pour r en fonction de θ . Dans ce cas, une représentation paramétrique pour la courbe Γ est donnée par

$$x = \phi_1(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = \phi_2(\theta) = r(\theta) \sin(\theta)$$

pour $a \leq \theta \leq b$. Puisque

$$\phi_1'(\theta) = r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \phi_2'(\theta) = r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta),$$

nous avons

$$\begin{aligned} (\phi_1'(\theta))^2 + (\phi_2'(\theta))^2 &= (r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta))^2 + (r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta))^2 \\ &= (r'(\theta))^2 \cos^2(\theta) - 2r'(\theta)r(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) + (r(\theta))^2 \sin^2(\theta) \\ &\quad + (r'(\theta))^2 \sin^2(\theta) + 2r'(\theta)r(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) + (r(\theta))^2 \cos^2(\theta) \\ &= (r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2, \end{aligned}$$

Ainsi, la formule (12.3.3) pour calculer la longueur d'une courbe devient

$$L = \int_a^b \sqrt{(\phi_1'(\theta))^2 + (\phi_2'(\theta))^2} \, d\theta = \int_a^b \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} \, d\theta.$$

Nous avons donc le résultat suivant.

Proposition 12.5.10

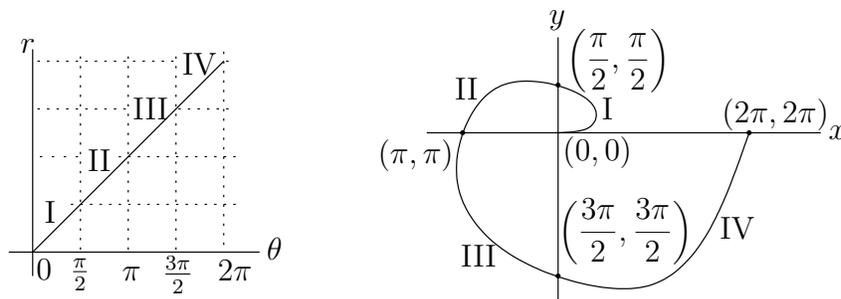
Soit Γ une courbe donnée par une équation en coordonnées polaire $r = r(\theta)$ pour $a \leq \theta \leq b$. La longueur L de cette courbe est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} d\theta. \quad (12.5.1)$$

Exemple 12.5.11

Traçons la courbe donnée par l'équation en coordonnées polaires $r = \theta$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, et calculons la longueur de cette courbe.

Le graphe de r en fonction de θ ainsi que le dessin de la courbe sont donnés ci-dessous.



C'est une spirale. Puisque $r(\theta) = \theta$ et $r'(\theta) = 1$, la longueur L de cette courbe est

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta.$$

Nous avons montré à l'aide d'une substitution trigonométrique à l'exemple 6.2.22 que

$$\int \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta = \frac{1}{2} \theta \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| + C.$$

Ainsi,

$$L = \left(\frac{1}{2} \theta \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta + \sqrt{1 + \theta^2}| \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln |2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}|.$$



12.5.3 Aire d'une région bornée par une courbe définie à l'aide d'une équation en coordonnées polaires

Supposons que nous voulions calculer l'aire de la région R représenté à la figure 12.9. La région R est bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Soit k un entier positif. Posons $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/k$ et $\theta_j = \alpha + j \Delta\theta$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous avons que $\theta_0 = \alpha$ et $\theta_k = \beta$. L'intervalle $[\alpha, \beta]$ est partagé en k sous-intervalles de la forme $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

Pour $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$, nous choisissons θ_j^* entre θ_j et θ_{j+1} . L'aire de la région bornée par les droites $\theta = \theta_j$ et $\theta = \theta_{j+1}$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$, est approximativement l'aire A_j de la région R_j bornée par les droites $\theta = \theta_j$ et $\theta = \theta_{j+1}$, et l'arc de cercle $r = r(\theta_j^*)$ pour $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$. La région R_j est une pointe de tarte dont l'aire est

$$A_j = \frac{1}{2} r^2(\theta_j^*) \Delta\theta_j^*$$

car R_j représente $\Delta\theta_j^*/2\pi$ du disque de rayon $r(\theta_j^*)$ dont l'aire est $\pi r^2(\theta_j^*)$.

Ainsi, l'aire A de la région R est approximativement la somme de l'aire de chacune des régions R_j .

$$A \approx \sum_{j=0}^{k-1} A_j = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2} r^2(\theta_j^*) \Delta\theta_j^* . \quad (12.5.2)$$

La somme précédente représente une somme de Riemann pour l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta .$$

Si k tend vers plus l'infini en (12.5.2), nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 12.5.12

Soit R une région bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$. L'aire A de R est

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta .$$

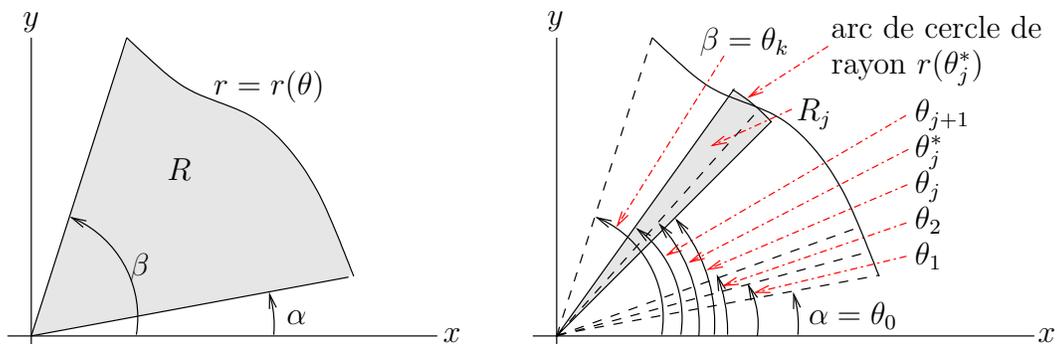
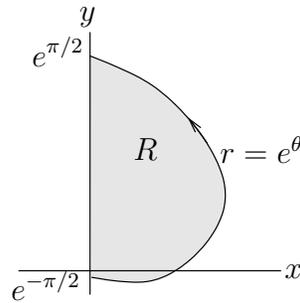


FIGURE 12.9 – La région R du plan est bornée par les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$, et la courbe $r = r(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$

Exemple 12.5.13

Dessignons la région R bornée par la courbe $r = e^\theta$ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ et l'axe des y , et calculons l'aire de cette région.

Le dessin de la région R est donné ci-dessous.



L'aire de R est

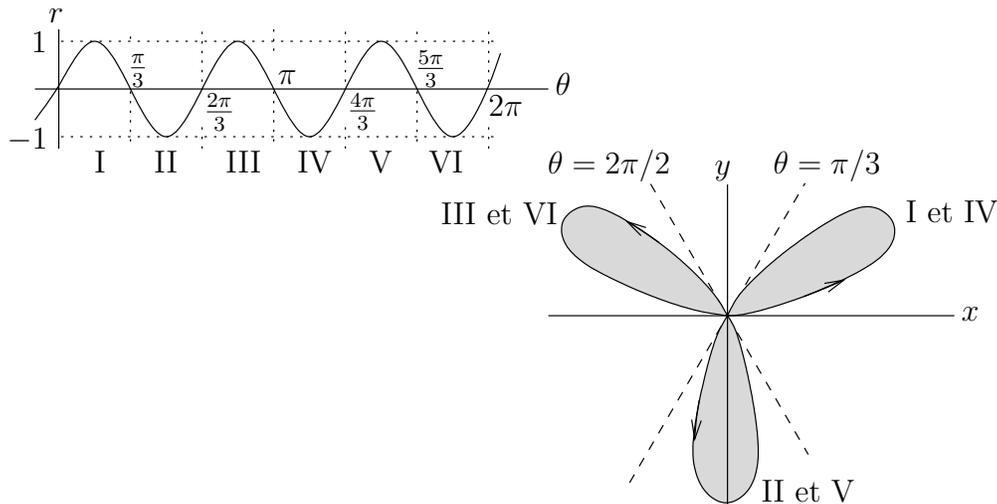
$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{4} e^{2\theta} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{1}{2} \sinh(\pi).$$



Exemple 12.5.14

Dessinons la région R bornée par la courbe $r = \sin(3\theta)$, et calculons l'aire de cette région.

Le graphe de r en fonction de θ ainsi que le dessin de la région R sont donnés ci-dessous.



Nous parcourons la contour de R deux fois lorsque θ augmente de 0 à 2π . De plus, nous remarquons que la courbe $r = \sin(3\theta)$ est invariante pour la rotation de $2\pi/3$ car

$$r = \sin(3\theta) \Rightarrow \sin\left(3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3\theta + 2\pi) = \sin(3\theta) = r.$$

Il suffit donc de calculer l'aire de la partie de la région R dans le premier quadrant et de multiplier le résultat par 3 pour trouver l'aire A de R .

$$A = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2(3\theta) d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos(6\theta)) d\theta$$

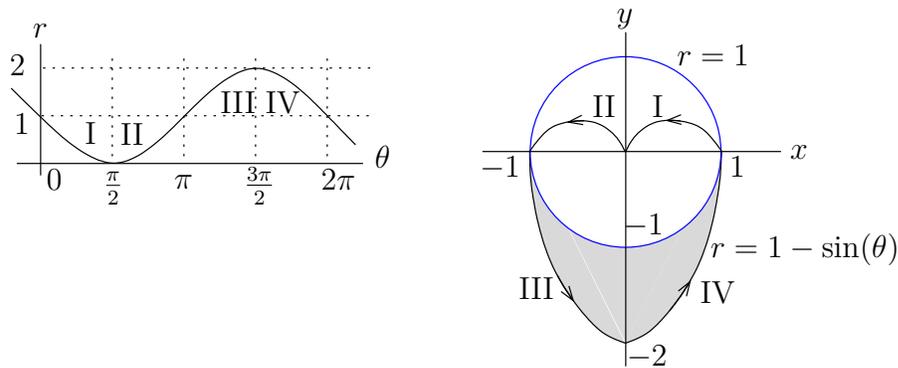
$$= \frac{3}{4} \left(\theta - \frac{1}{6} \sin(6\theta) \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{4}.$$



Exemple 12.5.15

Dessignons de la région R qui est à l'intérieur de la courbe $r = 1 - \sin(\theta)$ et à l'extérieur du cercle $r = 1$, et calculons l'aire de cette région.

Le graphe de r en fonction de θ ainsi que le dessin de la région R sont donnés ci-dessous.



Pour obtenir l'aire A de la région R , il suffit de soustraire l'aire de la partie du disque de rayon 1 sous l'axe des x de l'aire de la région bornée par la courbe $r = 1 - \sin(\theta)$ pour $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ et l'axe des x . C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1 - \sin(\theta))^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} 1^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (1 - 2\sin(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \left(1 - 2\sin(\theta) + \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right) d\theta - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\sin(\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) \right) d\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\theta + 2\cos(\theta) - \frac{1}{4}\sin(2\theta) \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2} + 4 \right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2. \end{aligned}$$



12.6 Exercices

12.6.1 Droite tangente à une courbe

Question 12.1

Considérons la courbe ayant la représentation paramétrique $x(t) = t^2 - 2t$ et $y(t) = t^2 - 1$ pour $t \in \mathbb{R}$.

- a) Quels sont les points où cette courbe coupe l'axe des x et l'axe des y ?
- b) Déterminez les points de la courbe où la tangente est horizontal et ceux où la tangente est vertical.
- c) Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe au point $(3, 8)$.
- d) Trouvez les points de la courbe où la tangente à la courbe en ces points passe par le point $(2, 7)$.

12.6.2 Longueur d'une courbe

Question 12.2

Quelle est la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x = t^2$, $y = 1 + t^3$ qui va du point $(0, 1)$ au point $(4, 9)$?

Question 12.3

Quelle est la longueur de la courbe donnée par la représentation paramétrique $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ pour $0 \leq t \leq \pi/2$?

Question 12.4

Quelle est la longueur de la courbe $y = 1 + 2x^{3/2}$ pour $1 \leq x \leq 3$?

Question 12.5

Quelle est la longueur de la courbe $y = \ln |\cos(x)|$ pour $0 \leq x \leq \pi/4$?

Question 12.6

Considérons la région R bornée par l'axe des x , la courbe $y = x^{1/3}$ et la droite $x = 1$. Calculez le périmètre de cette région avec une précision de 0.001.



Fonctions de plusieurs variables



13

Nous débutons ce chapitre par l'étude du domaine et de l'image des fonctions de plusieurs variables ; en particulier, des fonctions à valeurs réels définies sur \mathbb{R}^2 . Nous montrons comment utiliser les sections verticales et courbes de niveaux pour visualiser les fonctions à valeurs réels définies sur \mathbb{R}^2 . Nous abordons par la suite l'étude de la limite d'une fonction de plusieurs variables en un point ainsi que la continuité des fonctions de plusieurs variables. Nous verrons qu'il est beaucoup plus difficile de déterminer si une fonction de plusieurs variables à une limite en un point qu'il ne l'est de déterminer si une fonction d'une seule variable à une limite en un point.

13.1 Définitions

Définition 13.1.1

Une **fonction** f de n variables ($n > 1$) est une opération d'un sous-ensemble D de \mathbb{R}^n à l'ensemble \mathbb{R}^m ($m \geq 1$) qui, à chaque élément de D , associe un seul élément de \mathbb{R}^m . Nous écrivons $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ pour désigner une fonction f de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^m .

Les fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ sont généralement définies par m fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, \dots, m$. Lorsque nous écrivons $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, nous résumons la formule suivante.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Nous écrivons aussi $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ for $i = 1, 2, \dots, m$.

Les définitions du domaine et de l'image d'une fonction que nous avons vu pour les fonctions d'une variable prennent la forme suivante dans le cas d'une fonction de plusieurs variables.

Définition 13.1.2

Le **domaine** d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ où la fonction f est définie. Nous écrivons

$$\text{Dom } f = D.$$

L'**image** d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des éléments $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ pour lesquels il existe au moins un élément $\mathbf{x} \in D$ tel que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Nous écrivons

$$\text{Im } f \equiv \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \text{ pour au moins un élément } \mathbf{x} \in D\} .$$

Remarque 13.1.3

1. Pour être consistant avec la notation algébrique, nous devrions représenter l'argument $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ d'une fonction par la matrice

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de dimension $n \times 1$. Par contre, la tradition veut que nous utilisons la notation géométrique

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pour les fonctions à valeurs réelles sur \mathbb{R}^n . Le lecteur devrait toujours garder en tête la notation algébrique car c'est celle-ci qui doit être utilisée pour l'étude des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m où $m > 1$.

2. Nous avons

$$\text{Dom } f = \bigcap_{i=1}^m \text{Dom } f_i .$$

C'est-à-dire que f est définie au point \mathbf{x} si tous les f_i 's sont définis au point \mathbf{x} .



Sans en être conscient, nous avons déjà travaillé avec des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Commençons donc par revoir ces fonctions.

Soit A une matrice de dimension $m \times n$. Nous pouvons utiliser cette matrice pour définir une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de la façon suivante.

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, cette fonction associe à un vecteur \mathbf{x} dans \mathbb{R}^n le vecteur $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ dans \mathbb{R}^m . Les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définies par le produit d'une matrice avec un vecteur satisfont la définition suivante.

Définition 13.1.4

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée une **fonction linéaire** ou **application linéaire** si elle satisfait les deux propriétés suivantes :

1. $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ pour tous vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^n .

Exemple 13.1.5

La matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

défini une fonction linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $f(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Essayons de voir quelle est l'action de cette fonction sur un vecteur $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Nous avons

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta) \\ x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur \mathbf{y} est de même longueur que \mathbf{x} , car

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\| &= \sqrt{(x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta))^2 + (x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta))^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + x_2^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

où nous avons évidemment utilisé l'identité trigonométrique $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ pour tout θ . De plus,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta) \\ x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= (x_1^2 + x_2^2) \cos(\theta) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\theta). \end{aligned}$$

C'est exactement la formule (10.2.1) qui détermine le cosinus de l'angle entre les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} . L'angle entre les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} est donc θ .

L'image par f d'un vecteur \mathbf{x} est donc la rotation par θ radians du vecteur \mathbf{x} (figure 13.1). Nous avons une rotation dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre quand $\theta > 0$ et une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre quand $\theta < 0$.

Par exemple, si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\theta = \pi/3$, alors

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = R_{\pi/3} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

\mathbf{x} et \mathbf{y} sont deux vecteurs de longueur 2. Le vecteur \mathbf{y} est le résultat d'une rotation dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre par $\pi/3$ radians de \mathbf{x} ; le vecteur \mathbf{x} forme un angle de $\pi/6$ avec l'axe des x alors que \mathbf{y} forme un angle de $\pi/2$ avec l'axe des x . ♣

Exemple 13.1.6

Nous avons déjà travaillé avec des fonctions de la forme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Les représentations paramétriques des courbes dans \mathbb{R}^m sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^m . C'est le cas où $n = 1$.

Par exemple, la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par les fonctions

$$\phi_1(t) = 2 \cos(t) \quad , \quad \phi_2(t) = 2 \sin(t) \quad \text{et} \quad \phi_3(t) = t$$

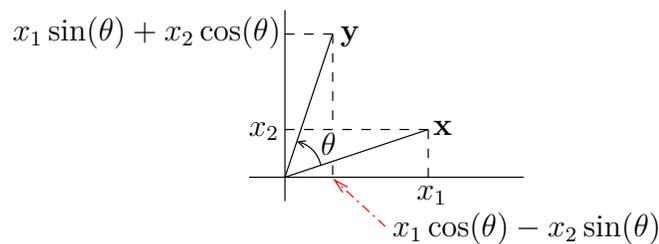


FIGURE 13.1 – Le vecteur \mathbf{y} est obtenu par une rotation de θ radians dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre du \mathbf{x} .

pour $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique d'un ressort de longueur infinie (car ϕ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$) dont l'axe central est l'axe des x_3 . 

Exemple 13.1.7

Les fonctions

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad \text{et} \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

définissent une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ où $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$. Le vecteur $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ possède les coordonnées

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad \text{et} \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

le domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ de la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ est

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$$

car f_2 n'est pas définie pour $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 

13.2 Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

Dans cette section, nous considérons les fonctions à valeurs réelles ; c'est-à-dire, $m = 1$.

Exemple 13.2.1

La température maximale (en degrés centigrades) au point de longitude x_1 et latitude x_2 (en degrés) définit une fonction $T : D \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque point de coordonnées (x_1, x_2) associe la température maximale $T(x_1, x_2)$ à ce point. L'ensemble D est l'ensemble des coordonnées ; c'est-à-dire,

$$D = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 360 \quad \text{et} \quad -90 \leq x_2 \leq 90\}$$

où nous supposons que $x_2 < 0$ dans l'hémisphère sud. 

Exemple 13.2.2

Une fonction de plusieurs variables peut être définie à l'aide d'un tableau comme c'est le cas

dans le tableau suivant qui donne l'indice de température en fonction de la température et du niveau d'humidité.

		Température en C°		
		20	22	24
Humidité en %	0	18	20	22
	10	19	21	23
	20	19.5	21.5	23.5
	30	20	22	25

Ce tableau définit une fonction $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ où

$$D = \{(x_1, x_2) : x_1 = 20, 22, 24 \text{ et } x_2 = 0, 10, 20, 30\}.$$

Nous avons $I(0, 22) = 20^\circ\text{C}$, $I(20, 22) = 21.5^\circ\text{C}$, etc. ♣

Exemple 13.2.3

Nous pouvons définir une fonction à l'aide d'une expression algébrique. Par exemple,

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{36 - 4x_1^2 - 9x_2^2}$$

définit une fonction sur l'ensemble des points (x_1, x_2) tels que $36 - 4x_1^2 - 9x_2^2 \geq 0$. Ainsi, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où

$$D = \{(x_1, x_2) : 4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36\}.$$

C'est la région du plan bornée par l'ellipse $\frac{x_1^2}{3^2} + \frac{x_2^2}{2^2} = 1$. ♣

Pour les fonctions de plusieurs variables, la définition du graphe d'une fonction s'énonce de la façon suivante.

Définition 13.2.4

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Nous définissons le **graphe de la fonction** f comme étant l'ensemble

$$\text{graphe de } f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$$

de \mathbb{R}^{n+1} .

Seules les fonctions définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ pourront être représentées par un dessin (certainement dans l'univers de l'auteur). Nous retrouvons à la figure 13.2 le graphe d'une possible fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 13.2.5

Les **fonctions affines** sont les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de la forme $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ pour A , une matrice de dimension $n \times m$, et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, un vecteur arbitraire mais fixe. Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, nous obtenons une fonction linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m puisque f satisfait alors

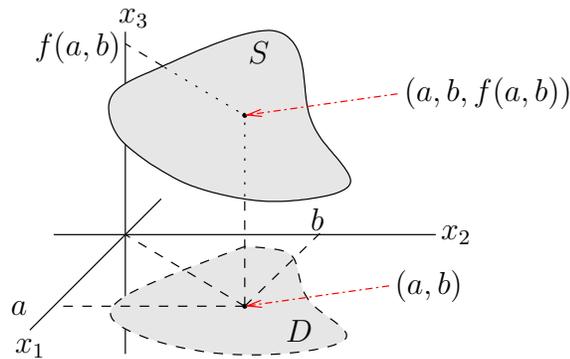


FIGURE 13.2 – Pour obtenir le graphe S de la fonction f , nous traçons dans le système de coordonnées cartésiennes l'ensemble des points $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ pour $(x_1, x_2) \in D$.

la définition 13.1.4.

En particulier, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction f est de la forme $f(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i x_i + b$ où les m_i et b sont des constantes.

Dans le cas d'une fonction affine $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, nous observons que le graphe de f est un plan dans l'espace.

Exemple 13.2.6

Le tableau suivant donne quelques valeurs d'une fonction affine f . Cherchons une formule pour cette fonction.

$x_2 \backslash x_1$	0	1	2	3
-1	1.5	3.5	5.5	7.5
0	1	3	5	7
1	0.5	2.5	4.5	6.5
2	0	2	4	6

Comme le graphe de f est un plan, il suffit de chercher une formule de la forme suivante pour f .

$$x_3 = f(x_1, x_2) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + b. \quad (13.2.1)$$

Nous présentons deux méthodes pour déterminer les valeurs de m_1 , m_2 et b . La première méthode est géométrique alors que la deuxième est purement algébrique.

1. Comme l'intersection de deux plans non parallèles est une droite, l'intersection du graphe de f et du plan $x_1 = 1$ est une droite qui contient les points $(x_2, x_3) = (-1, 3.5)$, $(0, 3)$, $(1, 2.5)$ et $(2, 2)$. C'est donc une droite de pente $(3.5 - 3)/(-1 - 0) = -0.5$. Or, si on pose $x_1 = 1$ dans (13.2.1), nous obtenons la formule $x_3 = m_2 x_2 + m_1 + b$ pour la droite d'intersection. Donc $m_2 = -0.5$.

L'intersection du graphe de f et du plan $x_2 = 2$ est une droite qui contient les points $(x_1, x_3) = (0, 0), (1, 2), (2, 4)$ et $(3, 6)$. C'est donc une droite de pente $(2-0)/(1-0) = 2$. Or, si on pose $x_2 = 2$ dans (13.2.1), nous obtenons la formule $x_3 = m_1 x_1 + 2 m_2 + b$ pour la droite d'intersection. Donc $m_1 = 2$.

Il découle des deux paragraphes précédents que $x_3 = f(x_1, x_2) = 2x_1 - 0.5x_2 + b$. Pour déterminer b , prenons le point $(1, 1, 2.5)$ du graphe de f (tout autre point du graphe serait acceptable). Donc $2.5 = f(1, 1) = 2 - 0.5 + b$. Ce qui donne $b = 1$.

La formule algébrique pour f est $x_3 = f(x_1, x_2) = 2x_1 - 0.5x_2 + 1$.

2. Nous savons qu'un plan est déterminé par trois points qui ne sont pas sur une même droite. Choisissons les trois points $(1, -1, 3.5), (1, 2, 2)$ et $(2, 1, 4.5)$ (tout autre choix de trois points qui ne sont pas sur une même droite aurait été aussi valide). Si nous substituons ces trois points dans la formule (13.2.1), nous obtenons les trois équations linéaires suivantes.

$$3.5 = m_1 - m_2 + b, \quad 2 = m_1 + 2m_2 + b \quad \text{et} \quad 4.5 = 2m_1 + m_2 + b.$$

Il faut résoudre ce système d'équations linéaires pour m_1, m_2 et b . Sous la forme matricielle, nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \\ 4.5 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3.5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4.5 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3.5 \\ 0 & 3 & 0 & -1.5 \\ 0 & 3 & -1 & -2.5 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3.5 \\ 0 & 3 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

$(1/3)R_2 \rightarrow R_2$ et $-R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$R_1 + R_2 - R_3 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Nous trouvons donc $m_1 = 2, m_2 = -1/2$ et $b = 1$ comme pour la première méthode.

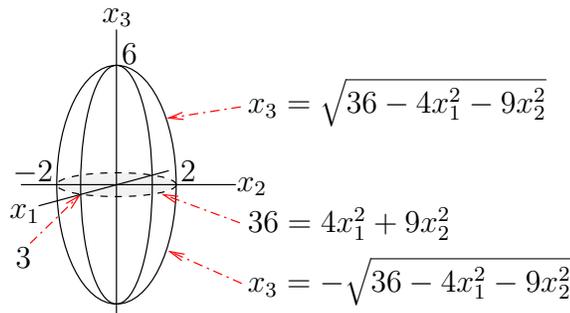
**Exemple 13.2.7**

À l'exemple 13.2.3, le domaine de f est

$$\text{Dom } f = \{(x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{3^2} + \frac{x_2^2}{2^2} \leq 1\}.$$

Montrons que l'image de f est l'intervalle $[0, 6]$.

Si nous posons $x_3 = \sqrt{36 - 4x_1^2 - 9x_2^2}$, nous obtenons l'équation de l'ellipsoïde $x_3^2 + 4x_1^2 + 9x_2^2 = 36$ qui est dessiné ci-dessous.

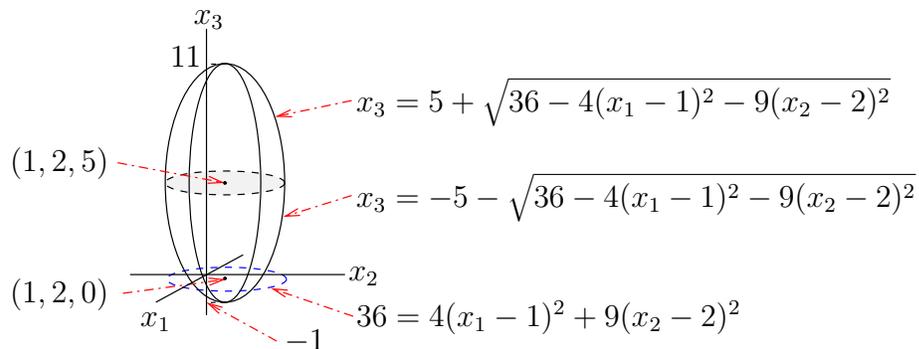


La partie de l'ellipsoïde au-dessus du plan $x_3 = 0$ est le graphe de f . La plus grande valeur de f est 6 lorsque $(x_1, x_2) = (0, 0)$ et la plus petite valeur de f est 0 lorsque $x_1^2/3^2 + x_2^2/2^2 = 1$. La fonction f prend toutes les valeurs entre 0 et 6. 

Exemple 13.2.8

Traçons le graphe de la fonction $x_3 = f(x_1, x_2) = 5 - \sqrt{36 - 9(x_1 - 1)^2 - 4(x_2 - 2)^2}$.

Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons $(x_3 - 5)^2 + 9(x_1 - 1)^2 + 4(x_2 - 2)^2 = 36$. C'est le même ellipsoïde qu'à l'exemple précédent sauf qu'il est maintenant centrée au point $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 5)$ et non plus à l'origine.



Puisque nous avons un signe négatif devant la racine carrée, le graphe de f est la partie sous le plan $x_3 = 5$. L'image de f est donc l'intervalle $[-1, 5]$. 

Même pour les fonctions de deux variables, il est souvent fort difficile de tracer le graphe d'une fonction. Nous avons donc besoin de méthodes pour représenter l'information fournie par une fonction.

Définition 13.2.9

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$. Une **courbe de niveaux** de f est une courbe $C \subset D$ définie par l'équation $f(x_1, x_2) = k$ où k est une constante ; c'est-à-dire, $C = \{(x_1, x_2) \in D : f(x_1, x_2) = k\}$.

En traçant plusieurs courbes de niveau d'une fonction f sur une même figure, nous pouvons déterminer (approximativement) les maximums et minimums locaux de cette fonction ainsi que sur les régions où elle est croissante et décroissante.

Exemple 13.2.10

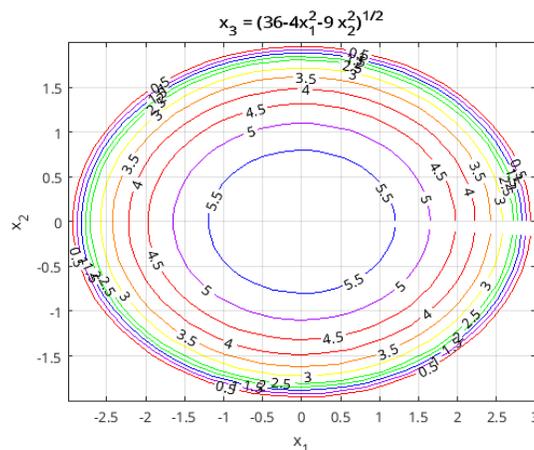
Traçons plusieurs courbes de niveau pour la fonction

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{36 - 4x_1^2 - 9x_2^2}.$$

Si $f(x_1, x_2) = k$, nous obtenons

$$\frac{x_1^2}{3^2} + \frac{x_2^2}{2^2} = 1 - \frac{k^2}{6^2}.$$

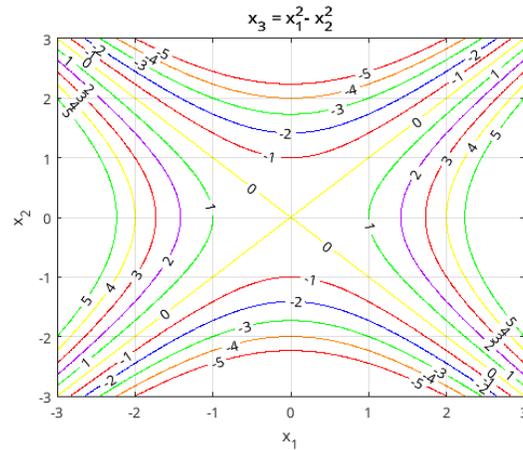
Les seules courbes de niveau sont pour $|k| \leq 6$ car $x_1^2/3^2 + x_2^2/2^2 \geq 0$ pour tout x_1 et x_2 . Les courbes de niveau sont des ellipses. Nous obtenons la figure suivante.



Exemple 13.2.11

Traçons plusieurs courbes de niveau pour la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Les courbes de niveau $f(x_1, x_2) = k$ sont définies pour tout k . Ce sont des hyperboles sauf pour $k = 0$ où nous obtenons les droites $x_2 = \pm x_1$. Nous obtenons la figure suivante.

**Définition 13.2.12**

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $M \subset \mathbb{R}^3$ un plan défini par $x_2 = m x_1 + b$. Une **section verticale** de f est la courbe $C \subset M$ définie par l'intersection de M avec le graphe de f ; c'est-à-dire,

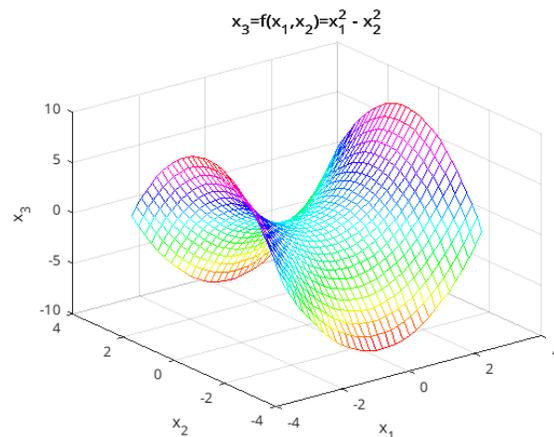
$$C = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : x_2 = m x_1 + b \text{ et } (x_1, x_2) \in D\} .$$

Deux familles de plans verticaux sont généralement utilisées pour produire des sections verticales : les plans $x_1 = k_1$ et $x_2 = k_2$ où k_1 et k_2 sont des constantes.

Exemple 13.2.13

Décrivons les sections verticales $x_1 = k_1$ et $x_2 = k_2$ de $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Si $x_1 = k_1$, nous obtenons l'équation $x_3 = f(k_1, x_2) = k_1^2 - x_2^2$ qui représente des paraboles ouvertes vers le bas. Si $x_2 = k_2$, nous obtenons l'équation $x_3 = f(x_1, k_2) = x_1^2 - k_2^2$ qui représente des paraboles ouvertes vers le haut. Le graphe de f est donné ci-dessous.



Nous avons reproduit à la figure 13.3 quelques courbes planaires que nous retrouvons fréquemment comme courbes de niveau ou sections verticales de fonctions.

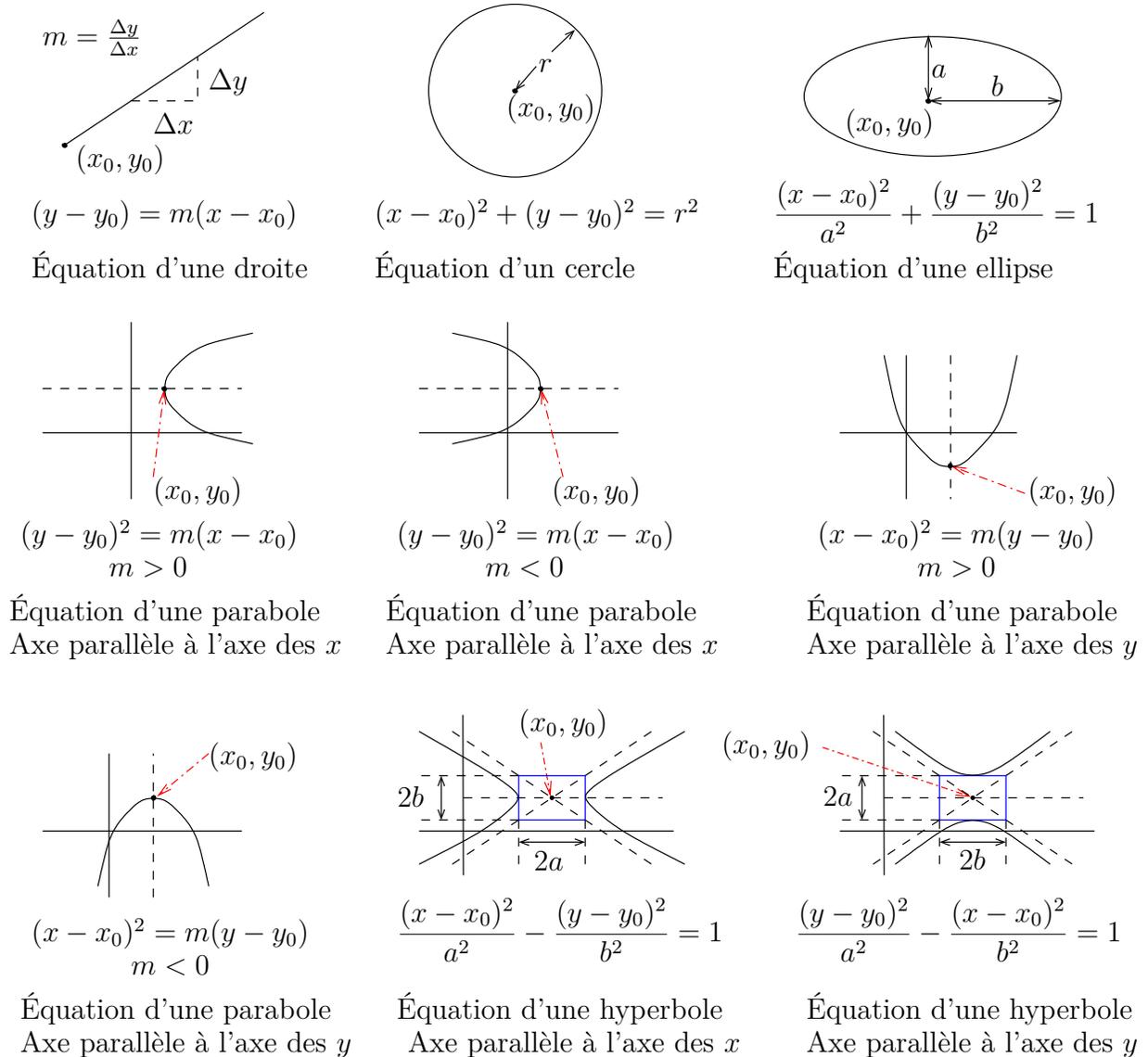


FIGURE 13.3 – Voici quelques courbes planaires élémentaires qui peuvent représenter des courbes de niveau ou des sections verticales d'une fonction.

13.3 Limites et fonctions continues

La définition de la limite d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en un point avec $n > 1$ est fondamentalement la même que la définition de la limite d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un point

que nous avons donnée à la section 3.1. De même, La définition de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en un point avec $n > 1$ est fondamentalement la même que la définition de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un point que nous avons donnée à la section 3.1. La seule différence dans les deux cas est que la valeur absolue est remplacée par la norme euclidienne.

Sur la droite réelle, la distance entre un point x et l'origine est donnée par la valeur absolue $|x|$ de ce nombre. La distance entre deux points x et y est donnée par la valeur absolue $|x - y|$.

La distance euclidienne dans \mathbb{R}^n joue le rôle de la valeur absolue dans \mathbb{R} . Nous avons vu à la définition 10.1.3 que la longueur d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (ou sa **norme euclidienne**) est donnée par

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Le symbole $\|\cdot\|$ dans \mathbb{R}^n remplace le symbole $|\cdot|$ pour la valeur absolue dans \mathbb{R} . La distance euclidienne entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} de \mathbb{R}^n est

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

Une illustration de la distance entre deux points de \mathbb{R}^2 et une illustration de la longueur d'un vecteur dans \mathbb{R}^3 sont données à la figure 13.4. La formule pour calculer $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ est bien la distance entre deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} obtenue à l'aide du théorème de Pythagore.

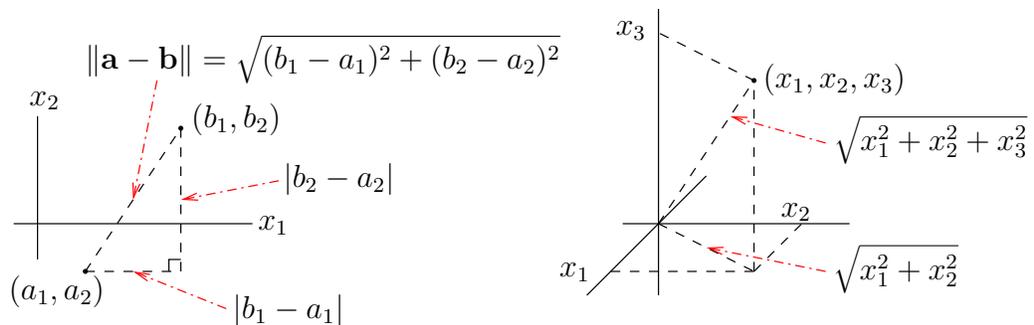


FIGURE 13.4 – Illustrations de la distance entre deux points de \mathbb{R}^2 dans le dessin à gauche et de la longueur d'un vecteur de \mathbb{R}^3 dans le dessin à droite.

Nous commençons par définir la notion de convergence d'une suite de points dans \mathbb{R}^n .

Définition 13.3.1

Nous disons qu'une suite de points $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de \mathbb{R}^n **converge (ou tend) vers un point** $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si la distance euclidienne entre \mathbf{x}_k et \mathbf{c} approche 0 lorsque k tend vers plus l'infini. En d'autres mots,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}\| = 0.$$

Nous écrivons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{c} .$$

Nous disons que \mathbf{c} est la **limite** de la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

La définition précédente de limite d'une suite est équivalente à la définition suivante en termes de ϵ et δ .

Définition 13.3.2

Nous disons qu'une suite de points $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de \mathbb{R}^n **converge (ou tend) vers un point** $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier $K > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}\| < \epsilon \quad \text{si} \quad k > K .$$

Nous écrivons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{c} .$$

Nous disons aussi que \mathbf{c} est la **limite** de la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Avant de définir la limite, la continuité et la dérivée d'une fonction de plusieurs variables à un point, il faut généraliser le concept d'intervalles que nous retrouvons sur la droite réelle.

Définition 13.3.3

Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si, quel que soit $\mathbf{v} \in V$, nous pouvons trouver $\delta > 0$ (qui peut dépendre de \mathbf{v}) tel que

$$B_{\delta}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| < \delta\} \subset V .$$

$B_{\delta}(\mathbf{v})$ est la boule de rayon δ centrée au point \mathbf{v} (figure 13.5).

Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ est un **voisinage** d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ si $\mathbf{c} \in V$ et V est ouvert. L'ensemble $V \setminus \{\mathbf{c}\}$, l'ensemble V auquel nous avons enlevé le point \mathbf{c} , est alors appelé un **voisinage troué** de \mathbf{c} .

Notons que les boules $B_{\delta}(\mathbf{v})$ ne contiennent pas leur frontière $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = \delta\}$. Ainsi, si V est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , nous pouvons conclure qu'une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie «autour» de tout point $\mathbf{v} \in V$ (figure 13.5). C'est un détail subtile qui nous permet de bien définir la dérivée d'une fonction en un point.

Il est parfois utile de déterminer la frontière d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 . Il est facile de voir que la frontière de la boule $B = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$ est la sphère $S = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 2\}$. Malheureusement, ce n'est pas toujours aussi facile que cela de déterminer la frontière d'un ensemble de \mathbb{R}^3 (L'étude des frontières d'ensembles est le sujet principal de la géométrie fractale). En fait, il faut commencer par définir ce qu'est la frontière d'un ensemble dans \mathbb{R}^n .

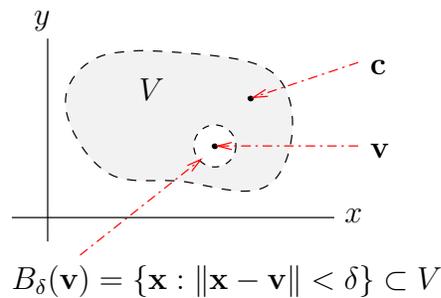


FIGURE 13.5 – V est un voisinage possible pour le point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. Quel que soit le point \mathbf{v} de V que nous choisissons, nous pouvons toujours trouver une boule $B_\delta(\mathbf{v})$ de rayon δ centrée à \mathbf{v} qui soit à l'intérieur de V . Plus \mathbf{v} sera près de la frontière de V , plus δ devra être petit.

Définition 13.3.4

Soit S un sous ensemble de \mathbb{R}^n . La **frontière** de S , dénotée ∂S , est l'ensemble des points \mathbf{x} tels que $B_\delta(\mathbf{x}) \cap S \neq \emptyset$ et $B_\delta(\mathbf{x}) \cap S^c \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$, où $S^c = \mathbb{R}^n \setminus S$ est le complément de l'ensemble S . En d'autres mots, pour tout voisinage V de \mathbf{x} , $V \cap S \neq \emptyset$ et $V \cap S^c \neq \emptyset$.

Exemple 13.3.5

Soit

$$S_o = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 2 \text{ et } x_3 > 0\} \quad \text{et} \quad S_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leq 2 \text{ et } x_3 \geq 0\} .$$

La frontière de S_o est

$$\partial S_o = S_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 2 \text{ et } x_3 > 0, \text{ ou } \|\mathbf{x}\| \leq 2 \text{ et } x_3 = 0\} .$$

Notons que $\partial S_o \cap S_o = \emptyset$, la frontière de S_o n'appartient pas à S_o . Par contre, la frontière de S_f est aussi S_1 mais cette fois $S_1 \subset S_f$. Nous pourrions aussi donner des exemples d'ensembles qui contiennent une partie seulement de leur frontière, une partie qui n'est pas l'ensemble vide et qui n'est pas la frontière au complet. Les ensembles qui contiennent leur frontière sont très importants et nous leurs donnons un nom. 

Définition 13.3.6

Les ensembles $S \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\partial S \subset S$ sont appelés des **ensembles fermés**.

Remarque 13.3.7

Les intervalles fermés de la droite réelle sont des exemples d'ensembles fermés. De même, la balle $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$ et la sphère $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 2\}$ sont fermées. Notons que $\partial B = S$ et $\partial S = S$. 

Exemple 13.3.8

L'exemple de voisinage le plus important, et celui que le lecteur devrait toujours avoir en tête lorsque nous parlons de voisinage, est

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < r\}.$$

Pour $n = 2$, c'est le disque de rayon r centré au point \mathbf{c} . Pour $n = 3$, c'est la balle de rayon r centrée au point \mathbf{c} ,

L'ensemble

$$V' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < r\}$$

est un voisinage troué de \mathbf{c} car le point \mathbf{c} a été enlevé du voisinage V . ♣

Définition 13.3.9

Soit D un voisinage troué d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. Nous écrivons

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$$

s'il existe un unique point $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{w}$$

quelle que soit la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de D qui tend vers \mathbf{c} . Dans la limite ci-dessus, les points \mathbf{x}_k sont tous différents de \mathbf{c} car $\mathbf{c} \notin D$. Il n'est pas nécessaire que f soit définie à \mathbf{c} .

Nous disons que $f(\mathbf{x})$ **converge (ou tend) vers le point \mathbf{w} lorsque \mathbf{x} tend vers \mathbf{c}** . Nous disons aussi que **\mathbf{w} est la limite de f au point \mathbf{c}** .

Comme pour la définition de limite d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à un point c , nous pouvons donner une définition équivalente à la définition précédente en termes de ϵ et δ .

Définition 13.3.10 

Soit D un voisinage troué d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. nous écrivons

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$$

pour $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ si, quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné, il existe un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{w}\| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \delta, \quad \mathbf{x} \in D.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, $\mathbf{x} \neq \mathbf{c}$ car $\mathbf{c} \notin D$. Il n'est pas nécessaire que f soit définie à \mathbf{c} .

Nous disons que $f(\mathbf{x})$ **converge (ou tend) vers le point \mathbf{w} lorsque \mathbf{x} tend vers \mathbf{c}** . Nous disons aussi que **\mathbf{w} est la limite de f au point \mathbf{c}** .

Exemple 13.3.11

Quelle est la valeur de la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y}$?

Nous avons vu que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1 .$$

Puisque $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x+y = 0$, nous avons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$.

Pour être plus précis, si $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite qui converge vers l'origine lorsque k converge vers plus l'infini, alors $\{x_k + y_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite qui converge vers 0 lorsque k converge vers plus l'infini. Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_k + y_k)}{x_k + y_k} = 1 .$$

Puisque cela est vrai pour toute suite $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers l'origine lorsque k converge vers plus l'infini, nous pouvons conclure que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1 .$$

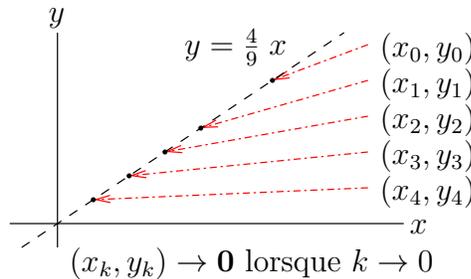
**Exemple 13.3.12**

Soit $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Est-ce que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe? Si oui, quelle est sa valeur?

Si nous approchons l'origine avec des points (x_k, y_k) le long de la droite $y = mx$, alors $y_k = mx_k$ pour tout k et nous obtenons

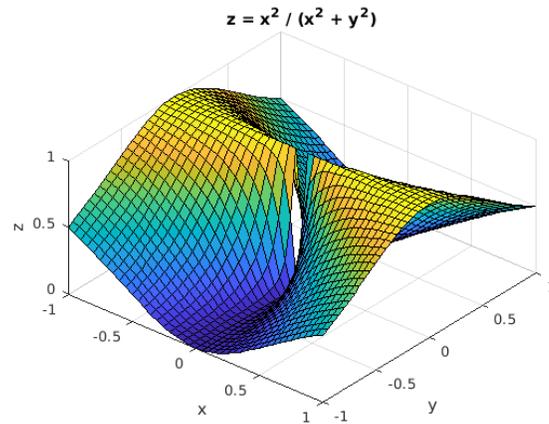
$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k^2}{x_k^2 + (mx_k)^2} = \frac{1}{1 + m^2} \rightarrow \frac{1}{1 + m^2}$$

lorsque k tend vers l'infini. Par exemple, si $m = 4/9$, nous obtenons la suite $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{\infty}$ qui converge vers l'origine le long de la droite $y = 4x/9$ lorsque k tend vers l'infini.



Nous avons que $f(x_k, y_k) = 81/97$ pour tout (x_k, y_k) le long de la droite $y = 4x/9$.

Puisque différentes valeurs de $m > 0$ (i.e. nous approchons l'origine le long de différentes droites) donnent différentes limites, nous concluons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas. Le graphe de f est donné ci-dessous.



Exemple 13.3.13

Évaluons la limite suivante si elle existe.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{xy - x}{x^2 + y^2 - 2y + 1}.$$

Notons que $\frac{xy - x}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = \frac{x(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}$. Si nous approchons $(0, 1)$ avec des points (x_k, y_k) sur la droite $y - 1 = mx$, donc $y_k = 1 + mx_k$, nous obtenons que

$$\frac{x_k y_k - x_k}{x_k^2 + y_k^2 - 2y_k + 1} = \frac{x_k (y_k - 1)}{x_k^2 + (y_k - 1)^2} = \frac{m x_k^2}{x_k^2 + m^2 x_k^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Comme nous obtenons des limites différentes pour différentes valeurs de m (le long de différentes droites), la limite n'existe pas. 

Définition 13.3.14

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. La fonction f est **continue au point \mathbf{c}** si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c}).$$

En d'autres mots,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{c})$$

quelle que soit la suite $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de D qui tend vers \mathbf{c} . Notons que La fonction f est définie au point \mathbf{c} car $\mathbf{c} \in D$.

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point $\mathbf{x} \in D$, nous disons que f est **continue sur D** .

La définition en termes de ϵ et δ de la limite d'une fonction à un point nous permet d'écrire la définition suivante pour la continuité d'une fonction à un point. Cette définition est évidemment équivalente à la définition précédente de la continuité.

Définition 13.3.15 

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. La fonction f est **continue** au point \mathbf{c} si, quel que soit le petit nombre $\epsilon > 0$ qui est donné, il existe un nombre $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ϵ) tel que

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{c})\| < \epsilon \quad \text{si} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \delta, \quad \mathbf{x} \in D.$$

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point $\mathbf{x} \in D$, nous disons que f est **continue sur D** .

Comme pour les fonctions d'une variable, nous avons que les fonctions de plusieurs variables qui sont formées à partir de polynômes, de fonctions trigonométriques, de fonctions exponentielles et logarithmiques, ... sont continues en tout point où elles sont définies (où il n'y a pas de divisions par zéro, de racines carrées de nombres négatifs, ...). En particulier, il est possible (sous certaines conditions) de composer les fonctions de plusieurs variables qui sont continues pour produire des fonctions continues.

Théorème 13.3.16

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ensembles ouverts. Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ deux fonctions continues. Si $f(V) \subset W$, alors $g \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction continue.

Exemple 13.3.17

La fonction $f(x, y) = e^{\sqrt{x+2y}}$ est continue sur l'ensemble $D = \{(x, y) : x + 2y \geq 0\}$ car elle est la composition $f = g \circ h$ de deux fonctions continues : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(z) = e^z$ pour $z \in \mathbb{R}$ et $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = \sqrt{x+2y}$ pour $(x, y) \in D$. Notons que D est le domaine de h et que l'image de h est dans le domaine de g . Ainsi,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,4)} f(x, y) = f(1, 4) = e^3$$

car $(1, 4) \in D$, 

Exemple 13.3.18

Soit

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}.$$

Cette fonction est définie et continue en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$ car elle est le quotient de deux polynômes en x et y dont le polynôme au dénominateur est nul seulement au point $(x, y) = (0, 0)$.

Montrons que si nous définissons f au point $(0, 0)$ par $f(0, 0) = 0$, alors f est une fonction continue pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque

$$\left| \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3 y^2}{y^2} \right| = |x^3| \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow 0$, nous avons que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0).$$

Ainsi,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est une fonction continue sur \mathbb{R}^2 . ♣

La définition de limite d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est associée à la limite de chacune des composantes $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ de la fonction f . Il en est de même pour la continuité.

Proposition 13.3.19

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f_i(\mathbf{x}) = w_i$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$.

Il découle de cette proposition que si $\mathbf{c} \in D$, alors

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{c})$$

si et seulement si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{c})$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$. Nous avons donc la proposition suivante.

Proposition 13.3.20

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. La fonction f est continue au point \mathbf{c} si et seulement si les fonctions f_i pour $i = 1, 2, \dots, m$ sont continues au point \mathbf{c} .

Exemple 13.3.21

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définie par les deux fonctions à valeurs réelles suivantes

$$f_1(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = 4 + e^{-(x^4 + y^4)}.$$

Alors,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \begin{pmatrix} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 4 + e^{-(x^4 + y^4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

car $4 + e^{-(x^4 + y^4)}$ est continue à l'origine. La limite de la première composante est donnée à l'exemple 13.3.11. 

13.4 Propriétés des fonctions continues

Les fonctions continues de plusieurs variables possèdent plusieurs des propriétés que nous avons énoncées pour les fonctions continue d'une variable.

Certaines des propriétés, comme le Théorème des valeurs intermédiaires (3.3.5) peut être généralisé aux fonctions de plusieurs variables. Pour ce faire, il faut introduire la notion d'ensembles séparables. Pour ne pas trop s'éloigner du but de ce manuel, nous n'aborderons pas ce sujet.

Il y a un résultat qui nous sera très utile par la suite et qui ne demande pas d'introduire de nouveaux concepts.

Théorème 13.4.1 (Théorème des valeurs extrêmes)

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné et fermé, et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, ils existent \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D tels que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$ pour tout \mathbf{x} dans D .

Le résultat précédent est une conséquence du fameux **Théorème de Bolzano-Weierstrass** qui est un des piliers de l'analyse réel.

Ce théorème sera d'une très grande utilité quand nous chercherons les valeurs extrêmes d'une fonction à l'aide de la dérivée au prochain chapitre.

Nous verrons au prochain chapitre la généralisation du Théorème de la moyenne aux fonctions de plusieurs variables.

13.5 Exercices

13.5.1 Fonctions de plusieurs variables

Question 13.1

Quelle est l'équation de la fonction $f(x, y) = mx + ny + c$ dont l'intersection du graphe avec le plan x, z est la droite $z = 3x + 4$ et l'intersection du graphe avec le plan y, z est la droite $z = y + 4$?

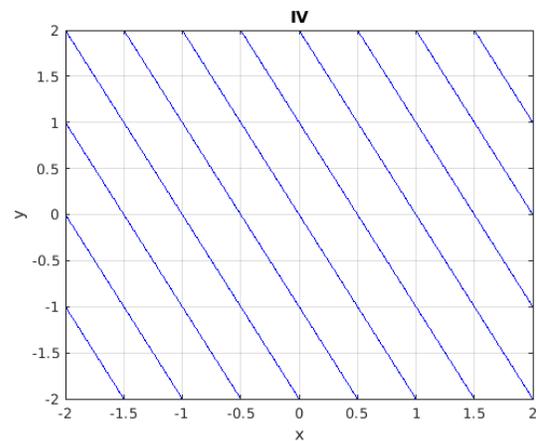
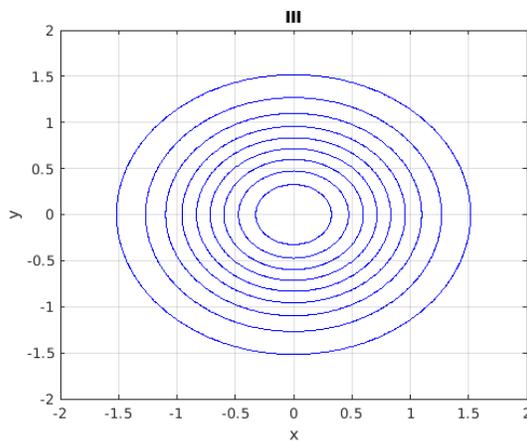
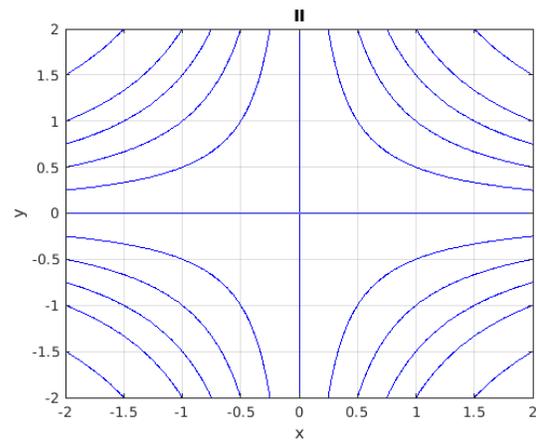
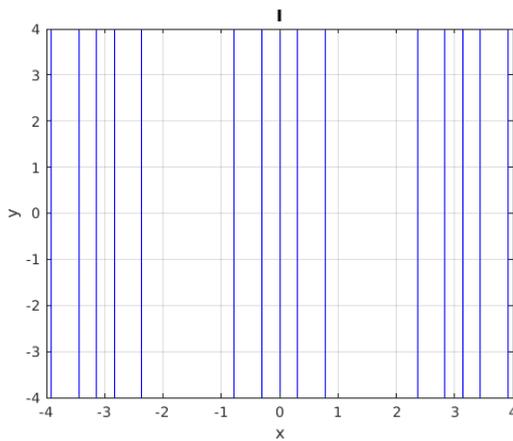
Question 13.2

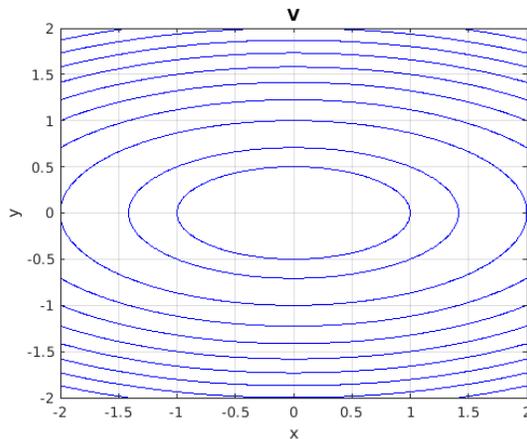
Quel est la famille des courbes de niveau de $f(x, y) = y - x^2$?

Question 13.3

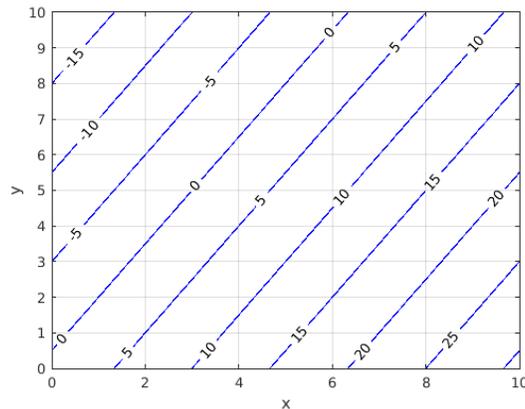
Associez à chacune des fonctions suivantes un des diagrammes de courbes de niveau donnés ci-dessous. Expliquez votre choix.

- a) $z = x^2 + 4y^2$ b) $z = 1 - 2x - y$ c) $z = \sin(x)$
 d) $z = xy$ e) $z = e^{-(x^2+y^2)}$



**Question 13.4**

Trouvez l'équation de plan qui a le diagramme de courbes de niveau donné ci-dessous.

**Question 13.5**

Trouvez l'équation de plan qui produit les données du tableau suivant.

$x \backslash y$	10	20	30
5	-22	-62	-102
10	-7	-47	-87
15	8	-32	-72

Question 13.6

Trouvez le domaine et l'image, et tracez quelques courbes de niveau pour chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

Question 13.7

Dessinez quelques courbes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

et utilisez ces courbes pour tracer le graphe de la fonction.

13.5.2 Fonctions continues

Question 13.8

Est-ce que la fonction suivante est continue au point $(0, 0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Justifiez votre réponse.



Dérivée de fonctions de plusieurs variables



14

Nous commençons par prolonger aux fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles la notion de dérivée que nous avons vu pour les fonctions d'une variable. La seconde étape consiste à étudier la dérivée d'une fonction de plusieurs variables selon une direction donnée. Nous verrons que le gradient peut jouer un rôle important pour le calcul des dérivées selon une direction donnée. Nous profiterons de l'occasion pour présenter quelques applications utiles du gradient.

Comme nous avons fait pour les fonctions d'une variable, nous étudierons l'approximation locale des fonctions de plusieurs variables et les points critiques des fonctions de plusieurs variables dans le but de pouvoir déterminer les valeurs extrêmes de ces fonctions avec ou sans contraintes. Nous terminons le chapitre avec la dérivée d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m où m et n sont plus grand que 1.

14.1 Dérivées partielles

Pour les prochaines sections, nous allons seulement considérer les fonctions à valeurs réelles. De plus, sans perte de généralité, nous assumons que les fonctions sont des fonctions de deux variables seulement. Sauf pour une légère modification des énoncés, entre autre remplacer (x_1, x_2) par (x_1, x_2, \dots, x_n) , les définitions et résultats sur les fonctions de deux variables que nous présentons demeurent valides pour les fonctions de plus de deux variables.

Définition 14.1.1

Soit D un voisinage d'un point $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.

La **dérivée partielle de f au point \mathbf{c} par rapport à la variable x_1** est définie par

$$f_{x_1}(\mathbf{c}) = f_{x_1}(c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, c_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c_1 + h, c_2) - f(c_1, c_2)}{h}$$

si cette limite existe.

La **dérivée partielle de f au point \mathbf{c} par rapport à la variable x_2** est définie par

$$f_{x_2}(\mathbf{c}) = f_{x_2}(c_1, c_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c_1, c_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c_1, c_2 + h) - f(c_1, c_2)}{h}$$

si cette limite existe.

Dans les limites précédentes, nous assumons que h est assez petit pour que $(c_1 + h, c_2)$ et $(c_1, c_2 + h)$ soient dans V et donc que f soit définie à ces points.

Comme pour les fonctions d'une variable, si nous considérons tous les points où la dérivée partielle d'une fonction f existe, nous pouvons définir une fonction que nous appellerons la dérivée partielle de la fonction f .

Définition 14.1.2

Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si la dérivée partielle de f par rapport à x_1 existe en tout point de V , la **dérivée partielle de f par rapport à x_1 sur V** est la fonction définie par

$$f_{x_1}(\mathbf{x}) = f_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

pour tout $\mathbf{x} \in V$. C'est une nouvelle fonction de deux variables définie sur V .

De même, si la dérivée partielle de f par rapport à x_2 existe en tout point de V , la **dérivée partielle de f par rapport à x_2 sur V** est la fonction définie par

$$f_{x_2}(\mathbf{x}) = f_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

pour tout $\mathbf{x} \in V$. C'est une nouvelle fonction de deux variables définie sur V .

Puisque x_2 est fixe dans la définition de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, cette dérivée partielle est la dérivée d'une fonction d'une seule variable, x_1 , qui dépend d'un paramètre, x_2 . De même, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ est la dérivée d'une fonction d'une seule variable, x_2 , qui dépend d'un paramètre, x_1 . Donc toutes les règles de dérivation pour les fonctions d'une variable sont valides si nous traitons comme une constante la variable qui n'est pas la variable de dérivation.

Exemple 14.1.3

Si $f(x, y) = \sin(y - x)$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{d}{du} \sin(u) \Big|_{u=y-x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x}(y - x) \right) = \cos(y - x) (-1) = -\cos(y - x)$$

grâce à la règle de dérivation des fonctions composées. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{d}{du} \sin(u) \Big|_{u=y-x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y}(y-x) \right) = \cos(y-x)(1) = \cos(y-x).$$

En particulier,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 4) = -\cos(4-2) = -\cos(2).$$



Exemple 14.1.4

Si $f(x, y) = (3xy^2 - x^4 + 1)^4$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{d}{du} u^4 \Big|_{u=3xy^2-x^4+1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 - x^4 + 1) \right) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 (3y^2 - 4x^3)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{d}{du} u^4 \Big|_{u=3xy^2-x^4+1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 - x^4 + 1) \right) = 4(3xy^2 - x^4 + 1)^3 (6xy).$$



Par induction, nous pouvons définir des dérivées partielles d'ordre deux.

Définition 14.1.5

Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles d'ordre un sur V . Les **dérivées partielles d'ordre deux de f sur V** sont définies par

$$\begin{aligned} f_{x_1x_1}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1, x_2), \\ f_{x_2x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2), \\ f_{x_1x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2) \end{aligned}$$

et

$$f_{x_2x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1, x_2)$$

si toutes ces dérivées partielles (d'ordre un) existent sur V .

Nous pourrions aussi définir des dérivées partielles d'ordre supérieure à deux. Par exemple, nous pouvons définir des dérivées partielles d'ordre trois pour la fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ de la

définition précédente. Une de ces dérivées partielles est

$$f_{x_2x_2x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right) (x_1, x_2).$$

si toutes les dérivées d'ordre un et deux existent pour tout $(x_1, x_2) \in V$.

Définition 14.1.6

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Nous disons que f est de classe C^k si les dérivées partielles d'ordre k de f existent et sont continues. Nous écrivons $f \in C^k(V)$

Si $f \in C^k(V)$, le fait que les dérivées partielles d'ordre k de f existent implique que toutes les dérivées partielles de f d'ordre inférieure à k existent et sont aussi continues.

Exemple 14.1.7

Soit $f(x, y) = \cos(5x + 3y)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= -5 \sin(5x + 3y), \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= -3 \sin(5x + 3y), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (-5 \sin(5x + 3y)) = -25 \cos(5x + 3y), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (-3 \sin(5x + 3y)) = -9 \cos(5x + 3y), \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (-3 \sin(5x + 3y)) = -15 \cos(5x + 3y) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (-5 \sin(5x + 3y)) = -15 \cos(5x + 3y).$$



À l'exemple précédent, nous avons que $f_{xy} = f_{yx}$. Ce n'est pas toujours le cas mais il y a une très grande classe de fonctions f pour lesquelles $f_{xy} = f_{yx}$,

Proposition 14.1.8

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ possède des dérivées partielles d'ordre deux qui sont continues, alors $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1}$.

Remarque 14.1.9

Nous pourrions généraliser la proposition précédente. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ possède des dérivées partielles d'ordre trois qui sont continues, alors $f_{x_1x_2x_2} = f_{x_2x_1x_2} = f_{x_2x_2x_1}$ et $f_{x_1x_1x_2} =$

$f_{x_1 x_2 x_1} = f_{x_2 x_1 x_1}$. Nous pourrions aussi généraliser la proposition à $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec $n > 2$. ♠

Exemple 14.1.10

Montrons que les fonctions suivantes satisfont l'équation des ondes $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ où a et k sont des constantes.

a) Si

$$u(x, t) = \sin(kx) \sin(akt) = \frac{1}{2} (\cos(kx - akt) - \cos(kx + akt)) ,$$

alors

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (ak \sin(kx) \cos(akt)) = -a^2 k^2 \sin(kx) \sin(akt)$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (k \cos(kx) \sin(akt)) = -k^2 \sin(kx) \sin(akt) .$$

Ainsi,

$$u_{tt} = -a^2 k^2 \sin(kx) \sin(akt) = a^2 u_{xx} .$$

b) Si

$$u(x, t) = \sin(x - at) + \ln(x + at) ,$$

alors

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \cos(x - at) + \frac{a}{x + at} \right) = -a^2 \sin(x - at) - \frac{a^2}{(x + at)^2}$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos(x - at) + \frac{1}{x + at} \right) = -\sin(x - at) - \frac{1}{(x + at)^2} .$$

Ainsi,

$$u_{tt} = -a^2 \sin(x - at) - \frac{a^2}{(x + at)^2} = a^2 u_{xx} .$$

c) Si

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

où f et g sont deux fonctions qui possèdent des dérivées d'ordre deux, alors

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (a f'(x + at) - a g'(x - at)) = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at)$$

et

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (f'(x + at) + g'(x - at)) = f''(x + at) + g''(x - at) .$$

Ainsi,

$$u_{tt} = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at) = a^2 u_{xx} .$$



La règle pour dériver la composition de fonctions d'une variable peut être utilisée pour dériver la composition de fonctions de plusieurs variables.

Proposition 14.1.11

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si f et $g_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ possèdent des dérivées partielles, alors la fonction $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h = f \circ g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ possède aussi des dérivées partielles. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t_i}(\mathbf{t}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_k}{\partial t_i}(\mathbf{t}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_1}{\partial t_i}(\mathbf{t}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_2}{\partial t_i}(\mathbf{t}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(\mathbf{t})) \frac{\partial g_n}{\partial t_i}(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

pour $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ et $1 \leq i \leq m$.

Remarque 14.1.12

1. Cette proposition a déjà été utilisé pour $n = 1$ et $m = 2$ dans plusieurs exemples précédents.
2. Un cas important de la proposition précédente est lorsque $m = 1$. Nous avons alors la formule

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) \frac{dg_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t)) \frac{dg_2}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t)) \frac{dg_n}{dt}(t) \quad (14.1.1)$$

pour $t \in \mathbb{R}$.



Exemple 14.1.13

Soit $z = e^x \cos(y)$, $x = t^2$ et $y = \sin(t)$, évaluons $\frac{dz}{dt}$.

La notation $\frac{dz}{dt}$ peut porter à confusion car z n'est pas explicitement une fonction de t . Soit $\rho_1(t) = t^2$, $\rho_2(t) = \sin(t)$, $f(x, y) = e^x \cos(y)$ et $h(t) = f(\rho_1(t), \rho_2(t))$. Il faut interpréter $\frac{dz}{dt}$ comme étant $\frac{dh}{dt}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \frac{d\rho_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \frac{d\rho_2}{dt}(t) \\ &= (e^x \cos(y)) \Big|_{x=t^2, y=\sin(t)} (2t) + (-e^x \sin(y)) \Big|_{x=t^2, y=\sin(t)} (\cos(t)) \end{aligned} \quad (14.1.2)$$

$$= 2t e^{t^2} \cos(\sin(t)) - e^{t^2} \sin(\sin(t)) \cos(t) .$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dh}{dt}(t) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t), \rho_2(t)) \quad , \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{d\rho_1}{dt}(t) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\rho_2}{dt}(t) \quad , \end{aligned}$$

alors (14.1.2) peut s'exprimer

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} .$$

Cette notation est souvent utilisé en mathématiques appliquées (physique, génie, etc). ♣

Exemple 14.1.14

Soit $z = \sin(x) \cos(y^2)$, $x = t^2 + s^2$ et $y = e^{st}$, évaluons $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$.

Comme à l'exemple précédent, la notation $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$ peut porter à confusion. Soit $\rho_1(t, s) = t^2 + s^2$, $\rho_2(t, s) = e^{st}$, $f(x, y) = \sin(x) \cos(y^2)$ et $h(t, s) = f(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s))$. Les expressions $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$ représentent respectivement $\frac{\partial h}{\partial t}$ et $\frac{\partial h}{\partial s}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \frac{\partial \rho_1}{\partial t}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \frac{\partial \rho_2}{\partial t}(t, s) \quad (14.1.3) \\ &= \left(\cos(x) \cos(y^2) \right) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{ts}} (2t) + \left(-2y \sin(x) \sin(y^2) \right) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{st}} (se^{st}) \\ &= 2t \cos(t^2 + s^2) \cos(e^{2st}) - 2se^{2st} \sin(t^2 + s^2) \sin(e^{2st}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial s}(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \frac{\partial \rho_1}{\partial s}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \frac{\partial \rho_2}{\partial s}(t, s) \quad (14.1.4) \\ &= \left(\cos(x) \cos(y^2) \right) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{ts}} (2s) + \left(-2y \sin(x) \sin(y^2) \right) \Big|_{x=t^2+s^2, y=e^{st}} (te^{st}) \\ &= 2s \cos(t^2 + s^2) \cos(e^{2st}) - 2te^{2st} \sin(t^2 + s^2) \sin(e^{2st}) . \end{aligned}$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{dh}{dt}(t, s) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{dh}{ds}(t, s) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}(\rho_1(t, s), \rho_2(t, s)) \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t}(t, s) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \rho_2}{\partial t}(t, s) \quad , \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{\partial \rho_1}{\partial s}(t, s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \rho_2}{\partial s}(t, s) \quad , \end{aligned}$$

alors (14.1.3) et (14.1.4) peuvent s'exprimer respectivement

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} .$$



14.2 Plan tangent à une surface (forme explicite)

14.2.1 Surface donnée par une fonction de x_1 et x_2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles et soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une région du plan. L'ensemble

$$S = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in D\}$$

définit une surface dans \mathbb{R}^3 comme celle que nous retrouvons à la figure 13.2.

Les dérivées partielles de f au point $(a_1, a_2) \in D$ vont nous permettre de trouver l'équation du plan tangent à la surface S au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$.

La courbe produite par l'intersection du plan $x_2 = a_2$ avec la surface S est donnée par l'ensemble des points de la forme $(x_1, a_2, f(x_1, a_2))$ (figure 14.1). Une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x_1, x_2, x_3) = (\alpha, a_2, f(\alpha, a_2))$$

pour tout α tel que $(\alpha, a_2) \in D$. Un vecteur parallèle à la droite tangente à cette courbe au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ (et donc parallèle au plan tangent à la surface S) est donnée par

$$\mathbf{v}_1 = \left(\left. \frac{d}{d\alpha} \alpha \right|_{\alpha=a_1}, \left. \frac{d}{d\alpha} a_2 \right|_{\alpha=a_1}, \left. \frac{d}{d\alpha} f(\alpha, a_2) \right|_{\alpha=a_1} \right) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) .$$

La courbe produite par l'intersection du plan $x_1 = a_1$ avec la surface S est donnée par l'ensemble des points de la forme $(a_1, x_2, f(a_1, x_2))$ (figure 14.2). Une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$(x_1, x_2, x_3) = (a_1, \beta, f(a_1, \beta))$$

pour tout β tel que $(a_1, \beta) \in D$. Un vecteur parallèle à la droite tangente à cette courbe au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ (et donc parallèle au plan tangent à la surface S) est donnée par

$$\mathbf{v}_2 = \left(\left. \frac{d}{d\beta} a_1 \right|_{\beta=a_2}, \left. \frac{d}{d\beta} \beta \right|_{\beta=a_2}, \left. \frac{d}{d\beta} f(a_1, \beta) \right|_{\beta=a_2} \right) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) .$$

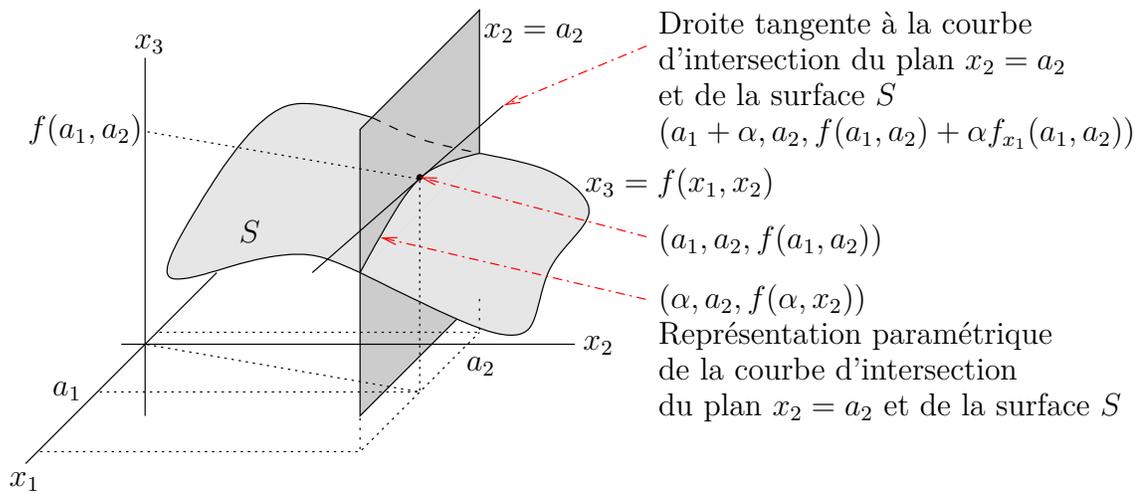


FIGURE 14.1 – Courbe produite par l'intersection de la surface $x_3 = f(x_1, x_2)$ et du plan $x_2 = a_2$.

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent Π à la surface S au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ (figure 14.3) est donné par le produit vectoriel de deux vecteurs non colinéaires et parallèles à ce plan. C'est le cas des vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 que nous venons de définir. Donc le vecteur

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{df}{dx_1}(a_1, a_2), -\frac{df}{dx_2}(a_1, a_2), 1 \right)$$

est perpendiculaire au plan Π .

L'équation du plan Π tangent à la surface S au point $(a, b, f(a, b))$ est

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot ((x_1, x_2, x_3) - (a_1, a_2, f(a_1, a_2))) \\ = -\frac{\partial f}{\partial x_1} f(a_1, a_2) (x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2} f(a_1, a_2) (x_2 - a_2) + (x_3 - f(a_1, a_2)) = 0. \end{aligned}$$

L'équation du plan tangent à la surface S au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ est souvent présentée sous la forme

$$x_3 = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) (x_2 - a_2). \quad (14.2.1)$$

Exemple 14.2.1

Trouvons l'équation du plan tangent à la surface décrite par $z = x \sin(x^2 y)$ au point $(1, \pi/2, 1)$.

L'équation du plan tangent est donnée par (14.2.1) où $f(x, y) = x \sin(x^2 y)$, $a = 1$, $b = \pi/2$ et $f(a, b) = \sin(\pi/2) = 1$. Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x^2 y) + 2x^2 y \cos(x^2 y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cos(x^2 y),$$

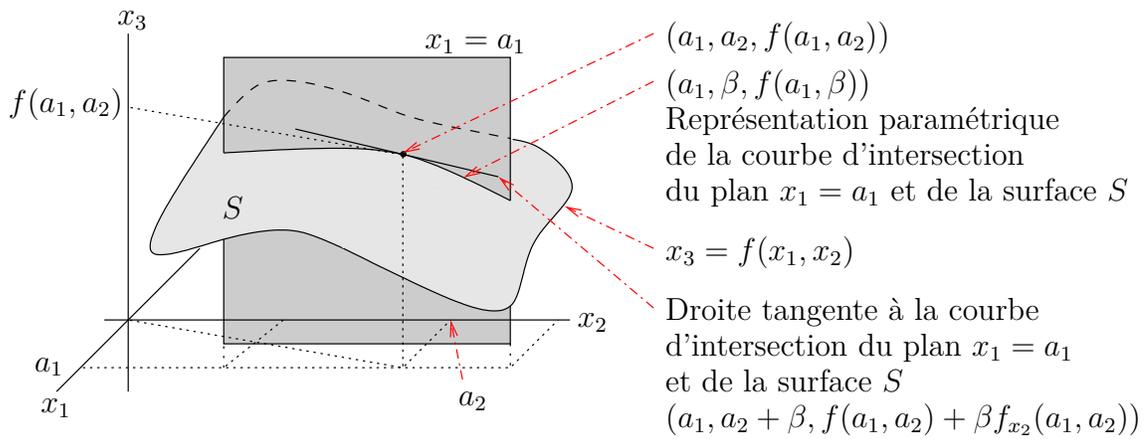


FIGURE 14.2 – Courbe produite par l'intersection de la surface $x_3 = f(x_1, x_2)$ et du plan $x_1 = a_1$

nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi/2) = \sin(\pi/2) + \pi \cos(\pi/2) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0,$$

Ainsi, l'équation du plan tangent est

$$z = f(1, \pi) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi)(y - \pi) = 1 + (x - 1) = x.$$

♣

Exemple 14.2.2

Trouvons l'équation du plan tangent au point $\mathbf{p} = (1, 2, \sqrt{2})$ de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Si, dans l'équation de l'ellipsoïde, nous assumons que z est une fonction de x et y , et nous dérivons implicitement cette équation par rapport à x et par rapport à y , nous obtenons

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x}{z} \quad \text{et} \quad \frac{2}{9}y + \frac{2}{9}z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

L'équation du plan tangent est

$$z = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{2}{\sqrt{2}}(y - 2).$$

Nous aurions pu représenter localement l'ellipse au voisinage du point \mathbf{p} par

$$z = f(x, y) = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9}}$$

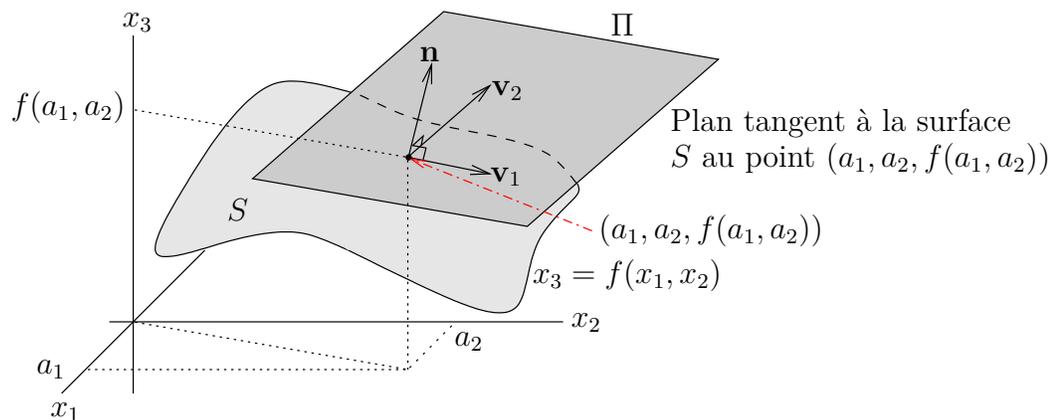


FIGURE 14.3 – Plan tangent à la surface S au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont parallèles au plan Π et \mathbf{n} est perpendiculaire au plan Π . Pour illustrer la relation entre les vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{n} et le plan Π , ces vecteurs sont tracés à partir du point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Normalement, ces vecteurs devraient partir de l'origine.

et utiliser la formule (14.2.1) pour trouver l'équation du plan tangent au point \mathbf{p} de l'ellipse. ♣

14.2.2 Surface donnée par une représentation paramétrique

Ce ne sont pas toutes les surfaces qui sont décrite par l'image d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Il suffit de penser à la sphère ou au taure. Ce genre de surface possède une représentation paramétrique.

Définition 14.2.3

Une fonction $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la représentation paramétrique d'une surface S dans \mathbb{R}^3 si :

1. ρ_i est de classe C^1 pour $i = 1, 2$ et 3 .
2. $\frac{\partial \rho}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ et $\frac{\partial \rho}{\partial u_2}(u_1, u_2)$ sont deux vecteurs non colinéaires dans \mathbb{R}^3 pour tout (u_1, u_2) .

La deuxième condition est requise pour assurer qu'il y a un vecteur normal (perpendiculaire) à la surface S en tout point $\rho(u_1, u_2)$ de la surface. Nous pouvons vérifier, comme cela a été fait à la section 12.2 pour la représentation paramétrique des courbes, que les vecteurs

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\partial \rho}{\partial u_1}(a_1, a_2) = \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u_1}(a_1, a_2), \frac{\partial \rho_2}{\partial u_1}(a_1, a_2), \frac{\partial \rho_3}{\partial u_1}(a_1, a_2) \right)$$

et

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(a_1, a_2) = \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u_2}(a_1, a_2), \frac{\partial \rho_2}{\partial u_2}(a_1, a_2), \frac{\partial \rho_3}{\partial u_2}(a_1, a_2) \right)$$

sont tangents à la surface S au point $\rho(a_1, a_2) \in S$. Ainsi, $\mathbf{m} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ est un vecteur normal à la surface S au point $\rho(a_1, a_2)$ de la surface. Notons que $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ car \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 ne sont pas colinéaires.

Exemple 14.2.4

Cherchons le plan tangent à la surface S donnée par la représentation paramétrique $\rho(u, v) = (u + v, u \sin(v), v \cos(u))$ au point $(2\pi, 0, -\pi)$.

Notons premièrement que $\rho(u, v) = (2\pi, 0, -\pi)$ si et seulement si $(u, v) = (\pi, \pi)$. En effet, $u \sin(v) = 0$ est vrai si $u = 0$ ou $v = n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Il découle de $u + v = 2\pi$ que $(u, v) = (0, 2\pi)$ et $(u, v) = (2\pi - n\pi, n\pi)$ sont les seules solutions possibles. Si $(u, v) = (0, 2\pi)$, alors $v \cos(u) = 2\pi \neq -\pi$. Donc $(u, v) = (0, 2\pi)$ est exclu. Si $(u, v) = (2\pi - n\pi, n\pi)$, alors $v \cos(u) = n\pi \cos(2\pi - n\pi) = (-1)^n n\pi$ et il faut choisir $n = 1$ pour avoir $v \cos(u) = -\pi$. Donc $(u, v) = (\pi, \pi)$ est la seule solution.

Pour trouver un vecteur normal \mathbf{m} à la surface S au point $(2\pi, 0, \pi)$, nous utilisons les vecteurs

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\partial \rho}{\partial u}(\pi, \pi) = (1, \sin(v), -v \sin(u)) \Big|_{(u,v)=(\pi,\pi)} = (1, 0, 0)$$

et

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \rho}{\partial v}(\pi, \pi) = (1, u \cos(v), \cos(u)) \Big|_{(u,v)=(\pi,\pi)} = (1, -\pi, -1).$$

Nous trouvons

$$\mathbf{m} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\pi & -1 \end{pmatrix} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} - \pi\mathbf{k} = (0, 1, -\pi)$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne. Ainsi, l'équation du plan tangent à la surface S au point $(2\pi, 0, -\pi)$ est donnée par

$$\mathbf{m} \cdot (x_1 - 2\pi, x_2, x_3 + \pi) = x_2 - \pi(x_3 + \pi) = 0.$$



14.3 Dérivées selon une direction donnée

Si nous regardons les figures 14.1 et 14.2, nous remarquons que le calcul des dérivées partielles assume que le déplacement se fait seulement selon une direction parallèle à l'axe des x_1 ou à l'axe des x_2 . Il n'y a aucune raison de se limiter à ces deux seules directions.

En fait, il est très utile de définir des dérivées selon d'autres directions.

Définition 14.3.1

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de longueur euclidienne 1. La **dérivée de f selon la direction \mathbf{u} au point $\mathbf{a} \in V$** , que nous dénotons $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$, est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}))$$

si cette limite existe. Dans la limite précédente, nous assumons que h est assez petit pour que $\mathbf{a} + h\mathbf{u} \in V$ et ainsi que f soit définie à $\mathbf{a} + h\mathbf{u}$.

Nous pouvons donner une interprétation graphique de la dérivée selon une direction semblable à celle que nous connaissons pour la dérivée d'une fonction d'une seule variable. Les figures 14.4 et 14.5 fournissent cette interprétation pour les fonctions de deux variables.

Soit Π le plan qui est parallèle au vecteur $(u_1, u_2, 0)$ et à l'axe des x_3 , et qui contient le point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Soit Γ la courbe donnée par l'intersection du plan Π et de la surface $x_3 = f(x_1, x_2)$. La sécante à la courbe Γ qui passe par les points $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ et $(a_1 + h u_1, a_2 + h u_2, f(a_1 + h u_1, a_2 + h u_2))$ (figure 14.4) est contenue dans le plan Π et sa pente est

$$\frac{1}{h} (f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})) ,$$

où $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ et $\mathbf{a} + h\mathbf{u} = (a_1 + h u_1, a_2 + h u_2)$. À la limite, lorsque h tend vers 0, nous obtenons la pente de la droite tangente à la courbe Γ au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ (figure 14.5). La tangente est aussi contenue dans le plan Π .

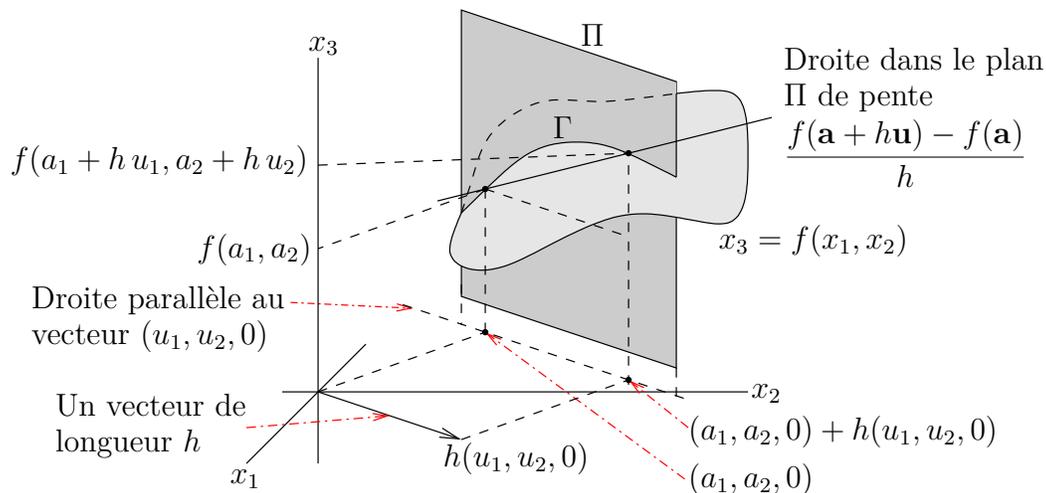


FIGURE 14.4 – La sécante à la courbe Γ qui passe par les points $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ et $(a_1 + h u_1, a_2 + h u_2, f(a_1 + h u_1, a_2 + h u_2))$. Le plan Π est parallèle au vecteur $(u_1, u_2, 0)$ et à l'axe des z , et contient le point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$.

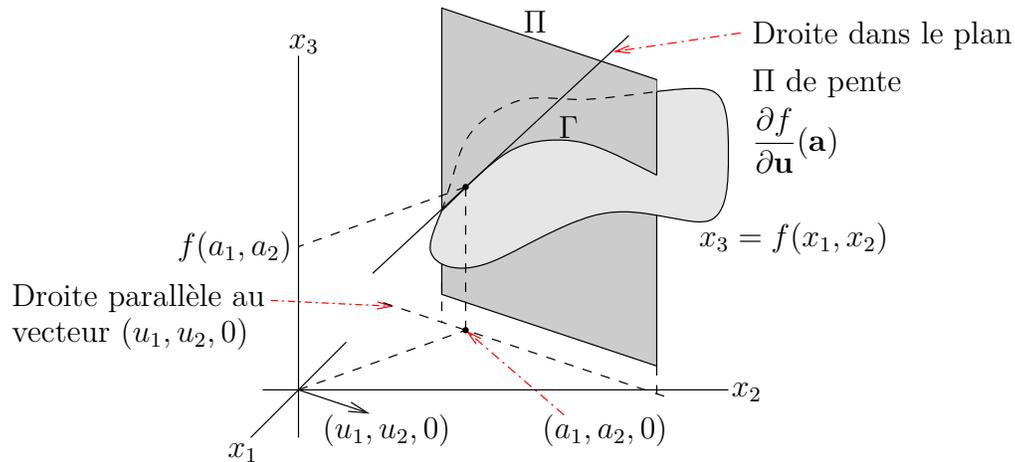


FIGURE 14.5 – La tangente à la courbe Γ au point $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$.

Exemple 14.3.2

Calculons la dérivée de la fonction $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ selon la direction $(1, 1)$ au point $(1, 0)$.

Remarquons que le vecteur $(1, 1)$ n'est pas de longueur 1. C'est un abus de langage qui est très commun dans la littérature scientifique. Il faut alors comprendre que nous demandons de calculer la dérivée selon la direction d'un vecteur \mathbf{u} de longueur 1 qui pointe dans la même direction que le vecteur donné.

Le vecteur $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pointe dans la même direction que le vecteur $(1, 1)$ et a une longueur 1. Nous calculons la dérivée de f au point $(1, 0)$ selon la direction \mathbf{u} .

Posons $\mathbf{a} = (1, 0)$, alors

$$\mathbf{a} + h\mathbf{u} = (1, 0) + h(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1 + h/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h/\sqrt{2}, h/\sqrt{2}) - f(1, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(1 + h/\sqrt{2})(h/\sqrt{2})}{(1 + h/\sqrt{2})^2 + (h/\sqrt{2})^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/\sqrt{2} + h/2}{h^2 + h\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



Calculer la dérivée selon une direction donnée à partir de la définition n'est généralement pas simple. Nous pouvons utiliser notre connaissance des dérivées partielles pour calculer la dérivée selon une direction donnée.

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un vecteur de longueur 1 dans \mathbb{R}^n et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n . De plus, soit $\mathbb{R}^n : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède des dérivées partielles.

Posons $g(t) = f(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n)$. À l'aide des règles de dérivation de fonctions composées, en particulier (14.1.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_1 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_2 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1 + t u_1, a_2 + t u_2, \dots, a_n + t u_n) u_n . \end{aligned}$$

Mais, par définition

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h u_1, a_2 + h u_2, \dots, a_n + h u_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a_1, a_2, \dots, a_n) . \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) u_n .$$

Nous obtenons donc le résultat suivant.

Proposition 14.3.3

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Posons

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \quad (14.3.1)$$

pour $\mathbf{a} \in V$. Nous avons que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} . \quad (14.3.2)$$

$\nabla f(\mathbf{a})$ est appelé le **gradient** de f au point \mathbf{a} .

Remarque 14.3.4

Pour être consistant avec la représentation algébrique des vecteurs (i.e. un vecteur est une matrice de dimension $n \times 1$), nous devrions définir le gradient de f à $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^\top$ comme la matrice de dimension $1 \times n$

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) .$$

Puisque $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^\top$, nous avons que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \mathbf{u} ,$$

le produit d'une matrice de dimension $1 \times n$ par une matrice de dimension $n \times 1$.

De plus, en utilisant cette convention, le gradient $\nabla f(\mathbf{a})$ n'est rien d'autre que la dérivée de $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ au point \mathbf{a} comme nous verrons à la fin du chapitre. 

Exemple 14.3.5

Calculons la dérivée de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ selon la direction $(1, \sqrt{3})$ au point $(2, 1)$.

Puisque $(1, \sqrt{3})$ n'est pas de longueur 1 mais de longueur 2, nous utilisons le vecteur $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et calculons la dérivée selon la direction \mathbf{u} .

Le gradient de f au point $\mathbf{a} = (2, 1)$ est

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}) \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(x,y)=(2,1)}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(x,y)=(2,1)} \right) \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} (2 + \sqrt{3}).$$



Exemple 14.3.6

Calculons la dérivée de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ selon la direction $(1, -1, -1)$ au point $(1, 1, 1)$.

Puisque $(1, -1, -1)$ n'est pas de longueur 1 mais de longueur $\sqrt{3}$, nous utilisons le vecteur $\mathbf{u} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ et calculons la dérivée selon la direction \mathbf{u} .

Le gradient de f au point $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ est

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}) \right) \\ &= \left(2x \Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)}, 2y \Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)}, 2z \Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)} \right) = (2, 2, 2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = (2, 2, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$



14.4 Propriétés du gradient

14.4.1 Plan tangent à une surface (forme implicite)

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Une équation de la forme $F(x_1, x_2, x_3) = C$ définit une surface S dans l'espace.

Exemple 14.4.1

Si $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et $C = 4$, alors $F(x, y, z) = 4$ est l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ qui représente une sphère de rayon 2 centrée à l'origine. 

Soit $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un point de la surface S et Γ une courbe sur la surface S qui passe par \mathbf{a} . De plus, soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une représentation paramétrique de Γ . Supposons que $\mathbf{a} = \phi(t)$ pour $t = \alpha$. Nous retrouvons une représentation de S et Γ à la figure 14.6.

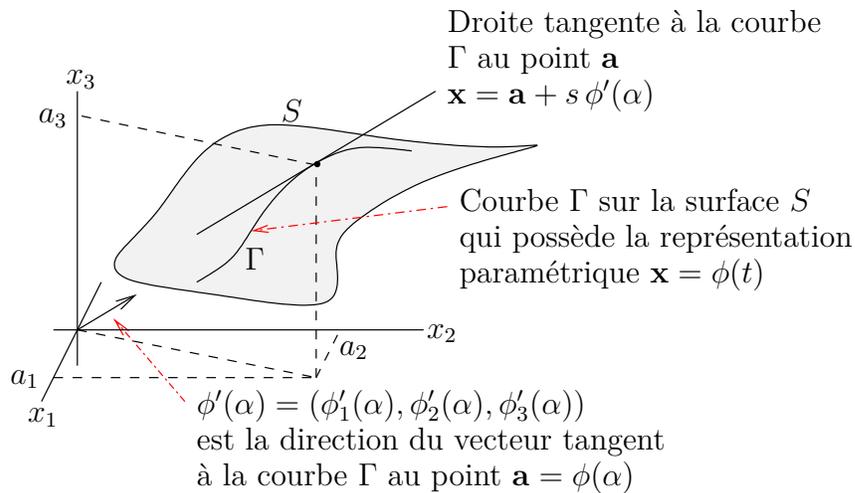


FIGURE 14.6 – La courbe Γ appartient à la surface S .

Puisque ϕ définit une courbe sur S , nous avons que

$$F(\phi(t)) = F(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)) = C$$

pour tout t . Si nous dérivons cette équation par rapport à t , nous obtenons

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t)) \phi'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\phi(t)) \phi'_2(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(\phi(t)) \phi'_3(t) = 0.$$

Cette expression n'est nulle autre que

$$\nabla F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = 0.$$

À $t = \alpha$, nous obtenons

$$\nabla F(\mathbf{a}) \cdot \phi'(\alpha) = 0.$$

Le vecteur $\nabla F(\mathbf{a})$ est perpendiculaire à la tangente à la courbe Γ au point $\phi(\alpha) = \mathbf{a}$.

Puisque $\phi'(\alpha)$ est un vecteur parallèle au plan tangent à la surface S au point $\phi(\alpha) = \mathbf{a}$ et que le raisonnement précédent est vrai quelle que soit la courbe Γ sur la surface S qui passe par \mathbf{a} , nous pouvons conclure que $\nabla F(\mathbf{a})$ est un vecteur perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point \mathbf{a} (figure 14.7). Nous avons donc le résultat suivant.

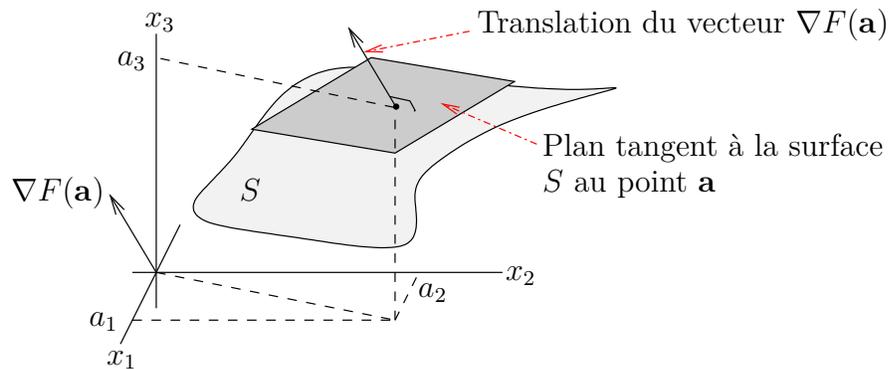


FIGURE 14.7 – S est la surface décrite par l'équation $F(\mathbf{x}) = C$. Le vecteur $\nabla F(\mathbf{a})$ est perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point $\mathbf{a} \in S$.

Proposition 14.4.2

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Si S est la surface définie par l'équation $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, x_3) = C$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ est une point de S , alors $\nabla F(\mathbf{a})$ est perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point \mathbf{a} . C'est-à-dire,

$$\nabla F(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

pour tous les vecteurs \mathbf{v} qui sont parallèles au plan tangent.

Remarque 14.4.3

Le résultat précédent est aussi vrai dans \mathbb{R}^n où n est différent de 3. La démonstration ne change pas. Si $n \neq 3$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable alors $S = \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) = C\}$ définit une «surface» dans \mathbb{R}^n . Le cas $n = 2$ nous donne une courbe dans le plan. Nous reverrons le cas $n = 2$ à la prochaine section. 

Ayant un vecteur perpendiculaire à un plan, il est maintenant facile de donner une équation représentant ce plan.

Proposition 14.4.4

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et C une constante. Si S est la surface définie par l'équation $F(\mathbf{x}) = C$ et \mathbf{a} est une point de S , alors l'équation du plan tangent à la surface S au point \mathbf{a} est

$$\nabla F(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{a})(x_2 - a_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(\mathbf{a})(x_3 - a_3) = 0 .$$

Remarque 14.4.5

Soit S une surface donnée par $x_3 = f(x_1, x_2)$ où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si nous définissons la fonction $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$, alors la surface S est donnée par

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Si $a_3 = f(a_1, a_2)$, alors (a_1, a_2, a_3) est un point de S et l'équation du plan tangent à S au point (a_1, a_2, a_3) est

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla F(a_1, a_2, a_3) \cdot (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2), -1 \right) \cdot (x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) - (x_3 - a_3) \end{aligned}$$

qui donne

$$x_3 = a_3 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2).$$

C'est la formule (14.2.1) car $a_3 = f(a_1, a_2)$. ♠

Exemple 14.4.6

Reprenons l'exemple 14.2.2 qui était de trouver l'équation du plan tangent au point $\mathbf{p} = (1, 2, \sqrt{2})$ de l'ellipsoïde $F(x, y, z) = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde au point \mathbf{p} est donnée par le gradient de F au point \mathbf{p} ; c'est-à-dire, par

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \nabla F(1, 2, \sqrt{2}) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})} \right) \\ &= \left(\left(\frac{2x}{3} \right) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \left(\frac{2y}{9} \right) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})}, \left(\frac{2z}{9} \right) \Big|_{(x,y,z)=(1,2,\sqrt{2})} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{9} \right). \end{aligned}$$

L'équation du plan tangent est

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla F(1, 2, \sqrt{2}) \cdot (x - 1, y - 2, z - \sqrt{2}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{9} \right) \cdot (x - 1, y - 2, z - \sqrt{2}) \\ &= \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{4}{9}(y - 2) + \frac{2\sqrt{2}}{9}(z - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$z = \sqrt{2} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3}(x - 1) - \frac{4}{9}(y - 2) \right) = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{2}{\sqrt{2}}(y - 2).$$

C'est la réponse donnée à l'exemple 14.2.2. ♣

14.4.2 Direction de croissance maximale

En plus d'être utile pour calculer des dérivées selon une direction donnée et pour trouver l'équation d'un plan tangent à une surface, le gradient d'une fonction a d'autres propriétés importantes que nous ne pouvons pas ignorer.

Proposition 14.4.7

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ un point quelconque. La valeur maximale de la dérivée de f selon une direction au point \mathbf{a} est atteinte lorsque la direction est $\nabla f(\mathbf{a})$ (le gradient de f à \mathbf{a}). La valeur maximale M est alors

$$M = \|\nabla f(\mathbf{a})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)^2}.$$

2. De même, La valeur minimale de la dérivée de f selon une direction au point \mathbf{a} est atteinte lorsque la direction est donnée par $-\nabla f(\mathbf{a})$. La valeur minimale est $-M$.

Pour démontrer cette proposition (dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3), il faut utiliser un résultat que nous avons vu lors de l'étude des vecteurs. Si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs et θ est le plus petit angle entre ces deux vecteurs, alors

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta).$$

Ainsi, pour tout vecteur \mathbf{u} de longueur 1,

$$\frac{df}{d\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos(\theta) \quad (14.4.1)$$

où θ est le plus petit angle entre \mathbf{u} et $\nabla f(\mathbf{a})$. Il découle de (14.4.1) que la valeur maximale de $\frac{df}{d\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ est lorsque $\cos(\theta) = 1$; c'est-à-dire, $\theta = 0$. Donc les vecteurs \mathbf{u} et $\nabla f(\mathbf{a})$ pointent dans la même direction. Puisque \mathbf{u} est de longueur 1, nous obtenons

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|} \nabla f(\mathbf{a}).$$

Il s'en suit de (14.4.1) que la valeur maximale de la dérivée selon une direction donnée est $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ lorsque $\theta = 0$

La démonstration de la deuxième partie de la proposition précédente est très semblable à celle de la première partie et est laissée aux lecteurs.

Nous avons montré à la section précédente que, pour toute surface S définie par $F(\mathbf{x}) = C$ et tout point \mathbf{a} sur cette surface, $\nabla F(\mathbf{a})$ est un vecteur perpendiculaire au plan tangent à S au point \mathbf{a} . Comme mentionné à la remarque 14.4.3, ce résultat est aussi vrai pour \mathbb{R}^2 et dans ce cas il faut remplacer les surfaces par des courbes. En d'autres mots, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 14.4.8

Soit Γ une courbe du plan définie par $f(\mathbf{x}) = C$ où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et C est une constante. Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ est un point de cette courbe, alors $\nabla f(\mathbf{a})$ est perpendiculaire à la droite tangente à Γ au point \mathbf{a} .

La démonstration de ce dernier résultat dans \mathbb{R}^2 est identique à la démonstration que nous avons donnée dans \mathbb{R}^3 à la section précédente. Néanmoins, vu l'importance de ce résultat, nous répétons cette démonstration ci-dessous.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = C\}$$

une courbe dans l'espace (en fait une courbe de niveau de f). Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique de la courbe Γ , alors

$$f(\phi(t)) = f(\phi_1(t), \phi_2(t)) = C$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si nous dérivons cette expression par rapport à t , nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \phi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \phi_2'(t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi_1(t), \phi_2(t)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\phi_1(t), \phi_2(t)) \right) \cdot (\phi_1'(t), \phi_2'(t)) \\ &= \nabla f(\phi(t)) \cdot \phi'(t). \end{aligned}$$

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ est un point de la courbe Γ et $\phi(t) = \mathbf{a}$ pour $t = \alpha$, alors

$$0 = \nabla f(\phi(\alpha)) \cdot \phi'(\alpha) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \phi'(\alpha).$$

Or, $\phi'(\alpha)$ est un vecteur parallèle à la droite tangente à la courbe Γ au point $\phi(\alpha) = \mathbf{a}$. Le gradient $\nabla f(\mathbf{a})$ est donc perpendiculaire à la tangente à la courbe Γ au point \mathbf{a} .

Si nous combinons le résultat énoncé ci-dessus et le résultat de la proposition 14.4.7, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 14.4.9

Soit Γ une courbe de niveau d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

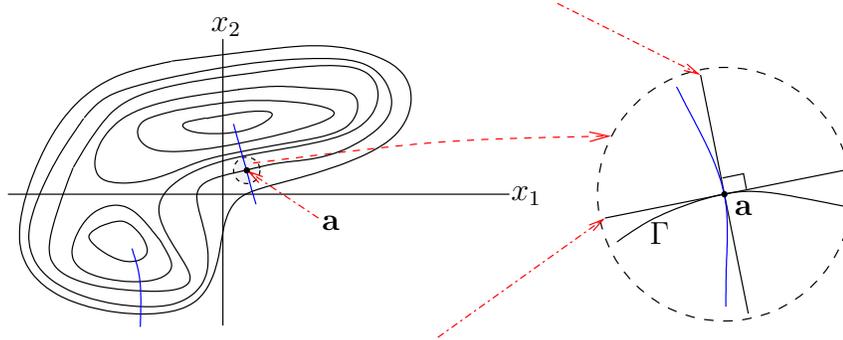
$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = C\}$$

où C est une constante. Soit $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ un point de Γ . À partir de \mathbf{a} , la direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement (i.e. la dérivée selon une direction au point \mathbf{a} est maximale) est perpendiculaire à la courbe de niveau Γ (figure 14.8.)

Exemple 14.4.10

Soit $f(x, y, z) = 5x^2z + 3x^2y + \sin(yz)$. Dans quelle direction la fonction f croît-elle le plus rapidement au point $(2, 1, 0)$ et quelle est ce taux de croissance maximal ?

Droite tangente à la trajectoire au point \mathbf{a} le long de laquelle f croît le plus rapidement. Cette droite tangente est parallèle à $\nabla f(\mathbf{a})$



Droite tangente à la courbe de niveau qui passe par le point \mathbf{a}
 ——— courbes de niveau ——— Trajectoires le long desquelles f croît le plus rapidement

FIGURE 14.8 – Les trajectoires (i.e. courbes) le long desquelles f croît le plus rapidement coupent les courbes de niveau de f perpendiculairement.

La direction dans laquelle la fonction f croît le plus rapidement est $\nabla f(2, 1, 0)$. Or

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &= (10xz + 6xy, 3x^2 + z \cos(yz), 5x^2 + y \cos(yz))\end{aligned}$$

Donc $\nabla f(2, 1, 0) = (12, 12, 21)$ est la direction dans laquelle f croît le plus rapidement. Le taux de croissance maximal (i.e. le taux de croissance dans la direction $\nabla f(2, 1, 0)$) est

$$\|\nabla f(2, 1, 0)\| = \sqrt{12^2 + 12^2 + 21^2} = 27.$$



14.4.3 Théorème de la moyenne

le Théorème de la moyenne (4.4.6) pour les fonctions d'une variable a une généralisation aux fonctions de plusieurs variables.

Théorème 14.4.11 (Théorème de la moyenne)

Soit D , un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , qui contient les points \mathbf{a} et \mathbf{b} ainsi que le segment de droite L de \mathbf{a} à \mathbf{b} . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de L . Alors il existe un point \mathbf{c} de L tel que

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Pour énoncer le prochain résultat, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 14.4.12

Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Nous disons que D est un **ensemble convexe** si, quel que soit les points \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D , le segment de droite de \mathbf{a} à \mathbf{b} est aussi inclus dans D .

Le concept d'ensembles convexes est illustré à la figure 14.9.

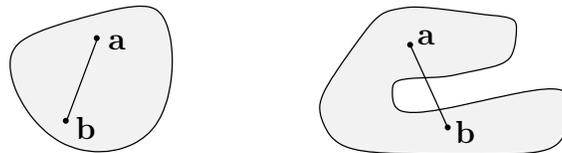


FIGURE 14.9 – L'ensemble à gauche est convexe alors que celui à droite ne l'est pas.

Corollaire 14.4.13

Soit D un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n . S'il existe une constante M telle que $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq M$ pour tout $\mathbf{x} \in D$, alors $|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \leq M\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ pour tout \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D .

Nous avons vu que pour une fonction d'une variable f , si $f'(x) = 0$ pour tout x sur un intervalle, alors f est une fonction constante sur l'intervalle. Le corollaire précédent généralise ce concept aux fonctions de plusieurs variables.

Corollaire 14.4.14

Soit D un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^n . Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ pour tout \mathbf{x} dans D , alors f est constante sur D .

En effet, le Corollaire 14.4.13 avec $M = 0$ donne $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$ pour tout \mathbf{a} et \mathbf{b} dans D .

14.5 Approximation locale des fonctions de plusieurs variables

Nous avons vu à la Section 5.5 que nous pouvons estimer la valeur d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ à l'aide de l'approximation linéaire $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ pour x près de a . Cela correspondait à utiliser la droite tangente pour estimer les valeurs de $f(x)$ pour x près de a . De la même manière, nous pouvons utiliser le plan tangent pour

estimer la valeur d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Nous avons

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})(x_j - a_j). \quad (14.5.1)$$

C'est un polynôme de degré 1 en x_1, x_2, \dots, x_n .

Comme pour les fonctions d'une variable, nous obtenons une meilleure approximation locale d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si nous utilisons un polynôme de degré plus grand que un. Il existe une version du Théorème de Taylor, théorème 5.5.2, pour les fonctions de plusieurs variables. Il est nécessaire d'introduire quelques notations afin d'énoncer cette version du théorème.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$; c'est-à-dire, α est un vecteur dont les n composantes sont des nombres naturels. Posons

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f \right) \right) \right)$$

ou, par convention, nous ignorons $\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$ lorsque $\alpha_j = 0$. De plus, définissons $\alpha!$, $|\alpha|$ et \mathbf{y}^α pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ de la façon suivante.

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \quad , \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{et} \quad \mathbf{y}^\alpha = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} .$$

Exemple 14.5.1

Si $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha = (2, 0, 1, 3)$, alors $\frac{\partial^\alpha f}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^3}{\partial x_4^3} f \right) \right)$, $\alpha! = 2! 0! 1! 3! = 12$, $|\alpha| = 2 + 0 + 1 + 3 = 6$ et $\mathbf{y}^\alpha = y_1^2 y_2^0 y_3^1 y_4^3 = y_1^2 y_3 y_4^3$. 

Théorème 14.5.2 (Théorème de Taylor)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{k+1} . Quel que soit \mathbf{x} et \mathbf{a} dans \mathbb{R}^n , il existe $\xi = \xi(k, \mathbf{a}, \mathbf{x})$ sur le segment de droite de \mathbf{x} à \mathbf{a} tel que

$$f(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{x}) + r_k(\mathbf{x})$$

où

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\alpha \quad \text{et} \quad r_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\alpha .$$

Le polynôme p_k est appelé le **polynôme de Taylor de degré k de f pour \mathbf{x} près de \mathbf{a}** et r_k est l'**erreur de troncature**.

Par la suite, nous aurons besoin de seulement deux cas particuliers du Théorème de Taylor.

Pour $k = 1$, nous avons

$$p_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{a})(x_j - a_j) .$$

C'est l'approximation linéaire en (14.5.1).

Pour $k = 2$, nous avons

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{a})(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) .$$

Cette dernière expression possède une très jolie représentation algébrique qui nous sera très utile par la suite. Posons

$$Df(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

et

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

La matrice $H(\mathbf{x})$ est appelée la **matrice Hessian** de f au point \mathbf{x} . Elle va jouer un rôle important quand nous ferons l'étude des valeurs extrêmes pour une fonction de plusieurs variables à la section suivante.

$Df(\mathbf{x})$ est seulement $\nabla f(\mathbf{x})$ dans le format utilisé en algèbre linéaire ; c'est-à-dire, une matrice de dimension $1 \times n$ (une ligne et n colonnes).

De même, si nous représentons le vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ sous la forme d'une matrice colonne

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} ,$$

nous pouvons alors écrire

$$p_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top H(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) .$$

14.6 Points critiques et valeurs extrêmes

Nous avons vu que pour trouver les minimums et maximums locaux d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il fallait trouver les points critiques de la fonction ; c'est-à-dire, les points p où f

n'est pas différentiable ou $f'(p) = 0$. Cette procédure est aussi valable pour les fonctions de plusieurs variables après avoir défini ce qu'est un point critique pour une fonction de plusieurs variables.

Définition 14.6.1

Une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possède un **point critique** $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ si une des deux conditions suivantes est satisfaite.

1. Au moins une des dérivées partielles de f n'existe pas à \mathbf{p} .
2. $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ (ou $Df(\mathbf{p}) = 0$ si nous utilisons la notation algébrique).

Nous avons vu que si p est un maximum (ou minimum) local d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f'(0) = 0$. La droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(p, f(p))$ est horizontale donc sa pente est nulle. Le même raisonnement nous donne le résultat suivant pour les fonctions à valeurs réelles définies sur \mathbb{R}^n .

Proposition 14.6.2

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si f a un maximum (ou minimum) local au point \mathbf{p} , alors $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$; c'est-à-dire, \mathbf{p} est un point critique.

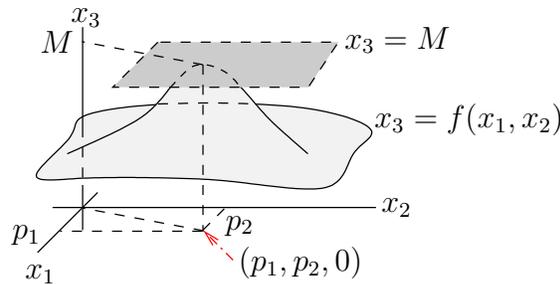


FIGURE 14.10 – La fonction f a un maximum local au point \mathbf{p} . Le plan tangent à la courbe $y = f(\mathbf{x})$ au point $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ est horizontal.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe est donné à la figure 14.10. Elle possède un maximum local au point $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. De plus, le plan tangent à la surface $x_3 = f(x_1, x_2)$ au point $(x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, f(p_1, p_2))$ est donné par $x_3 = M$ où $M = f(\mathbf{p})$ est la valeur maximale. Nous avons donc que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}) = 0$; c'est-à-dire, $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Pour compléter notre comparaison avec les fonctions d'une variable, nous généralisons le test de la dérivée seconde, proposition 5.1.10. Pour cela, il nous faut le développement de Taylor de degré 2 de la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point critique \mathbf{p} de f . Nous supposons naturellement que la fonction est suffisamment différentiable au voisinage

du point critique \mathbf{p} . Il découle du théorème 14.5.2 que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= p_2(\mathbf{x}) + r_2(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + r_2(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + r_2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $Df(\mathbf{p}) = 0$ au point critique \mathbf{p} .

Intuitivement, puisque $r_2(\mathbf{x})$ contient seulement des termes de la forme $(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\alpha$ avec $|\alpha| = 3$ alors que $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ contient seulement des termes de la forme $(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\alpha$ avec $|\alpha| = 2$, nous pouvons supposer que cette dernière expression est dominante lorsque \mathbf{x} est près de \mathbf{p} . Ainsi, à toute fin pratique, nous pouvons écrire

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

pour \mathbf{x} prêt de \mathbf{p} .

Donc, si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$, alors f possède le minimum local $f(\mathbf{p})$ au point $\mathbf{x} = \mathbf{p}$. De même, si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) < 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$, alors f possède le maximum local $f(\mathbf{p})$ au point $\mathbf{x} = \mathbf{p}$. Mais comment pouvons-nous savoir si $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ est toujours négative ou positive pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$.

Commençons par une définition.

Définition 14.6.3

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. Nous disons que A est **strictement définie positive** si $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, et A est **strictement définie négative** si $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} < 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

Nous pouvons résumer le contenu du paragraphe qui précède cette définition en disant que f possède le minimum local $f(\mathbf{p})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ si $H(\mathbf{p})$ est strictement définie positive, et f possède le maximum local $f(\mathbf{p})$ en $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ si $H(\mathbf{p})$ est strictement définie négative.

Remarque 14.6.4

Notons que l'énoncé de la définition de strictement définie positive requière $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et non pas seulement pour \mathbf{x} près de $\mathbf{0}$. En fait, cela n'est pas plus restrictif.

Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $q(\mathbf{x}) > 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et $\|\mathbf{x}\| < \delta$. Soit \mathbf{y} quelconque. Choisissons $\lambda > 0$ assez petit pour avoir $\|\lambda \mathbf{y}\| = |\lambda| \|\mathbf{y}\| < \delta$. On a alors que

$$q(\mathbf{y}) = q(\lambda^{-1}(\lambda \mathbf{y})) = \lambda^{-2} \underbrace{q(\lambda \mathbf{y})}_{>0} > 0.$$

Notons que $q(\alpha \mathbf{x}) = \alpha^2 q(\mathbf{x})$ pour tout \mathbf{x} and tout α .



Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour déterminer si une matrice carré A est strictement définie positive ou négative.

Théorème 14.6.5

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. La matrice A est strictement définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives. La matrice A est strictement définie négative si et seulement si toutes ses valeurs propres sont négatives.

Il peut s'avérer difficile de trouver toutes les valeurs propres d'une matrice, en particulier si la dimension de la matrice est grande. Le critère suivante donne une condition suffisante pour déterminer si une matrice est définie positive.

Proposition 14.6.6

Soit A une matrice de dimension $n \times n$. Soit A_k la matrice formée des k premières colonnes et rangés de A . La matrice A est strictement définie positive si $\det(A_k) > 0$ pour $k = 1, 2, \dots, n$.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer une proposition semblable à la proposition précédente pour le cas d'une matrice strictement définie négative.

Nous concluons de la proposition précédente qu'un matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ est définie positive si $a_{1,1} > 0$ et $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} > 0$. Dans le cas où la matrice A est la matrice Hessian

$$H(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment différentiable ayant un point critique en $\mathbf{x} = \mathbf{p}$, nous pouvons conclure que $H(\mathbf{p})$ est strictement définie positive si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{p}) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{p}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{p}) \right)^2 > 0.$$

Dans ce cas, la fonction f possède un minimum local au point $\mathbf{x} = \mathbf{p}$.

En raisonnant avec la matrice Hessian $H(\mathbf{a})$, nous pouvons en fait obtenir plus d'information sur le comportement de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point critique \mathbf{a} de f .

Proposition 14.6.7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est trois fois continûment différentiable et \mathbf{p} un point critique de f .

1. Si $\det(H(\mathbf{p})) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{p}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{p}) \right)^2 < 0$, alors f a un col au point

$(x, y) = \mathbf{p}$ (figure 14.11).

2. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{p}) > 0$ et $\det(H(\mathbf{p})) > 0$, alors f a un minimum local au point $(x, y) = \mathbf{p}$.
3. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{p}) < 0$ et $\det(H(\mathbf{p})) > 0$, alors f a un maximum local au point $(x, y) = \mathbf{p}$.
4. Si $\det(H(\mathbf{p})) = 0$, alors nous ne pouvons rien conclure (figure 14.11).

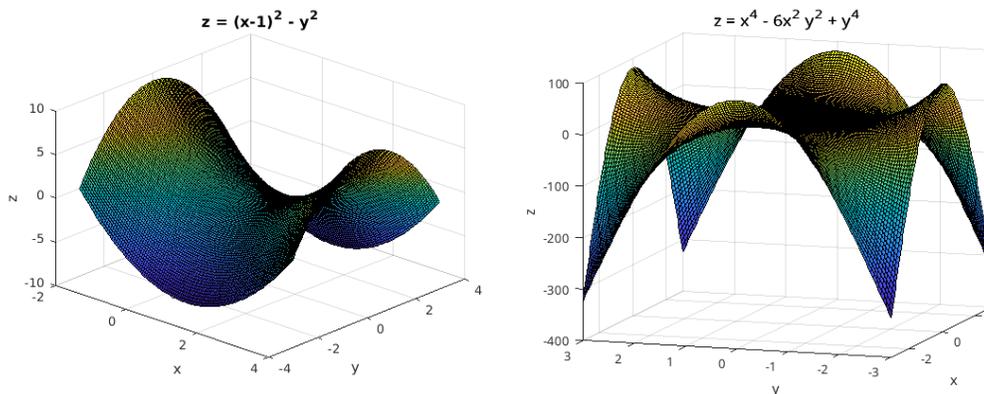


FIGURE 14.11 – À gauche : un col prédit par la première condition de la Proposition 14.6.7. À droite : un col que nous ne pouvons pas prédire. C'est une situation possible lorsque la quatrième condition de la Proposition 14.6.7 est satisfaite.

Exemple 14.6.8

Soit $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$. Cherchons les points critiques de cette fonction et, pour chacun d'eux, déterminons s'il représente un maximum local, un minimum local, un col, ou aucun des cas précédents.

Puisque la dérivée de la fonction f existe en tout point, les points critiques sont les racines de $\nabla f(x, y) = (0, 0)$; c'est-à-dire,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6y = 0 \quad (14.6.1)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow -6x + 24y^2 = 0. \quad (14.6.2)$$

Nous obtenons $y = x^2/2$ de (14.6.1). Si nous substituons cette expression pour y dans (14.6.2), nous obtenons $-6x + 6x^4 = 6(x^3 - 1)x = 0$ qui nous donne $x = 0$ ou 1 . Il y a deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 1/2)$.

Pour déterminer si un point critique est associé à un maximum local, un minimum local ou un col, nous évaluons la matrice Hessian à ce point.

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$$

Puisque $\det H(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = -36 < 0$, il y a un col au point $(0, 0)$.

Puisque $\det H(1, 1/2) = \det \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix} = 108 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1/2) = 6 > 0$, il y a un minimum local au point $(1, 1/2)$. 

14.7 Multiplicateurs de Lagrange

À la Section 5.2, nous avons vu comment trouver le maximum et minimum (s'ils existent) d'une fonction $f(x, y)$ sous une contrainte $g(x, y) = 0$. Par exemple, trouvez les points de l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 9$ qui sont les plus loin du point $(0, 1)$. Cela revient à demander de trouver les points (x, y) qui donnent la valeur maximale de $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$, le carré de la distance entre les points (x, y) et $(0, 1)$, tout en satisfaisant $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9 = 0$.

La technique présentée à la Section 5.2 serait d'exprimer y en fonction de x (ou l'inverse) à partir de $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ et de substituer cette expression pour y dans $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ pour obtenir une fonction d'une variable en x pour laquelle nous pouvons trouver les points où elle atteint son maximum absolu. Cette technique est valable dans le cas d'une fonction f de deux variables puisque le problème peut être réduit à l'étude d'une fonction d'une variable après la substitution. Si f est une fonction de plus de deux variables, la fonction obtenue après substitution aura toujours plus d'une variable. Le problème de trouver le maximum ou minimum absolu demeure difficile.

Considérons le problème de trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sous la contrainte que $g(\mathbf{x}) = 0$ où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

L'équation $g(\mathbf{x}) = 0$ représente une surface S dans \mathbb{R}^n . Nous assumerons que f et g sont différentiables et que $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{x} \in S$. Comme nous avons vu à la Section 14.4.1, cela implique que le plan tangent à la surface S est bien défini en tout point de S .

Supposons que la fonction f ait son maximum absolu (et donc local) au point \mathbf{a} de la surface S . Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un courbe sur S qui passe par \mathbf{a} ; c'est-à-dire, $g(\phi(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\phi(0) = \mathbf{a}$. La fonction $g = f \circ \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a donc un maximum local en $t = 0$. Donc 0 est un point critique de g . Il découle de la proposition 14.1.11 que

$$0 = g'(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(\phi(0)) \frac{d}{dt} \phi_j(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \phi'(0) .$$

Comme cela est vrai pour toute courbe de S qui passe par \mathbf{a} , nous avons que $\nabla f(\mathbf{a})$ est perpendiculaire à tous les vecteurs du plan tangent à S au point \mathbf{a} . Donc $\nabla f(\mathbf{a})$ est perpendiculaire au plan tangent à S au point \mathbf{a} .

Or, nous avons vu que $\nabla g(\mathbf{a})$ est aussi perpendiculaire au plan tangent à S au point \mathbf{a} . Donc $\nabla f(\mathbf{a})$ et $\nabla g(\mathbf{a})$ sont parallèles. Nous obtenons donc

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$$

pour un nombre réel λ . Le paramètre λ est appelé le **multiplicateur de Lagrange**.

Méthode 14.7.1 (Méthode de Lagrange)

Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sous la contrainte que $g(\mathbf{x}) = 0$ ¹ où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il suffit de résoudre pour \mathbf{x} et λ le système

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) . \quad (14.7.1)$$

Nous trouvons ainsi les points possibles où f aura son minimum ou maximum absolu.

Remarquons que (14.7.1) est un système de n équations avec $n + 1$ inconnues : x_1, x_2, \dots, x_n et λ . Nous semblons avoir compliqué le problème initial en ajoutant la variable λ . Cependant, dans plusieurs situations, il est plus simple de résoudre (14.7.1) que d'utiliser une méthode classique de substitution. Il ne faut pas oublier qu'il n'est généralement pas facile d'isoler une des variables de $g(\mathbf{x}) = 0$.

Exemple 14.7.2

Revenons à notre exemple du début de la section. Nous allons trouver les points de l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 9$ qui sont les plus loin du point $(0, 1)$. Comme nous avons mentionné, cela revient à trouver les points (x, y) qui donnent la valeur maximale de $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ tout en satisfaisant $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9 = 0$.

L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \Rightarrow 2x = 2\lambda x \Rightarrow x(1 - \lambda) = 0 \quad (14.7.2)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \Rightarrow 2(y - 1) = 4\lambda y \Rightarrow y(1 - 2\lambda) = 1 . \quad (14.7.3)$$

Si $\lambda \neq 1$, (14.7.2) donne $x = 0$. L'équation $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ devient $2y^2 = 9$ et nous trouvons $y = \pm 3/\sqrt{2}$. Nous obtenons deux points : $(0, \pm 3/\sqrt{2})$.

Si $\lambda = 1$, (14.7.3) donne $y = -1$. L'équation $x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ devient $x^2 = 7$ et nous trouvons $x = \pm\sqrt{7}$. Nous obtenons deux autres points : $(\pm\sqrt{7}, -1)$.

1. Nous supposons que l'ensemble $\{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$ est fermé et borné.

Puisque l'ellipse S est un ensemble borné et fermé de \mathbb{R}^2 et que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, nous pouvons conclure du Théorème 13.4.1, Théorème des valeurs extrêmes, que f atteint sa valeur maximale (et minimale) en au moins un point de l'ellipse. Puisque le maximum absolu est aussi un maximum local, il faut donc que ce maximum absolu soit atteint à au moins un des quatre points que nous avons trouvé.

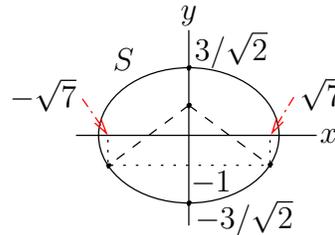
Or

$$f(0, 3/\sqrt{2}) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \approx 1.25736 \quad , \quad f(0, -3/\sqrt{2}) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \approx 9.74264 \quad ,$$

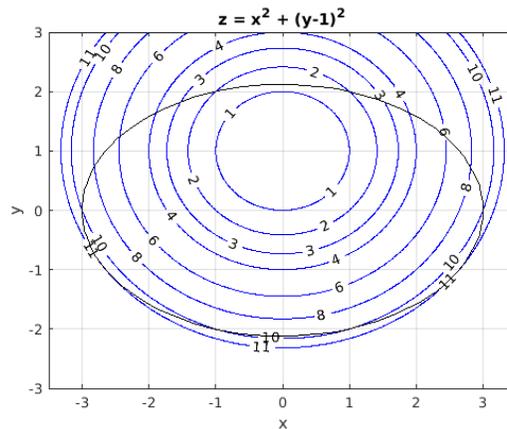
$$f(\sqrt{7}, -1) = (\sqrt{7})^2 + (-1 - 1)^2 = 11 \quad \text{et} \quad f(-\sqrt{7}, -1) = (-\sqrt{7})^2 + (-1 - 1)^2 = 11 \quad .$$

La distance maximal est donc $\sqrt{11}$ aux points $(\pm\sqrt{7}, -1)$.

Les quatre points d'intérêt sont représentés dans le dessin de l'ellipse ci-dessous.



De plus, la figure suivante contient l'ellipse S et quelques courbes de niveau de f .



Nous pouvons bien voir que f atteint son maximum absolu aux points $(\pm\sqrt{7}, -1)$. Nous notons aussi que f a un minimum local au point $(0, -3/\sqrt{2})$ mais son minimum absolu est bien au point $(0, 3/\sqrt{2})$. 

En raisonnant comme nous venons de la faire, nous pouvons montrer que la méthode de Lagrange se généralise au cas où il y a plus d'une contrainte.

Méthode 14.7.3 (Méthode de Lagrange)

Pour trouver le maximum ou minimum absolu d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sous les contraintes que $g_i(\mathbf{x}) = 0$ pour $1 \leq i \leq m$ où $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il suffit de résoudre pour \mathbf{x} et λ_i le système

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) .$$

Nous trouvons ainsi les points possibles où f aura son minimum ou maximum absolu.

Pour la méthode précédente, nous supposons que le système d'équations algébriques $g_i(\mathbf{x}) = 0$ pour $1 \leq i \leq m$ a un ensemble de solutions non triviales. Il n'y a malheureusement pas de méthode générale pour résoudre un système d'équations algébriques de degré plus grand que un comme nous avons pour les systèmes d'équations linéaires.

14.8 Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m  

Nous aimerions bien que la définition de la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ soit très semblable à la définition de la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a une dérivée au point $c \in \mathbb{R}$, alors (4.3.2) est satisfait. C'est-à-dire,

$$\frac{|f(c+h) - f(c) - f'(c)h|}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 .$$

Donc $f'(c)$ est le nombre A tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - Ah|}{|h|} = 0 . \quad (14.8.1)$$

C'est cette dernière formulation de la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point c que nous généraliserons aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nous devons remplacer

1. $c \in \mathbb{R}$ par $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$,
2. $h \rightarrow 0$ dans \mathbb{R} par $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ dans \mathbb{R}^n et
3. $|f(c+h) - f(c) - Ah|$ par $\|f(\mathbf{c} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{h}\|$ où A est une matrice de dimension $m \times n$.

Le produit Ah dans l'expression (14.8.1) est remplacé par le produit de la matrice A de dimension $m \times n$ avec le vecteur \mathbf{h} de dimension $n \times 1$. Nous avons que $A\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ comme il se doit car $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et donc $f(\mathbf{c} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{c}) \in \mathbb{R}^m$. Naturellement, la valeur absolue dans \mathbb{R} est remplacée par la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m .

Nous obtenons donc la définition suivante.

Définition 14.8.1

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. S'il existe une matrice A de dimension $m \times n$ telle que

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} = 0, \quad (14.8.2)$$

nous disons que f est **différentiable au point \mathbf{c}** et nous écrivons $Df(\mathbf{c}) = A$.

Si (14.8.2) est satisfait, alors $f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) - A\mathbf{y}$ converge vers $\mathbf{0}$ plus rapidement que \mathbf{y} lorsque \mathbf{y} converge vers $\mathbf{0}$. Donc, pour \mathbf{y} près de $\mathbf{0}$, nous avons

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{y}) \approx f(\mathbf{c}) + A\mathbf{y}.$$

En d'autres mots, $f(\mathbf{c}) + A\mathbf{y}$ est **l'approximation linéaire** de $f(\mathbf{c} + \mathbf{y})$ pour \mathbf{y} près de $\mathbf{0}$. Si nous posons $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{y}$, nous pouvons reformuler l'expression précédente pour obtenir

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{c}) + A(\mathbf{x} - \mathbf{c})$$

pour \mathbf{x} près de \mathbf{c} .

Il est très rare que nous ayons à calculer la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ à partir de la définition. Nous utilisons le résultat suivant pour calculer la dérivée.

Théorème 14.8.2

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de \mathbf{c} et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si f est différentiable au point \mathbf{c} alors les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c})$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ existent. De plus,

$$Df(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant est le plus près d'un énoncé dans le sens inverse du théorème précédent que nous puissions avoir. C'est ce résultat qui est très utile pour calculer les dérivées de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

Proposition 14.8.3

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de \mathbf{c} et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c})$ pour

$1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ existent et sont continues sur V , alors f est différentiable pour tout $\mathbf{x} \in V$ et

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Exemple 14.8.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définie par $f_1(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ et $f_2(x, y) = \sin(\pi(x^2 + y^2))$.

Calculons la dérivée de f au point $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) &= \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) &= \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) &= 2x\pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) & \text{et} & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 2y\pi \cos(\pi(x^2 + y^2)), \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{c}) &= \begin{pmatrix} \left. \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(1,2)} & \left. \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \right|_{(x,y)=(1,2)} \\ \left. 2x\pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) \right|_{(x,y)=(1,2)} & \left. 2y\pi \cos(\pi(x^2 + y^2)) \right|_{(x,y)=(1,2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2/25 & -4/25 \\ -2\pi & -4\pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Remarque 14.8.5

1. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($m = 1$), alors

$$Df(\mathbf{c}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{c}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c}) \right) = \nabla f(\mathbf{c})$$

où le gradient est exprimé dans sa forme algébrique. La définition de dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est donc un prolongement de la définition du gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($n = 1$), alors est la représentation paramétrique d'une courbe dans \mathbb{R}^m . De plus, le vecteur \mathbf{c} est remplacé par un nombre réel que nous pouvons simplement appeler c . Ainsi,

$$D\phi(c) = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(c) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(c) \\ \vdots \\ \frac{d\phi_m}{dt}(c) \end{pmatrix} = \phi'(c)$$

où $\phi'(c) \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur parallèle à la tangente à la courbe

$$\Gamma = \{\phi(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

au point $\phi(c)$ comme nous avons vu lors de l'étude de la représentation paramétrique des courbes.



Définition 14.8.6

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nous disons que f est de classe C^k si, pour tout i , les dérivées partielles d'ordre k de f_i existent et sont continues en tout point du domaine de f . Nous écrivons $f \in C^k(U)$

14.9 Exercices

14.9.1 Dérivées partielles

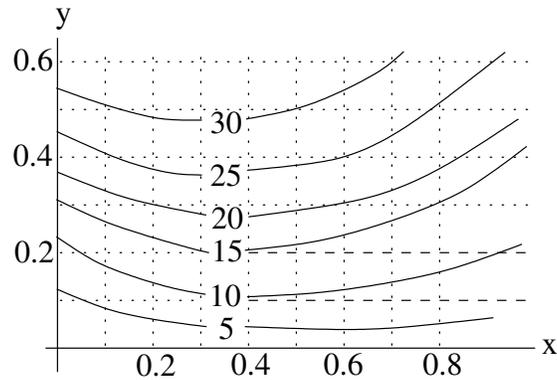
Question 14.1

Évaluez toutes les dérivées premières des fonction suivantes.

- a) $f(x, y, z, t) = xy^2z^3t^4$ b) $f(x, y) = \frac{2x + y}{x - y}$ c) $h(x, y) = f(x)g(y)$
 d) $h(x, y) = f(xy)$ e) $h(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

Question 14.2

La figure suivante donne quelques courbes de niveau de la fonction $f(x, y)$. Utilisez ces courbes de niveau pour estimer $\frac{\partial f(0.6, 0.4)}{\partial x}$ et $\frac{\partial f(0.2, 0.3)}{\partial y}$.

**Question 14.3**

Soit la fonction $f(x, y, z) = \frac{1}{1 + xyz}$. Si $x = \cos(\theta + \phi)$, $y = \sin(\theta + \phi)$ et $z = \cos(\phi)$, évaluez $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, \phi)$ au point $(\theta, \phi) = (\pi, 0)$.

Question 14.4 🔧

Si $w = f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^3$ où $x = s + t^2$, $y = st$ et $z = s^2 + t$, calculez $\frac{\partial w}{\partial s}$ et $\frac{\partial w}{\partial t}$ au point $(s, t) = (1, 2)$.

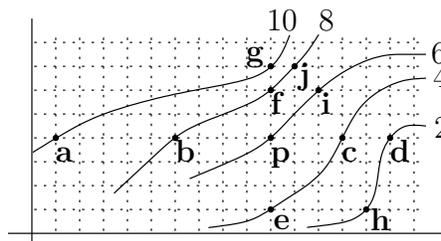
Question 14.5 🔧

Calculez les dérivées partielles f_{xyy} et f_{xyz} de la fonction

$$f(x, y, z) = 2x^2y^3z^2 + 3x^3y^2z^4.$$

Question 14.6 🔧

La figure suivante donne quelques courbes de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



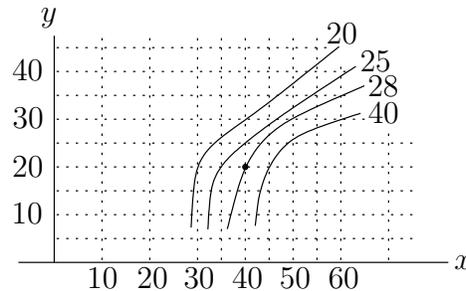
Déterminez le signe (possible) des dérivées partielles suivantes.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})$ | b) $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})$ | c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p})$ |
| d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{p})$ | e) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$ | |

14.9.2 Plan tangent à une surface

Question 14.7

La figure suivante donne quelques courbes de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



- a) Utilisez cette information pour obtenir une équation approximative de l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(x, y, z) = (40, 20, 28)$.
- b) Utilisez le résultat en (a) pour estimer $f(43, 24)$.

Question 14.8

Pour chacune des surfaces données ci-dessous, trouvez l'équation du plan tangent au point donné.

- a) La surface $z = f(x, y) = \sin(xy)$ au point $(1, 0, 0)$.
- b) La surface $z = f(x, y) = 1 - \cos(x) + \sin(y)$ au point $(0, \pi, 0)$.

Question 14.9

Soit S une surface donnée par la représentation paramétrique $x = u - v$, $y = u + v$ et $z = u^2$. Trouvez l'équation du plan tangent à cette surface au point $(0, 2, 1)$.

14.9.3 Dérivées selon un direction donnée

Question 14.10

Pour chacune des fonctions ci-dessous, calculez la dérivée au point donné et dans la direction données.

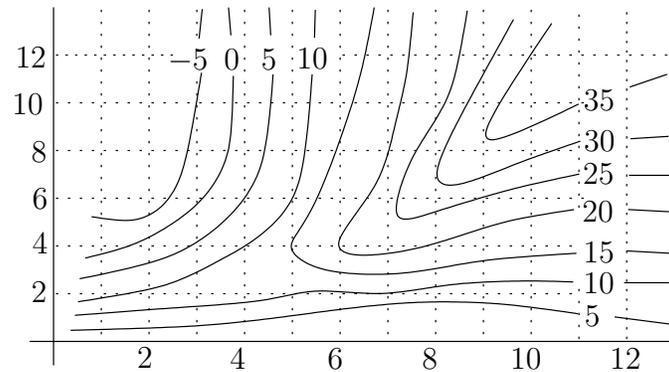
- a) $f(x, y) = x^2y + 4y^2$ au point $(2, 1)$ et dans la direction du vecteur $(1, \sqrt{3})$.
- b) $f(x, y, z) = xyz + \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ au point $(1, 1, 2)$ et dans la direction du vecteur $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
- c) $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{xyz}$ au point $(1, 0, 3)$ et dans la direction du vecteur $(2, 1, -2)$.

Question 14.11

Soit $f(x, y) = xy$, utilisez la définition (avec la limite) de la dérivée selon une direction pour calculer la dérivée de $f(x, y)$ au point $(2, -1)$ dans la direction $\mathbf{u} = (1, -2)$.

Question 14.12

La figure ci-dessous contient quelques courbes de niveaux d'une fonction $f(x, y)$. Utilisez ces courbes de niveau pour estimer la dérivée de f dans la direction $\mathbf{u} = (-1, 1)$ au point $(5, 4)$.



14.9.4 Propriétés du gradient

Question 14.13 🔧

Les courbes $y = x^3$ et $x^2 + 3y^2 = 4$ se coupent aux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Utilisez le gradient pour déterminer si elles se coupent orthogonalement.

Question 14.14 🔧

Trouvez l'équation du plan tangent à la surface $z^2 + x^2 - 4xy + y^2 = 2$ au point $(1, 1, 2)$.

Question 14.15 🔧

Pour chacune des fonctions $f(x, y)$ suivantes, trouvez l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) donné, et déterminez dans quelle direction la fonction f augmente le plus rapidement à partir de (x_0, y_0) .

- $f(x, y) = x^2y^4$ et $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$.
- $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 3$ et $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 3)$.
- $f(x, y) = \sqrt{4 + 4x^2 + 2y^2}$ et $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 4)$.

Question 14.16 🔧

Quels sont les points (x_0, y_0, z_0) de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ dont le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) est parallèle au plan $3x - y + 3z = 1$?

Question 14.17 🔧

Si la dérivée de $f(x, y)$ au point $(1, 2)$ dans la direction $(1, 1)$ est 4 et la dérivée de $f(x, y)$ au point $(1, 2)$ dans la direction $(-1, 1)$ est 3, calculez le gradient $\nabla f(1, 2)$. De plus, si $f(1, 2) = 5$, donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(1, 2, 5)$.

14.9.5 Approximation locale des fonctions

Question 14.18

Utilisez l'approximation linéaire de la fonction f au point suggéré pour obtenir l'estimation demandée.

- $f(x, y) = 2x^2y^2 + 3xy + x$ au point $(1, 1)$ pour estimer $f(0.9, 1.1)$.
- $f(x, y) = \ln\left(\frac{2x^2 + 5y^2}{7}\right)$ au point $(1, 1)$ pour estimer $f(0.98, 1.01)$.

- c) $f(x, y) = (x^2 - y^5)^{4/3}$ au point $(3, 1)$ pour estimer $f(3.2, 1.2)$.
 d) $f(x, y) = 1 - \frac{2x}{y} + 3y - 4xy^2 + e^{3x}$ au point $(0, 1)$ pour estimer $f(-0.1, 0.9)$.

14.9.6 Points critiques et valeurs extrêmes

Question 14.19

Soit $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$. Les points $(0, 1)$ et $(1/3, 1/3)$ sont des points critiques de f . Pour chacun de ces points, déterminez s'il est un maximum local, un minimum local, un col ou autre chose.

Question 14.20

Pour chacune des fonctions suivantes, trouvez les points critiques de cette fonction et, pour chacun des points critiques, déterminez s'il représente un maximum local, un minimum local, un col, ou aucun des cas précédents.

- | | |
|--|--|
| a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ | b) $h(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy + 290$ |
| c) $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$ | d) $h(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + \frac{1}{8}$ |
| e) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ | |

Question 14.21

Est-ce que $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ a un maximum absolu sur la région S bornée par l'axe des x , l'axe des y et la droite $y = 6 - x$. Si oui, trouvez ce maximum absolu.

14.9.7 Multiplicateurs de Lagrange

Question 14.22

L'aire d'une ellipse de demi axes a et b est donnée par $A = \pi ab$. Si $a + b = 2$, pour quelles valeurs de a et b avons-nous l'aire maximale?

Question 14.23

Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouvez le minimum et maximum absolu de la fonction sous la contrainte donnée.

- a) $f(x, y) = xy$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 2$.
 b) $f(x, y) = 9y^2 + 4x^2$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
 c) $f(x, y, z) = x + 3y - z$ avec la contrainte $x^2 + 4y^2 + z^2 = 17$.

Question 14.24

Trouvez le volume maximal de la boîte ayant des côtés parallèles aux axes de coordonnées qui est contenu à l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Question 14.25

La base d'un aquarium de volume V est faite de marbre et les côtés sont fait de verre. Le coût par unité de surface du marbre est cinq fois celui du verre. Trouvez les dimensions de l'aquarium qui minimisent le coût de l'aquarium

Question 14.26 🔧

Trouvez la valeur maximale de la fonction $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ sous la contrainte que $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Question 14.27 🔧

Pour chacune des fonctions suivante, déterminez si elle possède un maximum et minimum absolu sur le domaine D donnée. Si oui, trouvez ce maximum et minimum absolu.

a) $f(x, y) = x^2 + y + 2y^2 + 1$ et $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

b) $f(x, y) = y + x^2$ et $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Question 14.28 🔧

Est-ce que $f(x, y) = x^2 + y + 2y^2 + 1$ a un maximum absolu sur le disque $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$? Si oui, trouvez ce maximum absolu.

14.9.8 Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m **Question 14.29** 👁 🌲

Pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ci-dessous,

I: Calculez la dérivée de la fonction f au point $(-1, 1)$.

II: Donnez l'approximation linéaire de f autour du point $(-1, 1)$

III: Comparez la valeur de f au point $(-0.9, 1.05)$ avec la valeur donnée par l'approximation linéaire au point $(-0.9, 1.05)$.

a) $f(x, y) = \begin{pmatrix} x/y \\ 2xy \end{pmatrix}$

b) $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y + 2xe^y \\ \frac{x}{y} - 3ye^{-x} \end{pmatrix}$



Dans ce chapitre, nous généralisons la notion d'intégration d'une fonction définie sur un intervalle à l'intégration d'une fonction à valeurs réels définie sur un domaine de \mathbb{R}^n où $n \geq 2$. Grâce au Théorème de Fubini, nous pourrons réduire le calcul d'intégrales de fonctions de plusieurs variables au calcul d'intégrales emboîtées de fonctions définies sur des intervalles. Nous terminons le chapitre avec une section sur la méthode de substitution pour les intégrales de fonctions de plusieurs variables. Chose surprenante, le déterminant va jouer un rôle important dans la méthode de substitution.

Ce chapitre exige de bonnes capacités à visualiser les objets dans l'espace.

15.1 Définition de l'Intégrale

La définition de l'intégrale double d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est un rectangle est très semblable à celle de l'intégrale définie d'une fonction d'une variable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Au lieu de partager un intervalle en sous-intervalles, nous partageons un rectangle en sous-rectangles.

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue (sauf possiblement à quelques points) et bornée sur le rectangle

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\} .$$

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_p = b$ une partition de l'intervalle $[a, b]$ et $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_q = d$ une partition de l'intervalle $[c, d]$. Pour $0 \leq i < p$ et $0 \leq j < q$, nous définissons les rectangles

$$A_{i,j} = \{(x, y) : x_i \leq x < x_{i+1} \text{ et } y_j \leq y < y_{j+1}\} .$$

L'ensemble des rectangles $A_{i,j}$ forme une **partition** \mathcal{P} de D en sous-rectangles (figure 15.1).

L'aire d'un rectangle $A_{i,j}$ est $\Delta A_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$ où $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. Nous définissons une mesure de la grosseur de la partition \mathcal{P} par

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{\Delta x_i + \Delta y_j : 0 \leq i < p \text{ et } 0 \leq j < q\} .$$

Pour chaque rectangle $A_{i,j}$, nous choisissons (x_i^*, y_j^*) dans ce rectangle. La somme

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{A_{i,j} \in \mathcal{P}} f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{i,j} = \sum_{\substack{0 \leq i < p \\ 0 \leq j < q}} f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j$$

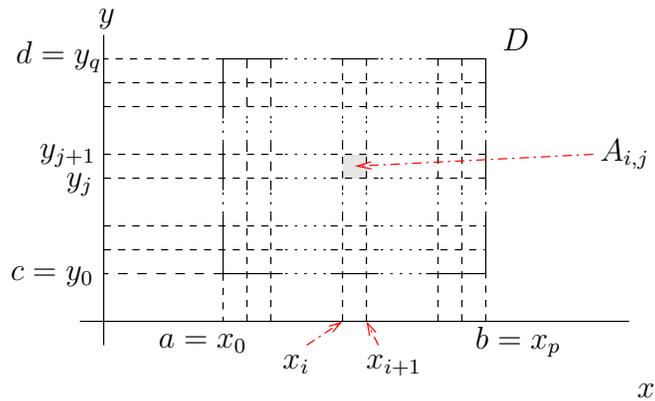


FIGURE 15.1 – Partition d'un rectangle D en $p \times q$ sous-rectangle $A_{i,j}$ pour $i = 0, 1, \dots, p-1$ et $j = 0, 1, \dots, q-1$.

est une **somme de Riemann** pour la partition \mathcal{P} . Une même partition a un nombre infini de sommes de Riemann selon le choix des points $(x_i^*, y_j^*) \in A_{i,j}$ pour $0 \leq i < p$ et $0 \leq j < q$.

Définition 15.1.1

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue presque partout¹ et bornée sur le rectangle

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\} .$$

L'**intégrale double** de f sur D , dénotés $\iint_D f(x, y) \, dA$, est le nombre I tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ pour lequel

$$|I - S_{\mathcal{P}}| < \epsilon$$

quelle que soit la partition \mathcal{P} avec $\|\mathcal{P}\| < \delta$ et le choix de points (x_i^*, y_j^*) utilisés pour la somme de Riemann $S_{\mathcal{P}}$. Le rectangle D est appelé le **domaine d'intégration**. La fonction f est appelée **l'intégrande**.

Comme à la Section 6.3.5, nous pourrions donner une définition plus générale de l'intégrale double.

Il découle de la définition de l'intégrale double que nous pouvons estimer la valeur de l'intégrale $\iint_D f(x, y) \, dA$ en choisissant des sommes de Riemann pour des partitions \mathcal{P}_n telles que $\|\mathcal{P}_n\|$ approche 0 lorsque n augmente. Nous avons

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\mathcal{P}_n} . \quad (15.1.1)$$

1. Dans les livres d'analyse, ils parlent d'un ensemble de mesure zéro. Pour nous, ce sont des ensembles qui contiennent seulement des points ou des courbes isolées, dont l'aire est nul.

Si $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in D$, alors $f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j$ est le volume du solide définie par

$$T_{i,j} = \{(x, y, z) : (x, y) \in A_{i,j} \text{ et } 0 \leq z \leq f(x^*, y^*)\}$$

(figure 15.2). Nous avons alors que $\int_D f(x, y) dA$ est le volume du solide définie par

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\} ,$$

le solide dont la base est le rectangle D , les cotés sont les plans verticaux $x = a$, $x = b$, $y = c$ et $y = d$, et qui est sous la surface $z = f(x, y)$.

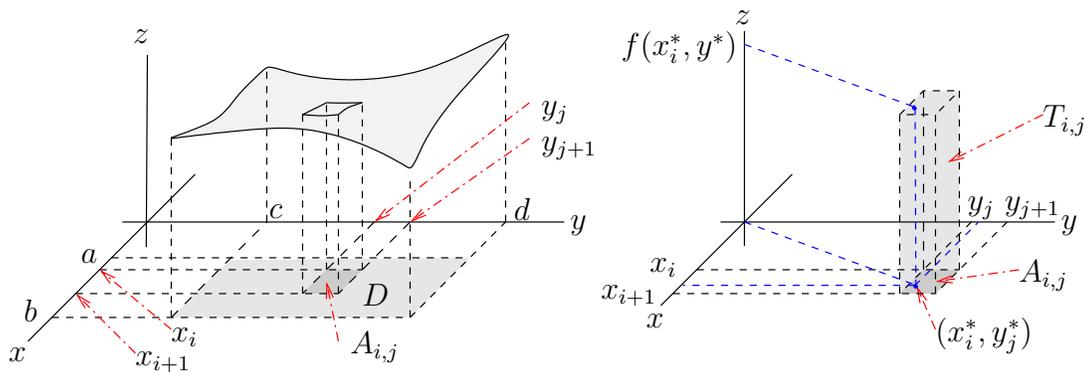


FIGURE 15.2 – Illustration de ce que représente un terme de la somme de Riemann dans la définition de l'intégrale double.

Définition 15.1.2

Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue presque partout et bornée dont le domaine R est un ensemble borné qui n'est pas un rectangle, nous choisissons un rectangle D qui contient R et nous posons

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in R \\ 0 & \text{si } (x, y) \in D \setminus R \end{cases} .$$

L'intégrale de f sur R est alors définie par

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_D g(x, y) dA .$$

Nous pourrions de la même façon définir l'intégrale triple d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ où nous utiliserions des boîtes dans \mathbb{R}^3 au lieu des rectangles de \mathbb{R}^2 pour définir l'intégrale. Nous utilisons la notation $\iiint_D f(\mathbf{x}) dV$ pour désigner l'**intégrale triple**. Toutes les propriétés que nous allons énoncer pour l'intégrale double sont aussi vrais pour l'intégrale triple.

Comme la définition de l'intégrale double ressemble énormément à celle de l'intégrale d'une fonction d'une variable, il n'est pas surprenant que l'intégrale double possède des propriétés semblables à celle de l'intégrale d'une fonction d'une variable.

Proposition 15.1.3

1. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues presque partout et bornées sur D . Alors

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dA = \alpha \iint_D f(x, y) \, dA + \beta \iint_D g(x, y) \, dA$$

quels que soient α et β dans \mathbb{R} .

2. Si $D = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^2$ où $D_1 \cap D_2$ est un ensemble négligeable de points², et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue presque partout et bornée, alors

$$\iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA .$$

15.2 Théorème de Fubini

Il n'est pas toujours facile d'évaluer les intégrales doubles lorsque le domaine d'intégration n'est pas un rectangle. Le théorème suivant va nous permettre de calculer les intégrales doubles sur des domaines D «simple» à l'aide des techniques d'intégration de fonctions d'une variable que nous avons étudiées précédemment.

Théorème 15.2.1 (Théorème de Fubini)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue presque partout et bornée sur le rectangle

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\} .$$

Nous avons que

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy .$$

En d'autres mots, il y a des choix pour évaluer l'intégrale de f sur un rectangle D ,

1. Nous évaluons l'intégrale $\int_c^d f(x, y) \, dy$ en assumant que x est constant pour obtenir une fonction $g(x)$ et par la suite nous évaluons l'intégrale $\int_a^b g(x) \, dx$.

2. Un ensemble négligeable est ce que nous avons caractérisé précédemment comme étant un ensemble de mesure zéro, soit un ensemble qui contient seulement des points ou des courbes isolées,

2. Nous évaluons l'intégrale $\int_a^b f(x, y) dx$ en assumant que y est constant pour obtenir une fonction de $h(y)$ et par la suite nous évaluons l'intégrale $\int_c^d h(y) dy$.

Soit

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ et } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} ,$$

le domaine d'intégration qui est représenté dans le dessin à gauche dans la figure 15.3. Il découle du théorème de Fubini et de la définition d'une intégrale double sur un domaine qui n'est pas un rectangle que

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx .$$

De même, soit

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d \text{ et } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} ,$$

le domaine d'intégration qui est représenté dans le dessin à droite dans la figure 15.3. Nous avons que

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy .$$

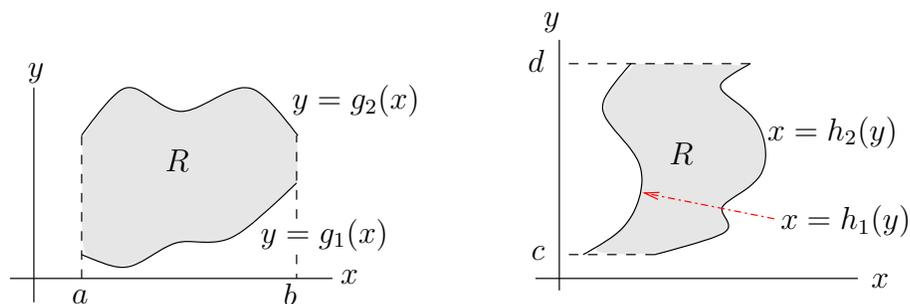


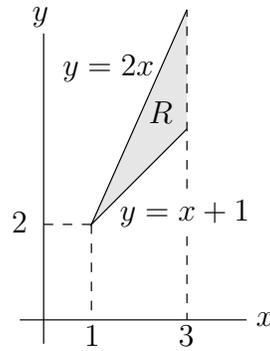
FIGURE 15.3 – Intégrale double pour des domaines qui se prête bien au théorème de Fubini.

Exemple 15.2.2

Évaluons l'intégrale double $\iint_R (x - 2y) dA$ où R est le domaine définie par

$$R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3 \text{ et } 1 + x \leq y \leq 2x\} .$$

Le dessin du domaine R est donné ci-dessous.



Nous avons

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 2y) \, dA &= \int_1^3 \int_{x+1}^{2x} (x - 2y) \, dy \, dx = \int_1^3 (xy - y^2) \Big|_{y=x+1}^{y=2x} \, dx \\ &= \int_1^3 \left((2x^2 - 4x^2) - (x(x+1) - (x-1)^2) \right) \, dx \\ &= \int_1^3 (-2x^2 - 3x + 1) \, dx = \left(-\frac{2x^3}{3} - \frac{3x}{2} + x \right) \Big|_1^3 = -\frac{82}{3}. \end{aligned}$$



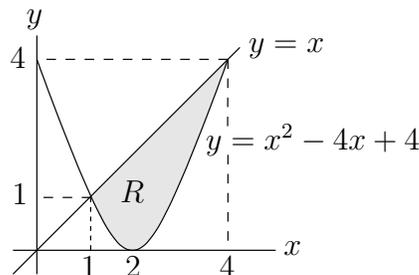
Exemple 15.2.3

Évaluons l'intégrale double $\iint_R 3x \, dA$ où R est le domaine bornée par $y = x$ et $y = x^2 - 4x + 4$.

La valeur de x pour les points d'intersection de ces deux courbes est donné par

$$x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 4.$$

Il y a deux points d'intersection, $(1, 1)$ et $(4, 4)$. Le dessin du domaine R est donné ci-dessous.



Nous déduisons de la forme du domaine qu'il est préférable d'intégrer par rapport à y en premier et par rapport à x par la suite. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_R 3x \, dA &= \int_1^4 \int_{x^2-4x+4}^x 3x \, dy \, dx = \int_1^4 (3xy) \Big|_{y=x^2-4x+4}^x \, dx \\ &= \int_1^4 (3x^2 - 3x(x^2 - 4x + 4)) \, dx = \int_1^4 (-3x^3 + 15x^2 - 12x) \, dx \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{3}{4}x^4 + 5x^3 - 6x^2 \right) \Big|_1^4 = \frac{135}{4}.$$



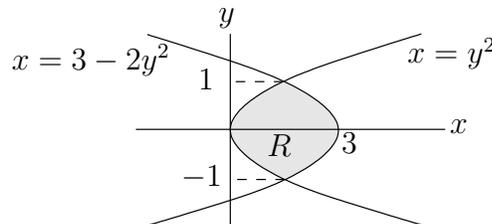
Exemple 15.2.4

Évaluons l'intégrale double $\iint_R (y^2 + x) \, dA$ où R est le domaine bornée par les paraboles $x = y^2$ et $x = 3 - 2y^2$.

La valeur de x pour les points d'intersection de ces deux paraboles est donné par

$$y^2 = 3 - 2y^2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Il y a deux points d'intersection, $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Le dessin du domaine R est donné ci-dessous.



Nous déduisons de la forme du domaine qu'il est préférable d'intégrer par rapport à x en premier et par rapport à y par la suite. Ainsi,

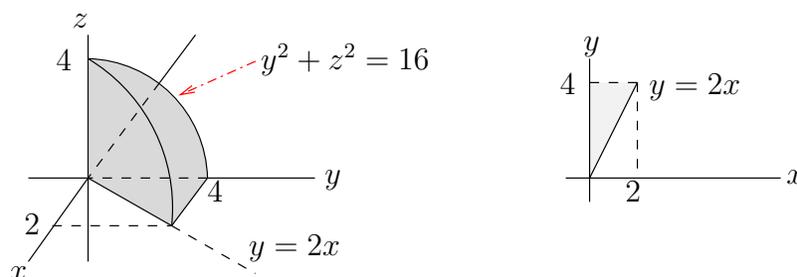
$$\begin{aligned} \iint_R (y^2 + x) \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{3-2y^2} (y^2 - x) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(xy^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{x=y^2}^{3-2y^2} \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\left(y^2(3-2y^2) + \frac{1}{2}(3-2y^2)^2 \right) - \left(y^4 + \frac{1}{2}y^4 \right) \right) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{3}{2}y^4 - 3y^2 + \frac{9}{2} \right) \, dy = \left(-\frac{3}{10}y^5 - y^3 + \frac{9}{2}y \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{32}{5}. \end{aligned}$$



Exemple 15.2.5

Calculons le volume du solide borné par le cylindre $y^2 + z^2 = 16$ et les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $y = 2x$. Nous supposons que $x, y, z \geq 0$.

Traçons un dessin du solide en question pour justifier le choix de notre intégrale. Le dessin du solide est donné ci-dessous.



Le volume de ce solide est donc

$$V = \int_0^2 \int_{2x}^4 \sqrt{16 - y^2} \, dy \, dx .$$

Il serait possible de calculer cette intégrale à l'aide de la substitution trigonométrique $y = 4 \sin(\theta)$ mais nous pouvons éviter ce trouble en changeant l'ordre d'intégration.

$$V = \int_0^4 \int_0^{y/2} \sqrt{16 - y^2} \, dx \, dy = \int_0^4 \left(x \sqrt{16 - y^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=y/2} dy = \int_0^4 \frac{y}{2} \sqrt{16 - y^2} \, dy$$

Pour calculer cette intégrale, nous utilisons la substitution $u = 16 - y^2$. Donc $du = -2y \, dy$, $u = 16$ lorsque $y = 0$ et $u = 0$ lorsque $y = 4$. Ainsi,

$$V = -\frac{1}{4} \int_{16}^0 u^{1/2} \, du = -\frac{1}{6} u^{3/2} \Big|_{16}^0 = \frac{1}{6} (16)^{3/2} = \frac{32}{3} .$$



15.3 Substitution

Nous avons vu au Théorème 6.4.8 la règle de substitution suivante. Si g est une fonction différentiable (croissante ou décroissante) et f est une fonction intégrable sur l'image de $[a, b]$ par g , alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy . \quad (15.3.1)$$

Nous aimerions pouvoir généraliser cette méthode aux fonctions de plusieurs variables. Cependant, la formule précédente utilise le fait qu'il y a une direction croissante évidente sur la l'axe des x . Ce n'est pas le cas si nous nous trouvons dans le plan ou dans l'espace. l'intégrale de Riemann que nous avons introduite au Chapitre 6 et que nous utilisons dans la formule (15.3.1) est orientée (e.g. $\int_a^b = -\int_b^a$) alors que l'intégrale de Riemann que nous avons introduite dans ce chapitre ne l'est pas.

Dans la formule ci-dessus, si $g'(x) < 0$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors $g(a) > g(b)$ et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))|g'(x)| \, dx &= \int_a^b f(g(x))(-g'(x)) \, dx = -\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx \\ &= -\int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy = \int_{g(b)}^{g(a)} f(y) \, dy , \end{aligned}$$

où la borne inférieure est plus petite que la borne supérieure pour cette dernière intégrale. Si nous utilisons la définition de l'intégrale que nous avons introduite au début du chapitre, nous pouvons écrire

$$\int_{[a,b]} f(g(x))|g'(x)| \, dx = \int_{g([a,b])} f(y) \, dy , \quad (15.3.2)$$

C'est donc la formule (15.3.2) que nous allons généraliser. Notons que

$$g([a, b]) \equiv \{g(x) : x \in [a, b]\}$$

est l'image de l'intervalle $[a, b]$ par la fonction g .

Théorème 15.3.1

Supposons que $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit une fonction de classe C^1 et U est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 tel que $Dg(\mathbf{u})$ est une matrice inversible pour tout $\mathbf{u} \in U$. Si $V = g(U)$ et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, alors

$$\iint_U f(g(\mathbf{x})) |\det Dg(\mathbf{x})| dA = \iint_V f(\mathbf{y}) dA$$

(figure 15.4).

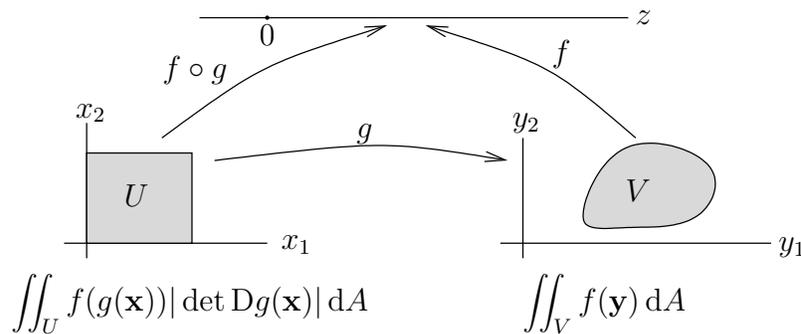


FIGURE 15.4 – Représentation schématique du changement de variable pour intégrales multiples

Si nous posons $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$, alors $y_i = g_i(x_1, x_2)$ pour $i = 1$ et 2 , et

$$Dg(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Le **Jacobian** de la fonction g , dénoté $\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}$, est définie par

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det Dg(\mathbf{x}) .$$

C'est cette dernière expression pour $\det Dg(\mathbf{x})$ que nous utiliserons le plus souvent pour représenter la règle de substitution précédente.

$$\iint_U f(g(\mathbf{x})) \left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right| dA = \iint_V f(\mathbf{y}) dA$$

La règle de substitution a naturellement une extension à \mathbb{R}^n pour $n > 2$. Par exemple, dans \mathbb{R}^3 , nous remplaçons l'intégrale double par une intégrale triple pour obtenir une formule de la forme

$$\iiint_U f(g(\mathbf{x})) |\det Dg(\mathbf{x})| dV = \iiint_V f(\mathbf{y}) dV$$

avec

$$Dg(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

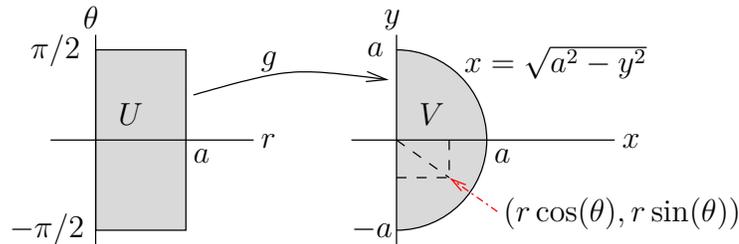
Le **Jacobian** de la fonction g est alors définie par

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \det Dg(\mathbf{x}).$$

Exemple 15.3.2

Afin d'obtenir une intégrale qui est simple à calculer, utilisons la méthode de substitution pour évaluer l'intégrale $\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$. Nous invitons le lecteur à essayer de calculer directement cette intégrale.

Il faut premièrement avoir une bonne idée du domaine d'intégration V . Le dessin du domaine d'intégration est donné ci-dessous.



Puisque V est un demi-cercle de rayon a centré à l'origine, nous utilisons le changement de coordonnées en **coordonnées polaires**. La région V est l'ensemble des points

$$(x, y) = g(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

pour $(r, \theta) \in U = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = r,$$

nous obtenons

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^a (r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))^{3/2} r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-2}^2 (r^2)^{3/2} r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-2}^2 r^4 \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left. \frac{r^5}{5} \right|_{r=0}^2 d\theta = \frac{2^5}{5} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{2^5}{5} \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{32\pi}{5}
\end{aligned}$$

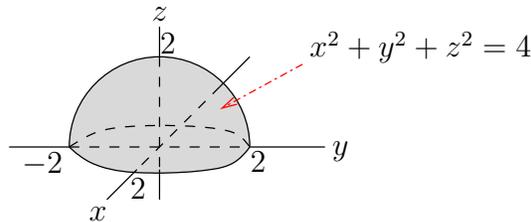


Remarque 15.3.3

À l'exemple précédent, r représente la variable x_1 dans la formule de la règle de substitution, théorème 15.3.1, θ représente x_2 , x représente y_1 et y représente y_2 . ♠

Exemple 15.3.4

Calculons la masse de la demi-sphère supérieure S de rayon 2 centrée à l'origine dont la densité est donnée par $\rho(x, y, z) = z$.



En coordonnées cartésiennes, la masse est donnée par la formule

$$M = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx .$$

Il est certainement possible de calculer cette intégrale mais nous pouvons simplifier l'intégrale à l'aide d'une substitution. Nous allons utiliser les **coordonnées cylindriques**. La demi-sphère S est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} = \sqrt{4-r^2}$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r ,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} \right) r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{2} (4-r^2) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_{r=0}^2 d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi .
\end{aligned}$$

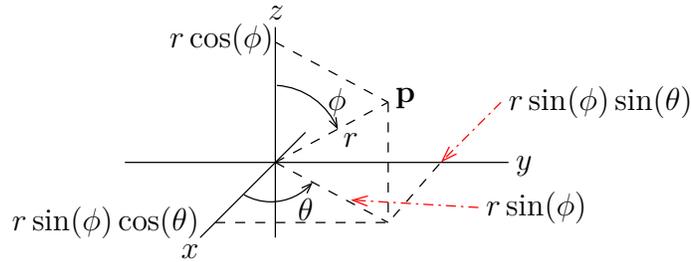


FIGURE 15.5 – Représentation en coordonnées sphériques du point $\mathbf{p} = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$ pour $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$ et $r \geq 0$.



Exemple 15.3.5

Comme à l'exemple 15.3.4, calculons la masse de la demi-sphère supérieure S de rayon 2 centrée à l'origine. Cependant, cette fois ci, la densité est donnée par $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

En coordonnées cartésiennes, la masse est donnée par la formule

$$M = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2 \, dz \, dy \, dx .$$

Nous pourrions utiliser les coordonnées cylindriques comme nous avons fait à l'exemple précédent mais la forme de la formule pour la densité suggère un autre changement de coordonnées. Nous allons utiliser les **coordonnées sphériques** (figure 15.5). La demi-sphère S est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ et $0 \leq r \leq 2$.

Puisque $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ et

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin(\phi) , \end{aligned}$$

l'intégrale pour calculer la masse devient

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r^4 \sin(\phi) \, d\phi \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(-\cos(\phi) \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} \right) r^4 \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^4 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^5}{5} \Big|_{r=0}^2 \, d\theta = \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{64\pi}{5}.$$



15.4 Exercices

15.4.1 Théorème de Fubini

Question 15.1

Évaluez les intégrales suivantes.

a) $\iint_R \sin(2x + y) \, dA$ où $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \pi/2\}$.

b) $\iint_R \frac{2+y}{3+x} \, dA$ où $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2\}$.

Question 15.2

Évaluez $\iint_R (2x+3y)^2 \, dA$ où R est la région bornée qui est délimitée par $y = x+1$, $y = -x+1$ et $y = 0$.

Question 15.3

Évaluez chacune des intégrales ci-dessous en changeant l'ordre d'intégration.

a) $\int_0^1 \int_{y^{1/3}}^1 \sqrt{x^4+1} \, dx \, dy$

b) $\int_0^{\pi^{1/4}} \int_{y^2}^{\pi^{1/2}} y \sin(x^2) \, dx \, dy$

Question 15.4

Pour chacune des intégrales ci-dessous, dessinez le domaine d'intégration D et donnez une intégrale équivalente en changeant l'ordre d'intégration.

a) $\int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_4^9 \int_{-\sqrt{x}}^{6-x} f(x, y) \, dy \, dx$

b) $\int_{-6}^{-3} \int_{-\sqrt{6-x}}^{\sqrt{6-x}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{-3}^2 \int_{-\sqrt{6-x}}^{-x} f(x, y) \, dy \, dx$

Question 15.5

Nous pourrions vérifier que le **moment par rapport à l'axe des x** d'une surface plane D de densité $\rho(x, y)$ est $M_x = \iint_D y\rho(x, y) \, dA$. De même, le **moment par rapport à l'axe des y** d'une surface plane D de densité $\rho(x, y)$ est $M_y = \iint_D x\rho(x, y) \, dA$. Le **centre de masse** est le point $\left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\right)$ où M est la masse de la surface plane.

Trouvez la masse, les moments par rapport à l'axe des x et à l'axe des y , et le centre de masse de la surface plane D bornée par l'axe des x , et les droites $y = x$ et $y = -3x + 4$. La densité de la surface est donnée par $\rho(x, y) = x$.

Question 15.6

Calculez le volume du solide dont la base est la région du plan x, y bornée par la droite $y = x$ et la parabole $x = y^2 - 2y$, et qui est bornée au-dessus par $z = x^2 + y^2$.

Question 15.7

Calculez le volume du solide S sous le parabolôide $z = x^2 + y^2$ et au dessous de la région D du plan x, y bornée par l'axe des x , l'axe des y et la droite $x + y = 1$.

Question 15.8

Calculez le volume du solide $S = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}$. Tracez un dessin du solide en question pour justifier le choix de votre intégrale.

Question 15.9

Dessinez le solide borné par les surfaces suivantes : $z = 4y^2$, $z = 4$, $x = 0$ et $x = 2$. Utilisez une intégrale pour calculer le volume de ce solide.

Question 15.10

Calculez le volume du solide borné par le cylindre $x^2 + z^2 = 9$ et les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + 2y = 2$. Nous supposons que $x, y, z \geq 0$. Tracez un dessin du solide en question pour justifier le choix de votre intégrale.

Question 15.11

Calculez le volume du solide S formé de l'intersection des cylindres $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + z^2 = 4$. Tracez un dessin du solide en question pour justifier le choix de votre intégrale.

Question 15.12

Calculez le volume du tétraèdre délimité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $2x + y + \frac{z}{3} = 1$.

Question 15.13

Calculez le volume du tétraèdre de sommets au points $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ et $(2, 2, 0)$.

Question 15.14

Évaluez l'intégrale $\iiint_S xy \, dV$ où S est le tétraèdre S délimité par les plans $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ et $3x + 3y + 2z = 6$.

Question 15.15

Évaluez l'intégrale $\iiint_S xz \, dV$ où S est le tétraèdre S dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$.

Question 15.16

Récrivez l'intégrale $\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$ en changeant l'ordre d'intégration : (1) dans l'ordre $dz \, dy \, dx$, (2) dans l'ordre $dx \, dy \, dz$ et (3) dans l'ordre $dy \, dz \, dx$.

Question 15.17

Récrivez l'intégrale $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \int_0^{2-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$ en changeant l'ordre d'intégration : (1) dans l'ordre $dx \, dz \, dy$ et (2) dans l'ordre $dy \, dx \, dz$.

15.4.2 Substitution

Question 15.18

Calculez le volume du solide défini par $x^2 + y^2 \leq 1$ et $z^2 \leq x^2 + y^2$.

Question 15.19

Soit l'intégrale $\int_0^2 \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^0 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$.

- Dessinez le domaine d'intégration D .
- Récrivez l'intégrale en coordonnées polaires.
- Évaluez l'intégrale.

Question 15.20

Soit R la région à l'intérieure de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et au dessus de la surface définie par $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Donnez l'intégrale triple avec les bornes d'intégration qui va donner le volume V de cette région.

- Utilisez les coordonnées cartésiennes avec l'ordre d'intégration $dz dy dx$.
- Utilisez les coordonnées cylindriques avec l'ordre d'intégration $dz dr d\theta$.
- Utilisez les coordonnées sphériques avec l'ordre d'intégration $dr d\theta d\phi$.

Question 15.21

Dessinez la région déterminée par les bornes d'intégration de l'intégrale suivante et utilisez les coordonnées cylindriques pour évaluer cette intégrale.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 z dz dy dx \quad \text{b) } \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{1+x^2+y^2}^{5-x^2-y^2} z dz dx dy$$

Question 15.22

Dessinez la région déterminée par les bornes d'intégration de l'intégrale suivante et utilisez les coordonnées sphériques pour évaluer cette intégrale.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z dz dy dx \quad \text{b) } \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx$$

Question 15.23

Soit l'intégrale

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy .$$

- Tracez le dessin de la région E déterminée par les bornes d'intégration de l'intégrale.
- Utilisez la substitution appropriée pour évaluer cette intégrale.

Question 15.24

Déterminez le volume du solide bornée par la surface $z = 25 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 16$.

Question 15.25

Calculez le volume de la région au dessus de la parabolôide d'équation $z = x^2 + y^2$ et au dessous du cône d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Question 15.26

Calculez le volume du solide borné par les surfaces $z^2 = x^2 + y^2$ et $x^2 + y^2 = 4$.

Question 15.27

Calculez le volume du solide borné par le parabolöide $z = 4x^2 + 3y^2$ et le cylindre parabolique $y^2 + z = 4$.

Question 15.28

Nous cherchons la masse du solide délimité par la partie supérieure ($z > 0$) de la sphère de rayon 16 centrée à l'origine et le plan $z = 2$. La densité est donnée par $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ g/cm³.

- a) Utilisez les coordonnées cylindrique pour trouver cette masse.
- b) Utilisez les coordonnées sphériques pour trouver cette masse.

Question 15.29

Quelle est la masse du cornet de crème glacée bornée par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ et le cône $\frac{16}{9}z^2 = x^2 + y^2$ pour $z \geq 0$ si la densité est donnée par $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ g/cm³.

Question 15.30

Considérez une sphère de rayon R_1 centrée à l'origine qui est percée par un cylindre de rayon $R_2 < R_1$ dont l'axe est un diamètre de la sphère. Si la densité de la sphère est donnée par $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, quelle est la masse de la sphère percée par le cylindre ?



Dans ce chapitre, nous continuons notre généralisation de l'intégration. Après avoir défini l'intégrale de fonctions sur des surfaces « linéaires » comme un intervalle de la droite réelle ou une rectangle dans le plan, nous allons maintenant définir l'intégrale sur des surfaces courbe comme des cercles ou des sphères. Nous commençons par l'intégrale de fonctions le long de courbes que nous étendons par la suite à l'intégrale de champs de vecteurs le long de courbes. Nous faisons de même pour l'intégrale de fonctions sur une surface et l'intégrale de champs de vecteurs sur une surface.

Nous présentons plusieurs théorèmes (Stokes, Green et divergence) qui permettent sous certaines contraintes de remplacer une intégrale le long d'une courbe par une intégrale de surface, ou une intégrale de surface par une intégrale de volume.

Nous fournissons tout au long du chapitre une interprétation physique des concepts introduits. En particulier, nous introduisons le rotationnel et la divergence d'un champ de vecteurs qui jouent un rôle important en physique.

16.1 Intégrale le long d'une courbe

Soit Γ une courbe reliant deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} . Nous pouvons parcourir la courbe à partir du point \mathbf{a} pour se rendre au point \mathbf{b} ou, inversement, à partir du point \mathbf{b} pour se rendre au point \mathbf{a} . Il y a donc deux orientation possible pour la courbe Γ . Nous dirons que la courbe Γ est une **courbe orientée** si une direction à été associée à la courbe Γ . Par exemple, nous dirons que Γ est une courbe (orientée) de \mathbf{a} vers \mathbf{b} si nous voulons que la direction pour parcourir Γ aille de \mathbf{a} vers \mathbf{b} . Une représentation paramétrique

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$$

pour $a \leq t \leq b$ de Γ respecte cette orientation si $\sigma(a) = \mathbf{a}$ et $\sigma(b) = \mathbf{b}$ (figure 16.1). Nous supposons que les fonctions σ_i sont de classe C^1 .

Définition 16.1.1

Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un ensemble ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ qui contient la courbe orientée Γ , et soit $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ une représentation paramétrique de Γ qui respect son orientation.

L'intégrale de f le long de la courbe orientée Γ est définie par

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt ,$$

où $\sigma'(t) = (\sigma'_1(t), \sigma'_2(t), \sigma'_3(t))$ et

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(\sigma'_1(t))^2 + (\sigma'_2(t))^2 + (\sigma'_3(t))^2}$$

est la norme euclidienne de $\sigma'(t)$. Nous écrivons $ds = \|\sigma'(t)\| \, dt$.

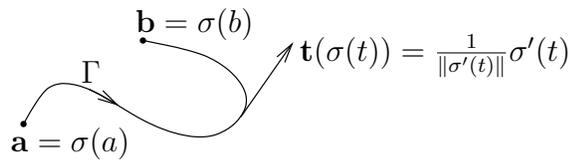


FIGURE 16.1 – Une courbe orientée Γ qui possède la représentation paramétrique $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$ pour $a \leq t \leq b$.

Remarque 16.1.2

- À l'aide d'un changement de variable, nous pourrions démontrer que l'intégrale d'une fonction le long d'une courbe Γ est indépendante de la représentation paramétrique choisie pour Γ .
- L'intégrale d'une fonction le long d'une courbe satisfait plusieurs des propriétés des intégrales que nous connaissons bien. Par exemple, si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et Γ est une courbe orientée dans V , alors

$$\int_{\Gamma} (f + g) \, ds = \int_{\Gamma} f \, ds + \int_{\Gamma} g \, ds .$$

De plus,

$$\int_{\Gamma} \alpha f \, ds = \alpha \int_{\Gamma} f \, ds$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme pour les intégrales sur un intervalle, nous pouvons décomposer le domaine d'intégration d'une fonction le long d'une courbe. Si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, Γ_1 est une courbe orientée dans V qui va de \mathbf{a} à \mathbf{b} , et Γ_2 est une courbe orientée dans V qui va de \mathbf{b} à \mathbf{c} , alors

$$\int_{\Gamma_1} f \, ds + \int_{\Gamma_2} f \, ds = \int_{\Gamma} f \, ds$$

où Γ est la courbe orientée dans V qui va de \mathbf{a} à \mathbf{c} obtenu en combinant au point \mathbf{b} les courbes Γ_1 et Γ_2 . Nous écrivons $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (figure 16.2).

- Notre présentation de la matière est principalement dans \mathbb{R}^3 . Cependant, tout ce que nous dirons au sujet de l'intégration dans \mathbb{R}^3 est valable dans \mathbb{R}^2 après une adéquate reformulation.

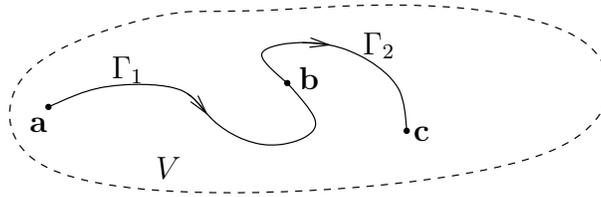


FIGURE 16.2 – La courbe orientée $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ est la courbe décrite en parcourant premièrement la courbe Γ_1 de **a** à **b** suivi de la courbe Γ_2 de **b** à **c**.



Définition 16.1.3

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . Un **champ de vecteurs** défini sur V est une fonction continue $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Pour dessiner un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^2 , nous choisissons un ensemble de points du plan x, y (uniformément distribués) et, à partir de chacun de ces points (x, y) , nous traçons le vecteur $F(x, y)$.

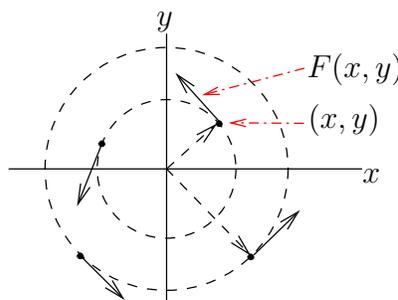
Exemple 16.1.4

Pour tracer le champ de vecteurs donné par $F(x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{j}$, nous notons que le produit scalaire de $F(x, y)$ avec le vecteur (x, y) est nul. En effet,

$$F(x, y) \cdot (x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot (x, y) = \frac{-yx + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Donc $F(x, y)$ est perpendiculaire au vecteur (x, y) en tout point (x, y) . De plus, la norme Euclidienne de F est 1 en tout point car

$$\|F(x, y)\| = \sqrt{\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2 + y^2}} = 1.$$



Si nous considérons une particule sur un cercle centré à l'origine, elle a une vitesse constante $\|F(x, y)\| = 1$ et sa vitesse est toujours tangente au cercle. La particule va voyager à une vitesse constante dans un mouvement circulaire autour de l'origine dans le sens

contraire aux aiguilles d'une montre. La vitesse de la particule est indépendante du cercle sur lequel elle se trouve car $\|F(x, y)\|$ est constant. Il faut noter cependant que la vitesse angulaire n'est pas constante. Plus le rayon du cercle est petit, plus la vitesse angulaire est grande car la vitesse sur le cercle est le produit de la vitesse angulaire et du rayon du cercle. 

Définition 16.1.5

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 et F un champ de vecteurs défini sur V . **L'intégrale du champ de vecteurs F le long de la courbe orientée Γ** est définie par

$$\int_{\Gamma} F \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{\Gamma} F \cdot \mathbf{ds} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt \quad (16.1.1)$$

où $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de la courbe Γ qui respecte son orientation, et $\mathbf{t}(\sigma(t))$ est un vecteur unitaire (de longueur un) tangent à la courbe Γ au point $\sigma(t)$ de la courbe Γ . Notons que

$$\mathbf{t}(\sigma(t)) = \frac{1}{\|\sigma'(t)\|} \sigma'(t) .$$

Nous écrivons $\mathbf{ds} = \sigma'(t) \, dt$.

Remarque 16.1.6

Comme dans le cas de l'intégrale d'une fonction le long d'une courbe, l'intégrale d'un champ de vecteurs le long d'une courbe Γ est indépendante de la représentation paramétrique choisie pour Γ . 

Remarque 16.1.7

Si Γ est une courbe orientée de \mathbf{a} vers \mathbf{b} , nous dénotons par $-\Gamma$ la même courbe mais avec l'orientation de \mathbf{b} vers \mathbf{a} . Vérifions que

$$\int_{-\Gamma} F \cdot \mathbf{ds} = - \int_{\Gamma} F \cdot \mathbf{ds}$$

En effet, si $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de la courbe orientée Γ de \mathbf{a} vers \mathbf{b} alors $\mu(s) = \sigma(b + a - s)$ pour $a \leq s \leq b$ est une représentation paramétrique de la courbe orientée $-\Gamma$ de \mathbf{b} vers \mathbf{a} . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} F \cdot \mathbf{ds} &= \int_a^b F(\mu(s)) \cdot \mu'(s) \, ds = - \int_a^b F(\sigma(b + a - s)) \cdot \sigma'(b + a - s) \, dt \\ &= \int_b^a F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt = - \int_{\Gamma} F \cdot \mathbf{ds} . \end{aligned}$$

La troisième égalité provient de la substitution $t = a + b - s$. 

Nous retrouvons souvent dans les livres de mathématiques pour l'ingénierie, la formulation équivalente suivante pour l'intégrale du champ de vecteurs F le long de la courbe Γ .

Définition 16.1.8

Si nous exprimons le champ de vecteurs F comme étant $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ où $F_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$, $F_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_3 : V \rightarrow \mathbb{R}$. alors nous pouvons récrire (16.1.1) de la façon suivante.

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

où $x = \sigma_1(t)$, $y = \sigma_2(t)$ et $z = \sigma_3(t)$. En particulier, nous avons $dx = \sigma_1'(t) dt$, $dy = \sigma_2'(t) dt$ et $dz = \sigma_3'(t) dt$.

Exemple 16.1.9

Soit le champ de vecteur $F(x, y, z) = (4x^3y^3z^2, 3x^4y^2z^2, 2x^4y^3z)$ et la courbe orientée Γ définie par $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$ pour $0 \leq t \leq 1$. Calculons l'intégrale du champ de vecteurs f le long de la courbe Γ .

Puisque

$$F(\sigma(t)) = (4t^3(t^2)^3(t^3)^2, 3t^4(t^2)^2(t^3)^2, 2t^4(t^2)^3t^3) = (4t^{15}, 3t^{14}, 2t^{13})$$

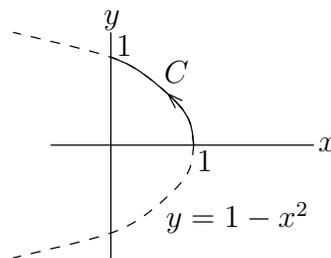
et $\sigma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot ds &= \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_0^1 (4t^{15}, 3t^{14}, 2t^{13}) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 16t^{15} dt = t^{16} \Big|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

**Exemple 16.1.10**

Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_C xy dx - x dy$ le long de la courbe C donnée par $y = 1 - x^2$ à partir du point $(1, 0)$ jusqu'au point $(0, 1)$.

Le dessin de la courbe C est donnée ci-dessous.



Nous devons choisir une représentation paramétrique pour C . Un choix possible serait $x = 1 - t$ et $y = 1 - (1 - t)^2$ pour $0 \leq t \leq 1$. Nous pouvons simplifier les calculs, si nous utilisons le fait que $\int_C = -\int_{-C}$. Une représentation paramétrique pour $-C$ est simplement $x = t$ et $y = 1 - t^2$ pour $0 \leq t \leq 1$. Donc

$$\int_C xy dx - x dy = -\int_{-C} xy dx - x dy = -\int_0^1 (t(1 - t^2) + 2t^2) dt$$

$$= - \int_0^1 (t + 2t^2 - t^3) dt = - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{11}{12}$$

car $dx = dt$ et $dy = -2t dt$. 

Théorème 16.1.11 (Théorème fondamental des intégrales le long de courbes)

Soit V un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 . Si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , alors

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

quelle que soit la courbe orientée Γ dans V où $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de Γ qui respect son orientation. En particulier, l'intégrale $\int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds$ est indépendante de la courbe $\Gamma \subset V$ utilisée pour joindre deux points de V .

Exemple 16.1.12

Reprenons le champ de vecteur $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ et la courbe Γ de l'exemple 16.1.9. Comme à l'exemple 16.1.9, nous voulons calculer l'intégrale du champ de vecteurs F le long de la courbe Γ .

Il s'avère que $F = \nabla f$ pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Ce n'est naturellement pas tous les champs de vecteurs qui sont donnés par la gradient d'une fonction. Nous verrons prochainement une méthode pour déterminer si un champ de vecteurs est le gradient d'une fonction. Si nous supposons que $F = \nabla f$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x, y, z) = 4x^3y^3z^2 \Rightarrow f(x, y, z) = x^4y^3z^2 + g(y, z)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x, y, z) = 3x^4y^2z^2 \Rightarrow 3x^4y^2z^2 + \frac{dg}{dy} = 3x^4y^2z^2 \Rightarrow \frac{dg}{dy} = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z)$$

pour une certaine fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons donc $f(x, y, z) = x^4y^3z^2 + h(z)$. Finalement,

$$\frac{df}{dz} = F_3(x, y, z) = 2x^4y^3z \Rightarrow 2x^4y^3z + h'(z) = 2x^4y^3z \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C$$

où C est une constante d'intégration. La fonction cherchée est donc $f(x, y, z) = x^4y^3z^2 + C$. Comme pour les intégrales définies, Nous pouvons poser $C = 0$ lorsque f est utilisée dans le contexte du Théorème fondamental des intégrales le long de courbes.

Il découle du Théorème fondamental des intégrales le long de courbes que

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 1.$$

Nous constatons que cette intégrale est indépendante de la courbe Γ de $(0, 0, 0)$ à $(1, 1, 1)$. 

Comment pouvons-nous savoir si un champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$? Nous donnons une méthode au théorème 16.1.17 ci-dessous. Nous verrons à la prochaine section une méthode plus pratique.

Définition 16.1.13

Une courbe Γ avec la représentation paramétrique $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est **fermée** si $\sigma(a) = \sigma(b)$.

Proposition 16.1.14

Soit V un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 et soit F un champ de vecteurs défini sur V . L'intégrale $\int_{\Gamma} F \cdot ds$ est indépendante de la courbe orientée $\Gamma \subset V$ utilisée pour joindre deux points de V si et seulement si $\int_{\Gamma} F \cdot ds = 0$ pour toutes courbes fermées Γ dans V .

Remarque 16.1.15

La proposition précédente est intuitivement clair. Soit Γ_1 et Γ_2 deux courbes dans V qui vont de \mathbf{a} à \mathbf{b} . Supposons que $\sigma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit une représentation paramétrique de Γ_1 avec $\sigma_1(0) = \mathbf{a}$ et $\sigma_1(1) = \mathbf{b}$. De même, supposons que $\sigma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit une représentation paramétrique de Γ_2 avec $\sigma_2(0) = \mathbf{a}$ et $\sigma_2(1) = \mathbf{b}$ (figure 16.3). Nous définissons la courbe fermée Γ_3 à l'aide de la représentation paramétrique suivante

$$\sigma_3(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \sigma_2(2(1-t)) & \text{si } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

Avec cette représentation paramétrique, nous parcourons la courbe Γ_1 de \mathbf{a} à \mathbf{b} lorsque t va de 0 à 1/2, et nous parcourons la courbe Γ_2 de \mathbf{b} à \mathbf{a} lorsque t va de 1/2 à 1. Nous avons donc $\Gamma_3 = \Gamma_1 + (-\Gamma_2)$. Ainsi,

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot ds - \int_{\Gamma_2} F \cdot ds = \int_{\Gamma_1} F \cdot ds + \int_{-\Gamma_2} F \cdot ds = \int_{\Gamma_3} F \cdot ds .$$

Donc $\int_{\Gamma_1} F \cdot ds = \int_{\Gamma_2} F \cdot ds$ si et seulement si $\int_{\Gamma_3} F \cdot ds = 0$. ♠



FIGURE 16.3 – La courbe Γ_3 est une combinaison de la courbe Γ_1 dans le sens de la courbe Γ_1 et de la courbe Γ_2 dans le sens opposé au sens de la courbe Γ_2 . Nous obtenons la courbe fermée $\Gamma_3 = \Gamma_1 - \Gamma_2$.

Définition 16.1.16 

Un sous ensemble V de \mathbb{R}^n est **simplement connexe** si toute courbe fermée Γ dans V peut être déformée de façon continue à l'intérieur de V pour donner un point à l'intérieur de V . En termes mathématiques, si $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ est la représentation paramétrique d'une courbe fermée Γ , alors ils existent un point $\mathbf{w} \in E$ et une fonction continue $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow V$ telles que

1. $H(0, t) = \gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$,
2. $H(s, a) = H(s, b)$ pour $s \in [0, 1]$ et
3. $H(1, t) = \mathbf{w}$ pour $t \in [a, b]$.

Si la représentation paramétrique γ de la courbe Γ est de classe C^k , alors nous assumons que H est aussi de classe C^k .

Nous illustrons à la figure 16.4 une fonction H comme nous avons défini ci-dessus. Une telle fonction est appelée une **homotopie**. Deux ensembles sont représentés à la figure 16.5. Un de ces deux ensembles est simplement connexe alors que l'autre ne l'est pas. Pouvez vous donner un exemple d'un ensemble de \mathbb{R}^3 qui n'est pas simplement connexe ?

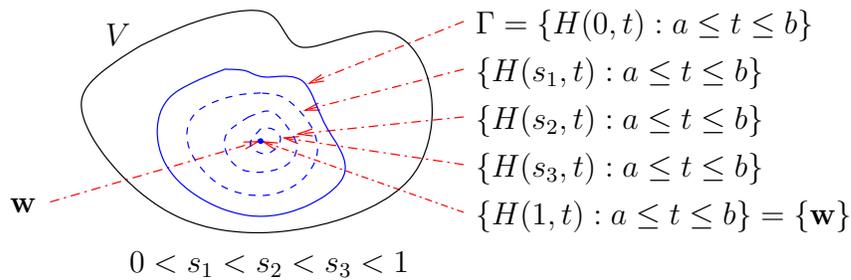


FIGURE 16.4 – V est un ensemble simplement connexe.

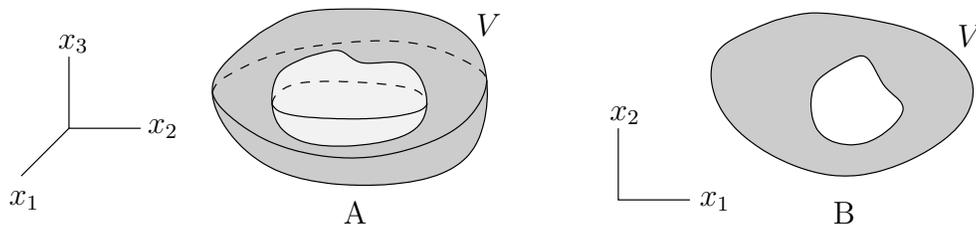


FIGURE 16.5 – La figure (A) représente un ensemble simplement connexe alors que la figure (B) ne l'est pas mais ils ont tout les deux un «trou» à l'intérieur.

Le théorème fondamental a une contre partie.

Théorème 16.1.17

Soit V un sous-ensemble ouvert et simplement connexe de \mathbb{R}^3 , et soit F un champ de vecteurs défini sur V . Si, pour tous \mathbf{a} et \mathbf{b} dans V , l'intégrale $\int_{\Gamma} F \cdot ds$ est indépendante de la courbe orientée Γ dans V qui va de \mathbf{a} à \mathbf{b} , alors il existe une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $F = \nabla f$ sur V .

Définition 16.1.18

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 . Un champ de vecteurs F défini sur V est **conservateur** si, pour tous \mathbf{a} et \mathbf{b} dans V , l'intégrale $\int_{\Gamma} F \cdot ds$ est indépendante de la courbe orientée Γ dans V qui va de \mathbf{a} à \mathbf{b} .

16.2 Rotationnel et divergence

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 et F un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur V . Posons $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ où $F_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$, $F_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_3 : V \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1 .

Définition 16.2.1

Le **rotationnel** de $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ est défini par

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

Remarque 16.2.2

Comme nous avons vu à la remarque 11.4.23, il existe une formule symbolique simple pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs qui est forte utile pour éviter les erreurs de signes et autres erreurs.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k} \end{aligned}$$

où nous développons le déterminant selon la première ligne seulement. Si nous utilisons cette formulation symbolique, alors

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}.$$



Proposition 16.2.3

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors $\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$.

Nous laissons aux lecteurs le soin de démontrer ce résultat.

Proposition 16.2.4

Soit V un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^3 et $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Si $\text{rot } F = \mathbf{0}$, alors F est conservateur. En particulier, il s'en suit du Théorème 16.1.17 qu'il existe une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$.

Exemple 16.2.5

Montrons que le champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $F(x, y) = (2xy^4, 4x^2y^3 - 6y^2)$ est conservateur.

Lorsque le champ de vecteur $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ est indépendant de z (i.e. F_1 et F_2 sont des fonctions de x et y seulement) et $F_3(x, y, z) = 0$ pour tout (x, y, z) , nous avons que $\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$. Donc $\text{rot } F = \mathbf{0}$ est équivalent à $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$.

Puisque

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (4x^2y^3 - 6y^2) = 8xy^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^4) = 8xy^3,$$

nous avons que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ et donc F est conservateur. La proposition précédente affirme qu'il existe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$. En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x, y) = 2xy^4 \Rightarrow f(x, y) = x^2y^4 + g(y)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x, y) = 4x^2y^3 - 6y^2 &\Rightarrow 4x^2y^3 + g'(y) = 4x^2y^3 - 6y^2 \\ &\Rightarrow g'(y) = -6y^2 \Rightarrow g(y) = -2y^3 + C \end{aligned}$$

où C est une constante d'intégration. La fonction cherchée est donc $f(x, y) = x^2y^4 - 2y^3 + C$. Comme pour les intégrales définies, nous pouvons poser $C = 0$ lorsque f est utilisée dans le contexte du Théorème fondamental des intégrales le long de courbes.

Si Γ est une courbe quelconque du point $(1, 2)$ au point $(-1, -3)$, il découle du Théorème fondamental des intégrales le long de courbes que

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds = f(1, 2) - f(-1, -3) = -27.$$



Définition 16.2.6

La **divergence** d'un champ de vecteurs différentiable $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ est défini par

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} ,$$

Proposition 16.2.7

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 et $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^2 . Alors $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Proposition 16.2.8

Soit V un sous-ensemble ouvert et convexe de \mathbb{R}^3 et $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Si $\operatorname{div}(F) = 0$, alors il existe un champ de vecteur $G : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tel que $F = \operatorname{rot} G$.

Exemple 16.2.9

Nous aimerions savoir si le champ de vecteurs $F(x, y, z) = (yz, xyz, xz)$ est le rotationnel d'un champ de vecteur $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; c'est-à-dire, si $F = \operatorname{rot} G$.

Pour que ce soit le cas, il faut que $\operatorname{div} F = 0$. Or,

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = xz + x$$

n'est pas identique à 0. Le champ de vecteurs F n'est donc pas le rotationnel d'un champ de vecteur G . 

16.2.1 Une interprétation physique de la divergence et du rotationnel

Nous présentons l'interprétation physique de la divergence et du rotationnel qui est à l'origine du calcul vectoriel que nous utilisons de nos jours. Notre discussion sera informelle et fera appel à des concepts qui seront étudiés au chapitre 17. En particulier, nous ne nous attendons pas à ce que le lecteur comprenne tous les détails de la discussion. Les conclusions importantes sont en caractères gras.

La divergence

Un champ de vecteur $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donne naissance à un système d'équations différentielles $\phi'(t) = F(\phi(t))$. Plus précisément,

$$\frac{d\phi_1}{dt} = F_1(\phi(t)) \quad , \quad \frac{d\phi_2}{dt} = F_2(\phi(t)) \quad \text{et} \quad \frac{d\phi_3}{dt} = F_3(\phi(t)) .$$

Étant donné un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, il existe une solution unique ϕ de ce système d'équations différentielles qui satisfait la condition initiale $\phi(0) = \mathbf{x}_0$. La fonction ϕ est la représentation paramétrique d'une courbe dans \mathbb{R}^3 qui passe par \mathbf{x}_0 et qui est tangente au champ de vecteurs F en tout point de la courbe car $\phi'(t) = F(\phi(t))$.

Puisque ϕ dépend de $t \in \mathbb{R}$ et de la condition initiale $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, nous considérons en fait que $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Vu de cette façon, nous disons que ϕ est un **flot**. Pour chaque point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, l'ensemble $\{\phi(t, \mathbf{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}$ peut être vu comme la trajectoire d'une particule qui se déplace à partir de \mathbf{x}_0 sous l'influence du champ de vecteurs F .

Soit

$$P_0 = \{\mathbf{x}_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k} : 0 \leq s_i \leq \epsilon\}$$

pour ϵ très petit. P_0 est un très petit parallélépipède (figure 16.6). L'image d'un point $\mathbf{x}_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}$ du parallélépipède le long du flot est donnée par

$$\phi(t, \mathbf{x}_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) = \phi(t, \mathbf{x}_0) + D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)(s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) + r_2(s_1, s_2, s_3)$$

d'après le Théorème de Taylor, théorème 14.5.2, pour les fonctions de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Comme $\lim_{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|r_2(\mathbf{s})\|}{\|\mathbf{s}\|} = 0$, nous avons que l'image du parallélépipède P_0 est

$$\phi(t, P_0) \approx P_t \equiv \{\phi(t, \mathbf{x}_0) + D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)(s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) : 0 \leq s_i \leq \epsilon\}$$

si ϵ et t sont très petits. L'image du parallélépipède P_0 par l'application linéaire $D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)$ est le parallélépipède P_t dont les côtés sont les vecteurs

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{x}_0) = \epsilon D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)\mathbf{i}, \quad \mathbf{b}(t, \mathbf{x}_0) = \epsilon D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)\mathbf{j} \quad \text{et} \quad \mathbf{c}(t, \mathbf{x}_0) = \epsilon D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)\mathbf{k} \quad (16.2.1)$$

(figure 16.6). Soit $V(\mathbf{x}_0, t)$ le volume du parallélépipède P_t . Montrons que

$$\frac{1}{V(0, \mathbf{x}_0)} \frac{dV}{dt}(0, \mathbf{x}_0) = \operatorname{div} F(\mathbf{x}_0). \quad (16.2.2)$$

Cette relation peut être exprimé en disant que **le taux de variation instantané du volume relatif (au point \mathbf{x}_0) est donné par la divergence du champ de vecteur F (au point \mathbf{x}_0)**.

Puisque $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = F(\phi(t, \mathbf{x}))$, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}) = D_{\mathbf{x}}F(\phi(t, \mathbf{x})) D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}).$$

Ainsi,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}(t, \mathbf{x}_0) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)\mathbf{i} = \epsilon D_{\mathbf{x}}F(\phi(t, \mathbf{x}_0)) D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)\mathbf{i} \quad (16.2.3)$$

avec un résultat semblable pour $\frac{d\mathbf{b}}{dt}(t, \mathbf{x}_0)$ et $\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t, \mathbf{x}_0)$. Puisque $\phi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pour tout \mathbf{x} , nous obtenons $D_{\mathbf{x}}\phi(0, \mathbf{x}_0) = I$. Ainsi, (16.2.1) donne

$$\mathbf{a}(0, \mathbf{x}_0) = \epsilon \mathbf{i}, \quad \mathbf{b}(0, \mathbf{x}_0) = \epsilon \mathbf{j} \quad \text{et} \quad \mathbf{c}(0, \mathbf{x}_0) = \epsilon \mathbf{k}$$

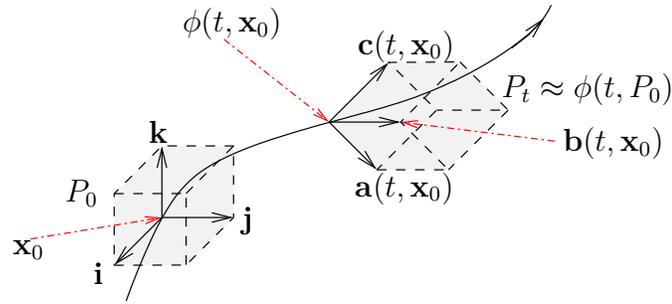


FIGURE 16.6 – Interprétation physique de la divergence.

comme il se doit pour P_0 , et (16.2.3) devient

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}(0, \mathbf{x}_0) = \epsilon D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{i} \quad (16.2.4)$$

avec un résultat semblable pour $\frac{d\mathbf{b}}{dt}(0, \mathbf{x}_0)$ et $\frac{d\mathbf{c}}{dt}(0, \mathbf{x}_0)$. Le volume de P_t est

$$V(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{a}(t, \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{b}(t, \mathbf{x}_0) \times \mathbf{c}(t, \mathbf{x}_0)) .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(t, \mathbf{x}_0) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt}(t, \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{b}(t, \mathbf{x}_0) \times \mathbf{c}(t, \mathbf{x}_0)) \\ &\quad + \mathbf{a}(t, \mathbf{x}_0) \cdot \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}(t, \mathbf{x}_0) \times \mathbf{c}(t, \mathbf{x}_0) \right) + \mathbf{a}(t, \mathbf{x}_0) \cdot \left(\mathbf{b}(t, \mathbf{x}_0) \times \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t, \mathbf{x}_0) \right) . \end{aligned}$$

Si nous évaluons l'expression précédente à $t = 0$ et que nous utilisons (16.2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(0, \mathbf{x}_0) &= (\epsilon D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{i}) \cdot (\epsilon \mathbf{j} \times \epsilon \mathbf{k}) + \epsilon \mathbf{i} \cdot (\epsilon (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{j}) \times \epsilon \mathbf{k}) \\ &\quad + \epsilon \mathbf{i} \cdot (\epsilon \mathbf{j} \times (\epsilon D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{k})) \\ &= \epsilon^3 ((D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{i}) \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j})) \\ &= \epsilon^3 ((D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}) \\ &= \epsilon^3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(\mathbf{x}_0) \right) = \epsilon^3 \operatorname{div} F(\mathbf{x}_0) . \end{aligned}$$

Puisque le volume de $V(0, \mathbf{x}_0) = P_0$ est naturellement ϵ^3 , nous avons donc (16.2.2). La formule (16.2.2) est vrai pour tout parallélépipède P_0 ; elle n'est pas limité seulement aux parallélépipèdes rectangles (dont les côtés font des angles droits).

Si $\operatorname{div} F = 0$, il découle donc de (16.2.2) que le volume d'une région ne change pas lorsqu'elle se déplace le long du flot.

Le rotationnel

Revenons à notre flot ϕ associé au champ de vecteurs F . Nous considérons une particule qui se déplace le long du flot. Sans perte de généralité, nous supposons que la position initiale de la particule est à l'origine. Soit \mathbf{v}_0 et \mathbf{w}_0 deux vecteurs qui émanent de l'origine (figure 16.7).

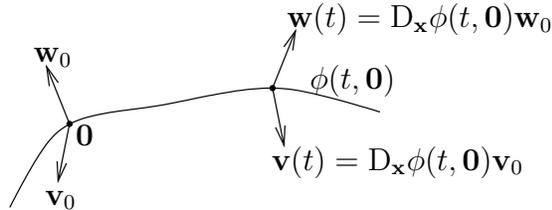


FIGURE 16.7 – Interprétation physique du rotationnel pour une objet le long d'un flot. Les vecteurs \mathbf{v}_0 et \mathbf{w}_0 sont transportés par le flot.

Nous considérons

$$\mathbf{w}(t) = D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)\mathbf{w}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(t) = D_{\mathbf{x}}\phi(t, \mathbf{x}_0)\mathbf{v}_0 .$$

Un raisonnement semblable à celui fait pour obtenir (16.2.4) donne

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}(0) = D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{w}_0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt}(0) = D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}_0 .$$

Le cosinus de l'angle entre les vecteurs $\mathbf{w}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ est déterminé par le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. Donc, si nous voulons mesurer les variations de cet angle, il suffit de mesurer les variations du produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \right|_{t=0} &= \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) \Big|_{t=0} = (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0})\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0})\mathbf{w}_0) \\ &= \mathbf{w}_0^{\top} (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0}) + D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0})^{\top}) \mathbf{v}_0 . \end{aligned} \quad (16.2.5)$$

Posons $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0}) = S + W$ où

$$S = \frac{1}{2} (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0}) + D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0})^{\top}) \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2} (D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0}) - D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0})^{\top}) .$$

La matrice symétrique S est appelée la **matrice de déformation** alors que la matrice antisymétrique W est appelée la **matrice de rotation**. Cette terminologie est justifié à la prochaine section. Nous concluons à partir de (16.2.5) que c'est la matrice de rotation qui est responsable de la rotation d'un objet qui se déplace le long du flot. Intuitivement, nous pouvons dire que la matrice de rotation n'affecte pas les angles entre le centre d'un objet et les particules qui forment l'objet lorsqu'il se déplace le long du flot ; elle ne déforme pas l'objet.

Faisons maintenant le lien entre la matrice W et le rotationnel de F . Nous avons

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(D_{\mathbf{x}}F(x, y, z) - D_{\mathbf{x}}F(x, y, z)^{\top} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(\text{rot } F)_3 & (\text{rot } F)_2 \\ (\text{rot } F)_3 & 0 & -(\text{rot } F)_1 \\ -(\text{rot } F)_2 & (\text{rot } F)_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $(\text{rot } F)_i$ est la i^{e} coordonnée de $\text{rot } F$.

En conclusion, lorsque $\text{rot } F = \mathbf{0}$, le flot est irrotationnel. Cela veut dire qu'un objet ne tournera pas sur lui même (comme une toupie) lorsque qu'il se déplace le long du flot. Nous donnerons une autre justification de ce résultat à la section 16.4.1.

Le rotationnel (suite)

Justifions pourquoi la matrice de rotation W définie dans la section présente est associée à la rotation d'un objet dans l'espace.

Pour mieux comprendre l'énoncé précédent, nous considérons un objet solide S qui tourne autour d'un axe qui le traverse (figure 16.8). Nous pouvons supposer que l'axe de rotation est parallèle à l'axe des z . Supposons que ω soit la vitesse angulaire et que \mathbf{w} soit un vecteur de longueur ω qui pointe dans la direction positive de l'axe des z . Soit $\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}$ un point de S .

La distance entre le point $\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}$ et l'axe de rotation est $\alpha = \|\mathbf{r}\| \sin(\theta)$ où θ est l'angle aigu entre l'axe de rotation et le vecteur \mathbf{r} . Le vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ est perpendiculaire au plan qui contient les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{w} , et pointe dans la direction de la rotation (le sens contraire aux aiguilles d'un montre pour le solide S à la figure 16.8).

Puisque $\mathbf{w} = (0, 0, \omega)$, si $\mathbf{r} = (x, y, z)$, nous avons

$$\mathbf{v} = (-\omega y, \omega x, 0) \quad (16.2.6)$$

et

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega \mathbf{k} \quad (16.2.7)$$

pour $\mathbf{x}_0 + \mathbf{r} \in S$ et \mathbf{r} qui n'est pas parallèle à \mathbf{w} .

En général, si un objet tourne sur lui même à une vitesse angulaire de ω , alors $\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est un vecteur unitaire dans la direction de l'axe de rotation.

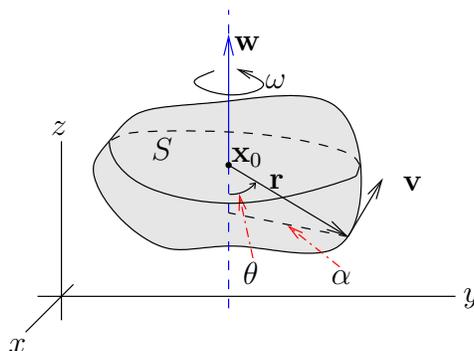


FIGURE 16.8 – Interprétation physique du rotationnel pour une objet le long d'un flot. Le vecteurs \mathbf{w} et \mathbf{r} ont subit une translation de \mathbf{x}_0 et le vecteur \mathbf{v} a subit une translation de $\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}$ pour permet une meilleure visualisation de la relation entre le rotationnel et la rotation de l'objet. Normalement, tous ces vecteurs partent de l'origine.

Si nous considérons que l'objet se déplace le long du flot, alors $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) = F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})$. Ainsi,

$$D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de rotation est $W(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)$ car $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}_0)$ est antisymétrique.

Si $\text{rot } F = \mathbf{0}$, alors $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ et ainsi $\omega = 0$. L'objet ne tourne pas sur lui même. Il n'y a pas de matrice de déformation puisque nous considérons un objet solide.

16.3 Intégrale sur une surface

Dans la discussion qui suit, nous allons toujours supposer que nos surfaces peuvent être paramétré par une seule fonction. C'est-à-dire, ils existent un sous-ensemble D (ouvert ou fermé) de \mathbb{R}^2 et une fonction $\rho : D \rightarrow S$ continue et inversible (injective et surjective). Nous présentons à la section 16.3.2 une généralisation du concept de surface qui est plus flexible pour l'intégration de fonctions et champs de vecteurs définis sur une surface. C'est le sujet du calcul différentiel et intégral sur les variétés qui est au-delà du contenu du présent manuel.

16.3.1 Définition de l'intégrale sur une surface

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface possédant la représentation paramétrique $\rho : D \rightarrow S$ de classe C^1 où D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 . Nous pouvons exprimer la représentation paramétrique ρ sous la forme

$$\rho(\mathbf{u}) = \rho_1(\mathbf{u})\mathbf{i} + \rho_2(\mathbf{u})\mathbf{j} + \rho_3(\mathbf{u})\mathbf{k} \quad (16.3.1)$$

pour $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in D$, où les fonctions $\rho_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 .

Définition 16.3.1

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 qui contient une surface S et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

L'intégrale de f sur la surface S est définie par

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\rho(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| \, dA$$

où $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de S et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2} &= \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial u_1} \frac{\partial \rho_3}{\partial u_2} - \frac{\partial \rho_3}{\partial u_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial u_2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \rho_3}{\partial u_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \rho_1}{\partial u_1} \frac{\partial \rho_3}{\partial u_2} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \rho_2}{\partial u_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial u_2} \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

Nous écrivons $dS = \left\| \frac{\partial \rho}{\partial u_1} \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2} \right\| \, dA$.

Remarque 16.3.2

Comme pour l'intégrale d'une fonction le long d'une courbe, nous pourrions démontrer à l'aide d'un changement de variable que l'intégrale d'une fonction sur une surface S est indépendante de la représentation paramétrique choisie pour S . ♠

Remarque 16.3.3

Si nous utilisons notre formulation symbolique pour calculer le produit vectoriel, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_1} \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \rho_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \rho_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \rho_3}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

où le déterminant est développé selon la première ligne seulement. ♠

Si $f(\mathbf{u}) = 1$ pour tout $\mathbf{u} \in S$ dans la définition précédente, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 16.3.4

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface possédant une représentation paramétrique $\rho : D \rightarrow S$ de classe C^1 , où D est un sous-ensemble ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$. Alors $\iint_S dS$ est l'aire de la surface S .

Remarque 16.3.5

Dans les exemples et remarques qui suivront, la représentation paramétrique d'une surface S

sera souvent exprimée sous la forme $x = \rho_1(u, v)$, $y = \rho_2(u, v)$ et $z = \rho_3(u, v)$ pour certaines fonctions $\rho_i : D \rightarrow S$. Dans ce cas, $\frac{\partial \rho}{\partial u_1}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial u_2}$ prennent la forme $\frac{\partial \rho}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$ et $\frac{\partial \rho}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$ respectivement. ♠

Remarque 16.3.6 👁

Pour démontrer la proposition précédente, il suffit de considérer les sommes de Reimann pour l'intégrale

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| dA .$$

Supposons que \mathcal{P} soit une partition de D donnée par une partition $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_p$ d'un intervalle de l'axe des u et une partition $v_0 < v_1 < v_2 < \dots < v_q$ d'un intervalle de l'axe des v comme cela est définie à la section 15.1. Nous avons que

$$\left\| \frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j$$

est l'aire d'un petit rectangle $R_{i,j}$ qui est tangent à la surface S au point $\rho(u_i, v_j) \in S$ et dont les côtés à partir de ce point sont donnés par les vecteurs $\frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i$ et $\frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j$ (figure 16.9). Si la partition est très fine, le rectangle $R_{i,j}$ est presque la région $\rho(A_{i,j})$ où $A_{i,j} = \{(u, v) : u_i \leq u \leq u_{i+1}, v_j \leq v \leq v_{j+1}\}$.

Donc

$$\sum_{A_{i,j} \in \mathcal{P}} \left\| \frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j$$

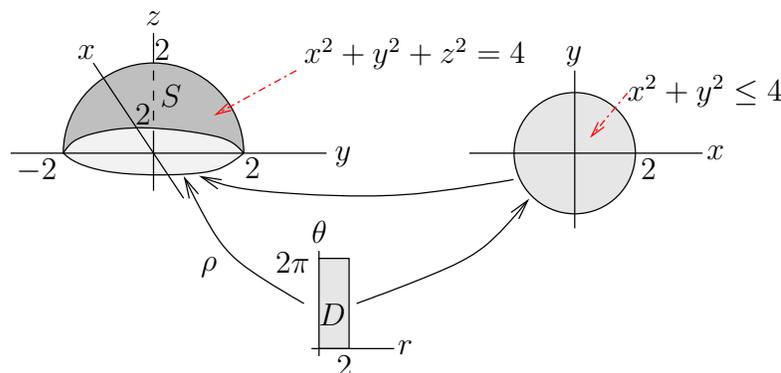
est une approximation de l'aire de la surface S . À la limite, lorsque $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$, nous obtenons l'aire de la surface S . Or, d'après la définition de l'intégrale de Reimann, nous avons

$$\iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \left\| \frac{\partial \rho}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u, v) \right\| dA = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{A_{i,j} \in \mathcal{P}} \left\| \frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j .$$

Donc $\iint_S d\mathbf{S}$ est l'aire de la surface S . ♠

Exemple 16.3.7

Calculons l'aire de la demi-sphère supérieure S de rayon 2 centrée à l'origine.



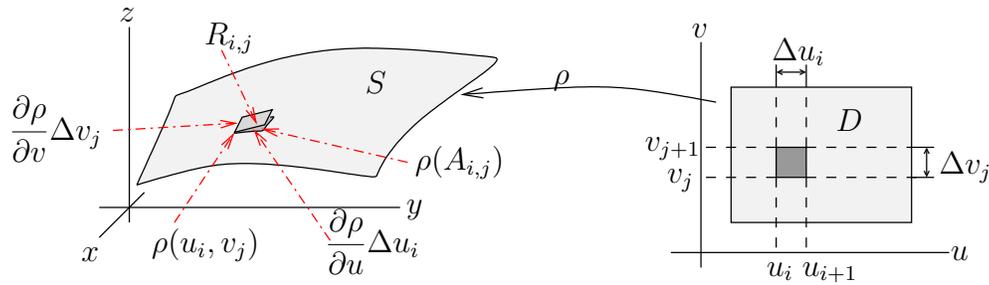


FIGURE 16.9 – L'intégrale de la fonction constante à 1 sur une surface donne l'aire de la surface comme il est expliqué à la remarque 16.3.6.

Nous utilisons la représentation paramétrique suivante pour la surface S .

$$(x, y, z) = (\cos(\theta), r \sin(\theta), \sqrt{4 - r^2})$$

pour $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Puisque

$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| dA \\ &= \left\| \left(\cos(\theta), \sin(\theta), \frac{-r}{\sqrt{4 - r^2}} \right) \times (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0) \right\| dA \\ &= \left\| \left(\frac{r^2 \cos(\theta)}{\sqrt{4 - r^2}}, \frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{4 - r^2}}, r \right) \right\| dA = \sqrt{\frac{r^4 \cos^2(\theta)}{4 - r^2} + \frac{r^4 \sin^2(\theta)}{4 - r^2} + r^2} dA = \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dA, \end{aligned}$$

l'aire de la surface S est donnée par

$$\begin{aligned} \iint_S dS &= \iint_D \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-2\sqrt{4 - r^2} \Big|_{r=0}^{r=2} \right) d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi. \end{aligned}$$



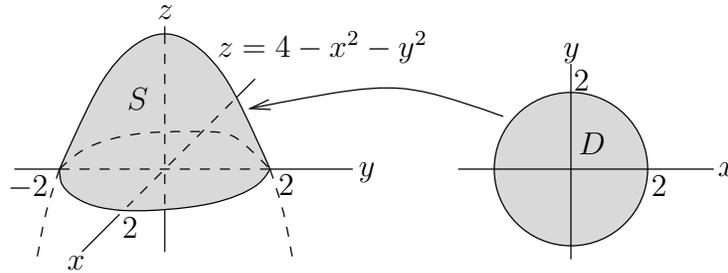
Dans le cas où la surface S est décrite par une fonction $z = f(x, y)$ pour (x, y) appartenant à une région D du plan. La formule pour calculer l'aire de la surface prend une forme simple.

Si nous choisissons la représentation paramétrique $x = x$, $y = y$ et $z = f(x, y)$, alors

$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right\| dA \\ &= \left\| \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right\| dA = \left\| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right\| dA \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1} dA \end{aligned}$$

Exemple 16.3.8

Calculons l'aire de la surface S définie par $z = 4 - x^2 - y^2$ pour $x^2 + y^2 \leq 4$.



Nous utilisons la représentation paramétrique $x = x$, $y = y$ et $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ pour $x^2 + y^2 \leq 4$. Ainsi,

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA$$

L'aire de la surface S est donnée par

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA.$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, nous utilisons les coordonnées polaires

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

pour $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Nous avons vu que le Jacobien pour les coordonnées polaires est $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$. De plus, $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4r^2 + 1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_S dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \Big|_{r=0}^{r=2} \right) d\theta \\ &= \frac{17^{3/2} - 1}{12} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{(17^{3/2} - 1)\pi}{6}. \end{aligned}$$

**Définition 16.3.9**

Nous disons qu'une surface S est **orientée** s'il existe $\mathbf{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est un vecteur unitaire perpendiculaire (au plan tangent) à la surface S en tout point $\mathbf{x} \in S$. Nous assumons que \mathbf{n} est une fonction continue.

Définition 16.3.10

Un vecteur perpendiculaire à une surface S en un point est aussi appelé un **vecteur normal** ou une **normale** à la surface S en ce point.

Un sphère dans \mathbb{R}^3 a deux orientations possibles. Soit que le vecteur unitaire perpendiculaire à la sphère pointe vers l'extérieur de la sphère ou soit qu'il pointe vers l'intérieur de la sphère. Ce ne sont pas toutes les surfaces dans \mathbb{R}^3 qui ont deux orientations possibles. Par exemple, la bande de Möbius que toute le monde connaît bien n'est pas une surface orientée.

Définition 16.3.11

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 qui contient une surface orientée S et F un champ de vecteurs défini sur V . **L'intégrale du champ de vecteurs F sur la surface orientée S** est définie par

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \iint_S F \cdot \mathbf{n} dS$$

où \mathbf{n} donne l'orientation de la surface qui a été choisie. Nous écrivons $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$.

Si la représentation paramétrique $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 de la surface orientée S satisfait

$$\frac{1}{\left\| \frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right) = \mathbf{n}(\rho(\mathbf{u})) \quad (16.3.2)$$

pour tout $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in D$, alors

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \mathbf{n}(\rho(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| dA = \left(\frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right) dA.$$

Rappelons que

$$\frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$$

pour tout $\mathbf{u} \in D$ par hypothèse et $\frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u})$ est un vecteur perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point $\rho(\mathbf{u}) \in S$; C'est-à-dire que $\frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u})$ est parallèle à $\mathbf{n}(\rho(\mathbf{u}))$ pour tout $\mathbf{u} \in D$. Donc, le côté gauche de (16.3.2) est soit $\mathbf{n}(\rho(\mathbf{u}))$ ou soit $-\mathbf{n}(\rho(\mathbf{u}))$. La représentation paramétrique qui a été choisie en (16.3.2) fait en sorte que nous obtenons $\mathbf{n}(\rho(\mathbf{u}))$.

Proposition 16.3.12

Si $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de classe C^1 de la surface orientée

S et

$$\frac{1}{\left\| \frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right) = \mathbf{n}(\rho(\mathbf{u}))$$

pour tout $\mathbf{u} \in D$, où le vecteur \mathbf{n} est l'orientation de la surface, alors

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \iint_D F(\rho(\mathbf{u})) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \rho}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right) dA \quad (16.3.3)$$

Remarque 16.3.13

L'intégrale du champ de vecteurs F sur la surface orientée S donne le flux du champ de vecteurs au travers de la surface S dans la direction de l'orientation de S . Pour nous convaincre que c'est bien le cas, il faut retourner à notre définition de l'intégrale de Riemann.

Comme nous avons fait précédemment, nous assumons que $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de classe C^1 de la surface orientée S . Nous assumons de plus que cette représentation paramétrique est telle que $\frac{\partial \rho}{\partial u} \times \frac{\partial \rho}{\partial v}$ pointe dans la direction du vecteur \mathbf{n} normal à la surface S qui a été choisie pour définir l'orientation de S .

Supposons que \mathcal{P} soit une partition de D donnée par une partition $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_p$ d'un intervalle de l'axe des u et une partition $v_0 < v_1 < v_2 < \dots < v_q$ d'un intervalle de l'axe des v comme cela est définie à la section 15.1.

$$\begin{aligned} & F(\rho(u_i, v_j)) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j) \right) \Delta u_i \Delta v_j \\ &= \det \begin{pmatrix} F_1(\rho(u_i, v_j)) & F_2(\rho(u_i, v_j)) & F_3(\rho(u_i, v_j)) \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i & \frac{\partial \rho_2}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i & \frac{\partial \rho_3}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j & \frac{\partial \rho_2}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j & \frac{\partial \rho_3}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est le volume du parallélépipède produit par les vecteurs $F(\rho(u_i, v_j))$, $\frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i$ et $\frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j$ (figure 16.10). C'est une approximation du volume de fluide qui a passé au travers de la petite région $\rho(A_{i,j}) \subset S$ dans la direction de l'orientation de S où $A_{i,j} = \{(u, v) : u_i \leq u \leq u_{i+1}, v_j \leq v \leq v_{j+1}\}$. Il ne faut pas oublier que les vecteurs $\frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j)$ et $\frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j)$ sont tangents à la surface S au point $\rho(u_i, v_j)$.

La somme

$$\sum_{A_{i,j} \in \mathcal{P}} F(\rho(u_i, v_j)) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j) \right) \Delta u_i \Delta v_j$$

est une approximation du volume total de fluide qui traverse S dans la direction de la surface S . À la limite, lorsque $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$, nous obtenons ce volume. Or, d'après la définition

de l'intégrale de Reimann, nous avons

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u, v) \right) dA \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{A_{i,j} \in \mathcal{P}} \mathbf{F}(\rho(u_i, v_j)) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u_i, v_j) \right) \Delta u_i \Delta v_j \end{aligned}$$

Donc $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ est le volume total de fluide qui traverse S . ♠

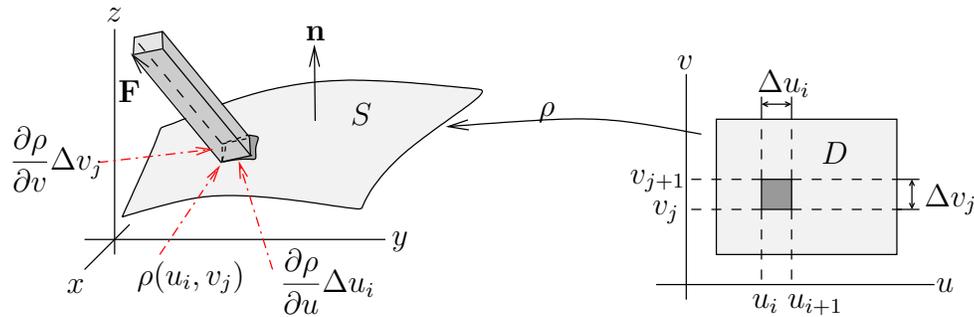
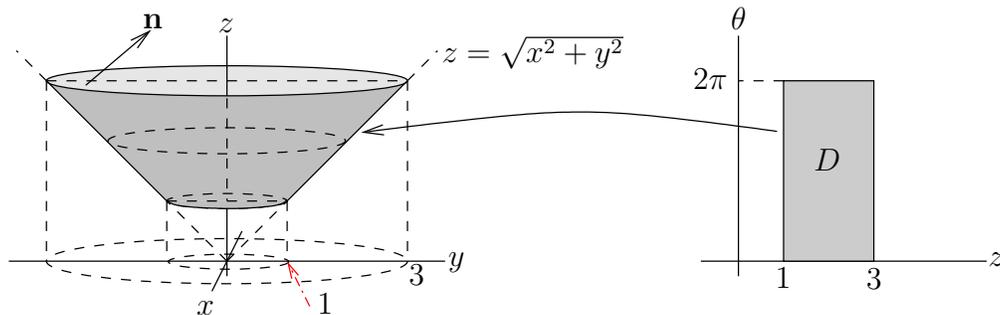


FIGURE 16.10 – L'intégrale du champ de vecteurs F sur une surface représente le flux au travers de cette surface dans la direction de l'orientation de la surface comme il est expliqué à la remarque 16.3.13.

Exemple 16.3.14

Calculons le flux du champ de vecteur $F(x, y, z) = (xz, yz, -z^2)$ qui passe au travers de la surface donnée par $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ pour $1 \leq z \leq 3$. L'orientation de la surface est donnée par le vecteur normal \mathbf{n} qui pointe vers le haut.



Nous utilisons la représentation paramétrique suivante.

$$(x, y, z) = (z \cos(\theta), z \sin(\theta), z)$$

pour $1 \leq z \leq 3$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Chaque tranche horizontale de S est un cercle de rayon z . Soit

$$\mathbf{m} = \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)$$

$$= (\cos(\theta), \sin(\theta), 1) \times (-z \sin(\theta), z \cos(\theta), 0) = (-z \cos(\theta), -z \sin(\theta), z) .$$

Puisque $z > 0$, le vecteur \mathbf{m} est un vecteur normal à la surface S qui pointe vers le haut, donc dans la direction de l'orientation de la surface S .

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (z^2 \cos(\theta), z^2 \sin(\theta), -z^2) \cdot (-z \cos(\theta), z \sin(\theta), z) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 (-2z^3) \, dz \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} z^4 \Big|_{z=1}^{z=3} \right) \, d\theta = -40 \int_0^{2\pi} d\theta = -80\pi . \end{aligned}$$



Si la surface S est le graphe d'une fonction $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$. Nous pouvons utiliser la représentation paramétrique $\rho(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + g(x, y)\mathbf{k}$ for $(x, y) \in D$ dans les formules d'intégration précédentes. Nous avons

$$d\mathbf{S} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) dA$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(x, y) &= \frac{\epsilon}{\left\| \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) \right\|} \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) , \end{aligned}$$

où $\epsilon = 1$ ou -1 selon le choix du vecteur qui donne l'orientation de la surface S .

Comme nous avons vu,

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right)^2 + 1} \, dA .$$

De plus, si nous exprimons le champ de vecteurs F dans la forme $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ où $F_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, nous obtenons

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \epsilon \iint_D \left(-F_1(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x} - F_2(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y} + F_3(x, y, g(x, y)) \right) dA ,$$

où $\epsilon = 1$ si $\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right)$ pointe dans la direction de $\mathbf{n}(x, y, z)$ et $\epsilon = -1$ autrement.

16.3.2 Les variétés

Cette section demande une connaissance minimale de la topologie qui n'a pas été présentée dans ce document. Par contre, plusieurs des notions requises peuvent être comprises à partir des figures que nous avons incluses.

Cette section fournit une définition mathématique de ce qu'est une surface dans \mathbb{R}^3 . Pour ce faire, nous avons besoin de définir une « représentation paramétrique locale » d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$

Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 et $\mathbf{x} \in S$. Une **représentation paramétrique locale** au point \mathbf{x} est composée de trois objets :

1. Un voisinage ouvert $V_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^3$ de \mathbf{x} .
2. Un sous-ensemble ouvert D de \mathbb{R}^2 .
3. Une fonction continue, injective et surjective dont la fonction inverse est aussi continue (i.e. un homéomorphisme), $\rho : D \rightarrow S_{\mathbf{x}} \equiv S \cap V_{\mathbf{x}}$.

Les ensembles ouverts de S sont donnés par la topologie induite de \mathbb{R}^3 (figure 16.11).

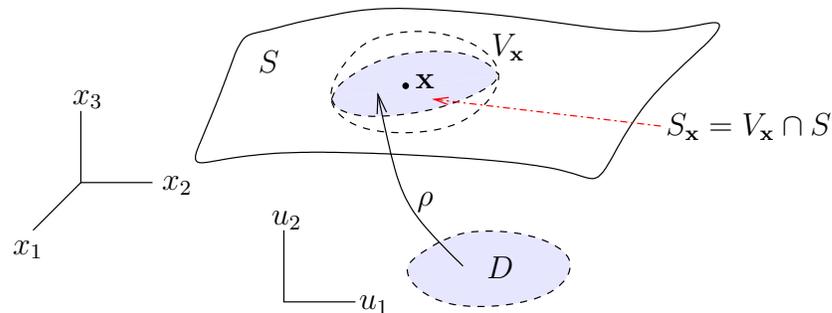


FIGURE 16.11 – $(D, V_{\mathbf{x}}, \rho)$ est un représentation paramétrique locale au point \mathbf{x} à l'intérieur de la surface S .

Exemple 16.3.15

Soit S la sphère de rayon 2 centrée à l'origine. Nous pouvons vérifier que tous les points de S possèdent une représentation paramétrique locale.

- Si $\mathbf{x} \in S$ avec $x_3 > 0$, nous pouvons choisir la représentation paramétrique locale associée à $V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$, $D = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{u}\| < 2\}$ et $\rho(\mathbf{u}) = \left(u_1, u_2, \sqrt{4 - u_1^2 - u_2^2}\right)$ (figure 16.12).
- Si $\mathbf{x} \in S$ avec $x_2 > 0$, nous pouvons choisir la représentation paramétrique locale associée à $V_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0\}$, $D = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{u}\| < 2\}$ et $\rho(\mathbf{u}) = \left(u_1, \sqrt{4 - u_1^2 - u_2^2}, u_2\right)$ (figure 16.13).
- ...

En procédant de cette manière, nous pouvons nous assurer que tout point de S possède une représentation paramétrique locale. 

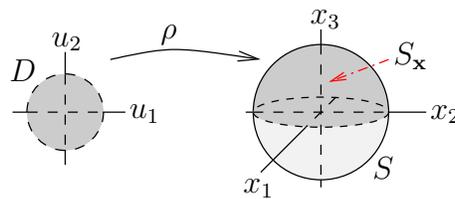


FIGURE 16.12 – La représentation paramétrique locale pour un point de l'hémisphère supérieur d'une sphère définie à l'exemple 16.3.15.

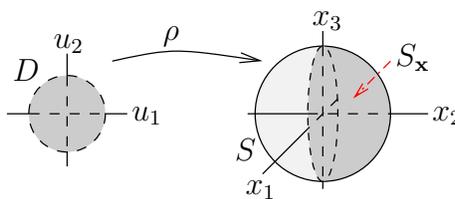


FIGURE 16.13 – La représentation paramétrique locale pour un point de l'hémisphère d'une sphère définie à l'exemple 16.3.15 pour $x_2 > 0$.

Exemple 16.3.16

Par contre, ce ne sont pas tous les points de la demi-sphère fermée

$$S_f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 2 \text{ et } x_3 \geq 0 \}$$

qui possèdent une représentation paramétrique locale. Les points du cercle

$$S_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 2 \text{ et } x_3 = 0 \}$$

ne possèdent pas de représentation paramétrique locale. Si nous considérons le point \mathbf{a} sur la frontière S_1 de S (figure 16.14), nous ne pouvons pas trouver d'ensembles ouverts $D \subset \mathbb{R}^2$ et $V_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^3$, et de fonction injective, surjective et continue ρ qui va de D à $S_{\mathbf{a}}$. L'ensemble D n'as pas de frontière alors que $S_{\mathbf{a}}$ en a une. ♣

Il n'en reste pas moins que S_f est une «belle surface» sur laquelle nous aimerions aussi travailler. Il faut généraliser notre définition de représentation paramétrique locale pour inclure les surfaces comme S_f qui ont une frontière. Nous obtenons la définition suivante.

Définition 16.3.17

Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 et $\mathbf{x} \in S$. Une **représentation paramétrique locale** au point \mathbf{x} est composée de trois objets :

1. Un voisinage ouvert $V_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^3$ de \mathbf{x} .

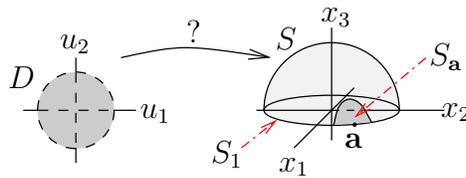


FIGURE 16.14 – La demi-sphère fermée S a une frontière. Un sous ensemble de $S_{\mathbf{a}}$ qui contient le point \mathbf{a} sur la frontière ne peut pas être l'image par une fonction injective, surjective et continue d'un ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 .

2. Un sous-ensemble ouvert D de

$$H = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : u_2 \geq 0 \} .$$

Les ouverts de H sont données par la topologie induite de \mathbb{R}^2 .

3. Une fonction continue, injective et surjective dont la fonction inverse est aussi continue (i.e. un homéomorphisme), $\rho : D \rightarrow S_{\mathbf{x}} \equiv S \cap V_{\mathbf{x}}$.

Nous dénotons cette représentation paramétrique locale par $(D, V_{\mathbf{x}}, \rho)$ ou simplement $(V_{\mathbf{x}}, \rho)$ s'il n'est pas nécessaire de spécifier D . Les ensembles ouverts de S sont donnés par la topologie induite de \mathbb{R}^3 (figures 16.11 et 16.15).

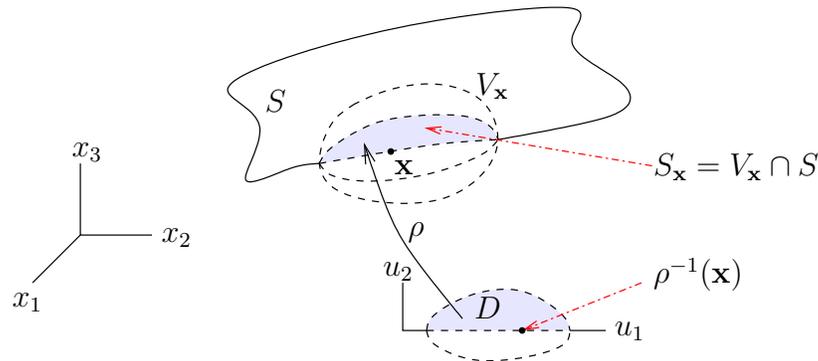


FIGURE 16.15 – $(D, V_{\mathbf{x}}, \rho)$ est un représentation paramétrique locale au point \mathbf{x} au bord de la surface S .

Nous pouvons maintenant définir mathématiquement ce qu'est une surface (avec bord) dans \mathbb{R}^3 .

Définition 16.3.18

Une **surface** ou **variété** (avec bord)¹ $S \subset \mathbb{R}^3$ (de classe C^0) est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 qui satisfait les conditions suivantes :

1. Pour tout $\mathbf{x} \in S$, il existe une représentation paramétrique locale au point \mathbf{x} .
2. Soit $(D_i, V_{\mathbf{x}_i}, \rho_i)$ une représentation paramétrique locale de $\mathbf{x}_i \in S$ pour $i = 1$ et 2. Si l'intersection de $S_{\mathbf{x}_1} = V_{\mathbf{x}_1} \cap S$ et $S_{\mathbf{x}_2} = V_{\mathbf{x}_2} \cap S$ n'est pas vide, alors

$$\rho_2^{-1} \circ \rho_1 : \rho_1^{-1}(S_{\mathbf{x}_1} \cap S_{\mathbf{x}_2}) \rightarrow D_2 \subset \mathbb{R}^2 \quad (16.3.4)$$

est continue (figure 16.16).

Si $\rho_2^{-1} \circ \rho_1$ en (16.3.4) est de classe C^k , nous disons que S est une surface (avec bord) de classe C^k .

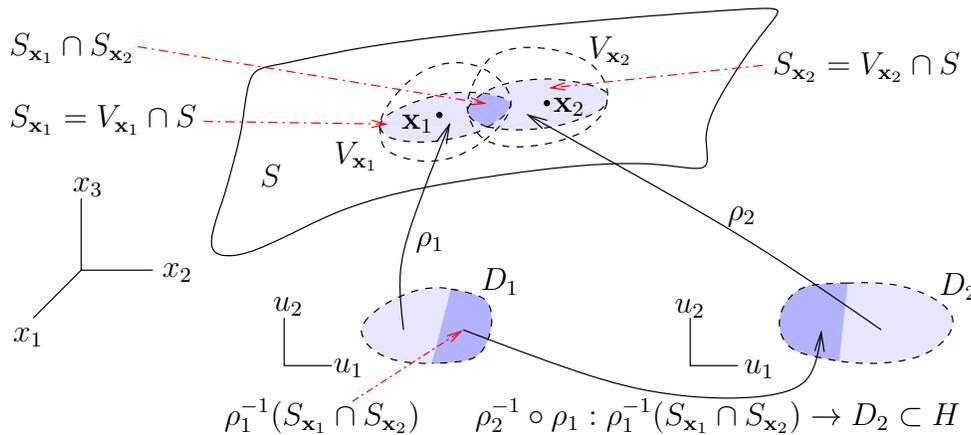


FIGURE 16.16 – La composition $\rho_2^{-1} \circ \rho_1$ des représentations paramétriques locales donne une application continue (ou C^k selon le cas) de $\rho_1^{-1}(S_{\mathbf{x}_1} \cap S_{\mathbf{x}_2})$ dans \mathbb{R}^2 .

Soit S une surface. Un point $\mathbf{x} \in S$ est appelé un **point intérieur** de S s'il existe une représentation paramétrique locale $(D, V_{\mathbf{x}}, \rho)$ de \mathbf{x} telle que $D \subset \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : u_2 > 0\}$. Un point $\mathbf{x} \in S$ est appelé un **point au bord** de S s'il existe une représentation paramétrique locale $(D, V_{\mathbf{x}}, \rho)$ de \mathbf{x} telle que $\rho^{-1}(\mathbf{x}) \in \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : u_2 = 0\}$. L'ensemble des points au bord de S est dénoté ∂S et est appelé le **bord** de S .

Le lecteur peut vérifier que la sphère de rayon 2 centrée à l'origine est une surface sans bord dans \mathbb{R}^3 . Cependant, la demi-sphère fermée S_f de l'exemple 16.3.16 est une surface avec bord dans \mathbb{R}^3 .

Les résultats sur l'intégration de fonctions et champs de vecteurs que nous énonçons dans ce chapitre ne font pas référence aux variétés. Cependant, ils sont tous valides pour les variétés

1. En géométrie différentielle, nous ne parlons pas d'une surface avec bord mais parlons seulement d'une variété avec bord.

avec les modifications requises. Cela est dû au fait que la valeur d'une intégrale ne change pas sur un ensemble de « mesure zéro ». De plus, nous utilisons le concept de partition de l'unité pour étendre l'intégration aux variétés qui ne peuvent pas être exprimées avec une seule représentation paramétrique mais requièrent un certain nombre de représentations paramétriques locales. Nous n'explorerons pas ce sujet car cela nous amènerait à l'étude du calcul vectoriel sur les variétés, un sujet au-delà du contenu de ce document.

16.4 Théorèmes de Stokes et de Green

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée dont la frontière ∂S est une courbe fermée. **L'orientation positive de ∂S** est la direction le long de la courbe ∂S telle que si une personne marche dans cette direction en gardant la tête dans la direction du vecteur normal unitaire \mathbf{n} qui détermine l'orientation de la surface S , l'intérieure de la surface S se trouve à gauche de la personne (figure 16.17).

Théorème 16.4.1 (Théorème de Stokes)

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 et F un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur V . Si V contient la surface orientée S , alors

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} \quad (16.4.1)$$

où l'intégrale le long de la courbe ∂S est dans la direction donnée par l'orientation positive de ∂S .

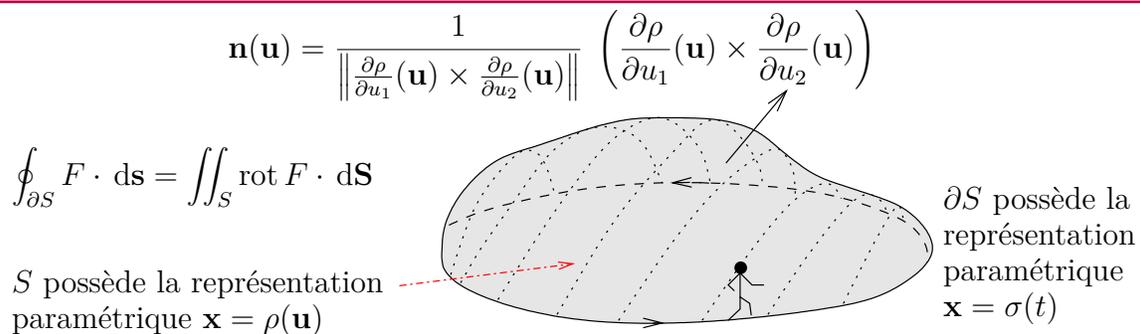


FIGURE 16.17 – Théorème de Stokes

Exemple 16.4.2

Soit $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$. Calculons $\int_C F \cdot ds$ où C est la courbe donnée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 9$ et du plan contenant les points $(0, 1, 3)$, $(2, 0, 2)$ et $(2, -1, 1)$. L'orientation sur C est dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque vue du dessus ; c'est-à-dire, d'un point $(0, 0, z)$ pour $z > 0$ très grand.

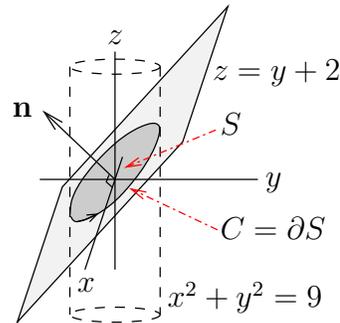
Premièrement, il faut trouver l'équation du plan. Il y a plusieurs façon de résoudre ce problème. Nous choisissons une approche géométrique. Deux vecteurs parallèles au plan qui contient les points $(0, 1, 3)$, $(2, 0, 2)$ et $(2, -1, 1)$ sont $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 3) - (2, 0, 2) = (-2, 1, 1)$ et $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 1) - (2, 0, 2) = (0, -1, -1)$. Un vecteur perpendiculaire au plan est $\mathbf{m} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (0, -2, 2)$. L'équation du plan est donnée par la formule

$$\mathbf{m} \cdot ((x, y, z) - (0, 1, 3)) = 0 \Rightarrow -2(y - 1) + 2(z - 3) = 0 \quad .$$

Nous obtenons $z = y + 2$.

Nous pourrions donner une représentation paramétrique de la courbe C qui est l'intersection du plan $z = y + 2$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 9$, et calculer directement l'intégrale $\int_C F \cdot ds$. Nous ne ferons pas cela.

Nous avons que C est le bord ∂S de la partie S du plan $z = y + 2$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ comme nous pouvons le voir dans le dessin ci-dessous.



Si nous utilisons le Théorème de Stokes pour calculer l'intégrale, nous obtenons

$$\int_C F \cdot ds = \int_{\partial S} F \cdot ds = \iint_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } F \cdot \mathbf{n} dS \quad .$$

Un représentation paramétrique de la surface S est fourni par

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r \sin(\theta) + 2)$$

pour $0 \leq r \leq 3$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface S qui est associé à la direction requise sur la courbe C est $\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{m}\|} \mathbf{m} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Puisque

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| \\ &= \|(\cos(\theta), \sin(\theta), \sin(\theta)) \times (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), r \cos(\theta))\| \\ &= \left\| \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\| = \|(0, -r, r)\| = \sqrt{2} r \end{aligned}$$

et

$$\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{pmatrix} = (-y, -z, -x)$$

si nous développons les déterminants selon la première ligne, nous avons que $dS = \sqrt{2} r dA$ et

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot ds &= \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (-r \sin(\theta), -r \sin(\theta) - 2, -r \cos(\theta)) \cdot \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2} r d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (r^2 \sin(\theta) + 2r - r^2 \cos(\theta)) d\theta dr \\ &= \int_0^3 \left(-r^2 \cos(\theta) + 2r\theta - r^2 \sin(\theta) \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 4\pi \int_0^3 r dr = 18\pi . \end{aligned}$$



Soit S une surface dans le plan $z = 0$. Faisons trois observations.

1. Si nous utilisons la représentation paramétrique $\rho_1(x, y) = x$, $\rho_2(x, y) = y$ et $\rho_3(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in D = \{(x, y) : (x, y, 0) \in S\}$, nous obtenons que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \rho}{\partial y}(x, y) = \mathbf{k}$$

et

$$d\mathbf{S} = \mathbf{k} dS = \mathbf{k} dA .$$

2. Si $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de ∂S , alors $\sigma'_3(t) = 0$ pour tout t et ainsi $dz = \sigma'_3(t) dt$ est nul.
3. Si F est un champ de vecteurs telle que $F_3(x, y, z) = 0$ pour tout $(x, y, z) \in S$, et F_1 et F_2 sont indépendantes de z , alors

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} .$$

Si nous utilisons ces trois observations dans la formule (16.4.1) de l'énoncé du Théorème de Stokes, où l'intégrale le long de ∂S est dans la direction associée à l'orientation positive de S donnée par le vecteur \mathbf{k} , nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 16.4.3 (Théorème de Green)

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 et $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j}$ un champ de vecteurs de

classe C^1 défini sur V . Si V contient la région S , alors

$$\oint_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad (16.4.2)$$

où l'orientation de ∂S est « globalement » dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (figure 16.18).

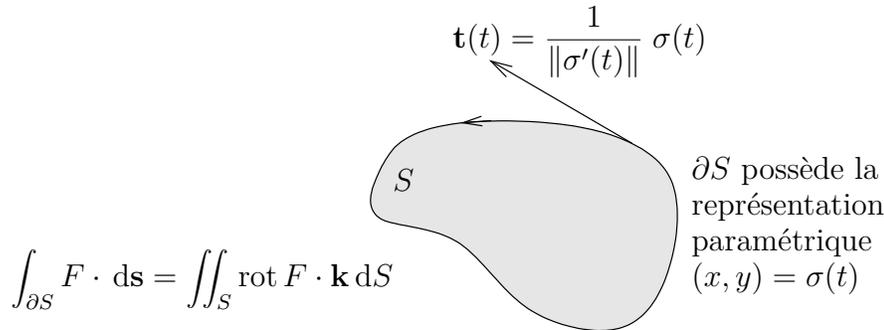


FIGURE 16.18 – Théorème de Green

Exemple 16.4.4

Soit l'anneau S borné par les cercles $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 9$. Calculons le flux du champ de vecteurs $F(x, y) = (x^4 - y^3, x^3 + y^4)$ qui circule le long de la frontière $\Gamma = \partial S$ de l'anneau.

Nous pouvons soit calculer directement $\int_{\partial S} F \cdot ds$ ou utiliser le Théorème de Green avec $F_1(x, y) = x^4 - y^3$ et $F_2(x, y) = x^3 + y^4$. Nous obtenons

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy = \int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 3 \int_S (x^2 + y^2) dx dy.$$

Pour évaluer cette dernière intégrale double, nous utilisons les coordonnées polaire

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

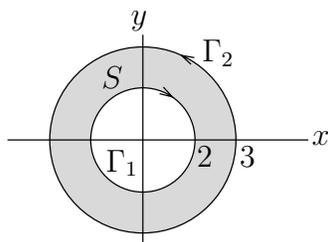
pour $2 \leq r \leq 3$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = |r| = r,$$

car $r > 0$ sur S , nous avons

$$3 \int_S (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} \int_2^3 r^3 dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_{r=2}^{r=3} d\theta = \frac{195}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{195\pi}{2}.$$

Vérifions en calculant l'intégrale $\int_{\partial S} F \cdot ds$ que nous obtenons bien la même réponse. Nous avons que ∂S est l'union de Γ_1 , le cercle $x^2 + y^2 = 4$, et Γ_2 , le cercle $x^2 + y^2 = 9$. L'orientation positive de ∂S implique que la direction sur Γ_1 est dans le sens des aiguilles d'une montre alors que la direction sur Γ_2 est dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.



Pour Γ_1 , nous utilisons la représentation paramétrique $x = 2 \cos(\theta)$ et $y = -2 \sin(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ pour obtenir une représentation paramétrique qui est consistante avec la direction dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour Γ_2 , nous utilisons la représentation paramétrique $x = 3 \cos(\theta)$ et $y = 3 \sin(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ pour obtenir une représentation paramétrique qui est consistante avec la direction dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot ds &= \int_{\Gamma_1} F \cdot ds + \int_{\Gamma_2} F \cdot ds \\ &= \int_0^{2\pi} (16 \cos^4(\theta) + 8 \sin^3(\theta), 8 \cos^3(\theta) + 16 \sin^4(\theta)) \cdot (-2 \sin(\theta), -2 \cos(\theta)) d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (81 \cos^4(\theta) - 27 \sin^3(\theta), 27 \cos^3(\theta) + 81 \sin^4(\theta)) \cdot (-3 \sin(\theta), 3 \cos(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-32 \cos^4(\theta) \sin(\theta) - 16 \sin^4(\theta) - 16 \cos^4(\theta) - 32 \sin^4(\theta) \cos(\theta)) d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (-243 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 81 \sin^4(\theta) + 81 \cos^4(\theta) + 284 \sin^4(\theta) \cos(\theta)) d\theta \\ &= 65 \int_0^{2\pi} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, nous utilisons l'identité trigonométrique « bien connue » $\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) = \frac{7}{4} \cos(4\theta) + \frac{3}{4}$. Ainsi,

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds = 65 \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{4} \cos(4\theta) + \frac{3}{4} \right) d\theta = 65 \left(\frac{7}{16} \sin(4\theta) + \frac{3\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{195\pi}{2}$$

comme prévu. ♣

Remarque 16.4.5

La formule (16.4.2) du Théorème de Green avec le champ de vecteur $F(x, y) = x\mathbf{j}$ (i.e. $F_1(x, y) = 0$ et $F_2(x, y) = x$) donne

$$\int_{\partial S} x dy = \iint_S dx dy .$$

C'est-à-dire que $\int_{\partial S} x \, dy$ est l'aire de la région S . De même, la formule (16.4.2) du Théorème de Green avec le champ de vecteur $F(x, y) = -y\mathbf{i}$ (i.e. $F_1(x, y) = -y$ et $F_2(x, y) = 0$) donne

$$-\int_{\Gamma} y \, dx = \iint_S dx \, dy .$$

Encore là, $-\int_{\Gamma} y \, dx$ est l'aire de la région S . En combinant linéairement ces deux résultats, le lecteur peut créer de nouvelles formules pour calculer l'aire de régions dans le plan à l'aide du Théorème de Green. ♠

Exemple 16.4.6

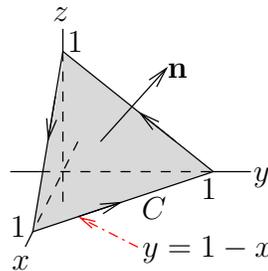
Calculons l'aire de la région S bornée par la courbe Γ définie par $x = \cos^3(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La courbe Γ est un cercle légèrement déformé. Nous remarquons aussi que Γ respecte l'orientation positive de la frontière de S ; c'est-à-dire, l'orientation est dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Ainsi, l'aire de la région S est

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma} y \, dx &= \int_0^{2\pi} 3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \, d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta))(1 - \cos(2\theta)) \, d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(2\theta)) \, d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2}(1 + \cos(4\theta))\right) \, d\theta \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4\theta)) \, d\theta = \frac{3}{8} \left(\theta - \frac{\sin(\theta)}{4}\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4} . \end{aligned}$$

♣

Exemple 16.4.7

Calculons $\int_C F \cdot ds$ où $F(x, y, z) = (xy + \cos(z^2))\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + (xz - 2xz \sin(z^2))\mathbf{k}$ et C est le triangle de sommets aux points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. La direction sur C est dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque nous regardons C à partir d'un point sur l'axe des z avec z assez grand, au moins $z > 1$.



Nous pourrions calculer $\int_C F \cdot ds$ directement en donnant une représentation paramétrique pour C . Pour éviter ce travail, nous utilisons le Théorème de Stokes. Soit S la surface produite par le triangle de sommets aux points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Puisque $C = \partial S$, nous avons

$$\int_C F \cdot ds = \iint_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S}$$

où l'orientation sur S est donnée par un vecteur normal à la surface S qui pointe dans la direction des z positifs. Avec ce choix, la direction dans le sens des aiguilles d'une montre sur C correspond à la direction positive imposée par l'orientation de la surface S .

Nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy + \cos(z^2) & yz & xz - 2xz \sin(z^2) \end{pmatrix} \\ &= -y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k} \end{aligned}$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne. Pour obtenir un vecteur normal à la surface S et ainsi l'équation du plan contenant S , nous utilisons les vecteurs $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$ et $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$ qui sont deux vecteurs parallèles à la surface S . Un vecteur normal à la surface S est donnée par $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-1, -1, -1)$. Malheureusement, ce vecteur pointe dans la mauvaise direction pour l'orientation de S . Nous prenons donc le vecteur normal $\mathbf{m} = (1, 1, 1)$. L'équation du plan qui contient S est donnée par

$$\langle \mathbf{m}, ((x, y, z) - (1, 0, 0)) \rangle = \mathbf{m} \cdot (x - 1, y, z) = x - 1 + y + z = 0 .$$

Nous obtenons $z = 1 - x - y$.

Nous utilisons la représentation paramétrique suivante pour S .

$$(x, y, z) = (x, y, z = 1 - x - y)$$

pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1 - x$. Puisque

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1) = \mathbf{m} ,$$

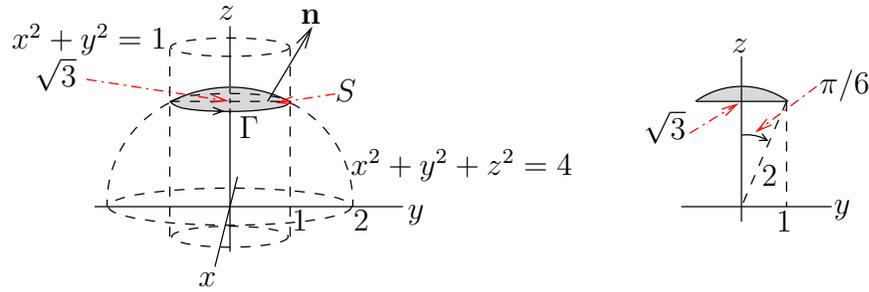
la représentation paramétrique est consistante avec l'orientation de S . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot ds &= \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-y, -(1-x-y), -x) \cdot (1, 1, 1) dy dx \\ &= - \int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx = - \int_0^1 \left(y \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dy dx = - \int_0^1 (1-x) dy dx \\ &= - \left(x - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} . \end{aligned}$$



Exemple 16.4.8

Considérons la surface S qui est la partie supérieure de la sphère de rayon 2 centrée à l'origine qui se trouve à l'intérieur du cylindre de rayon 1 dont l'axe est l'axe des z . Calculons $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S}$ où $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ de vecteurs défini par $F(x, y, z) = (z(x-y)^2, -z(x+y)^2, e^{xy})$.



Nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z(x-y)^2 & -z(x+y)^2 & e^{xy} \end{pmatrix} \\ &= (xe^{xy} + (x+y)^2) \mathbf{i} + (-ye^{xy} + (x-y)^2) \mathbf{j} + (-4yz) \mathbf{k} \end{aligned}$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne.

Si nous utilisons la représentation paramétrique

$$(x, y, z) = (2 \cos(\theta) \sin(\phi), 2 \sin(\theta) \sin(\phi), 2 \cos(\phi))$$

pour $1 \leq \phi \leq \pi/6$ et $0 \leq \theta < 2\pi$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \\ &= (-2 \sin(\theta) \sin(\phi), 2 \cos(\theta) \sin(\phi), 0) \times (2 \cos(\theta) \cos(\phi), 2 \sin(\theta) \cos(\phi), -2 \sin(\phi)) \\ &= (-4 \cos(\theta) \sin^2(\phi), -4 \sin(\theta) \sin^2(\phi), -4 \sin(\phi) \cos(\phi)) . \end{aligned}$$

Puisque $-4 \sin(\phi) \cos(\phi) < 0$ pour $0 \leq \phi \leq \pi/6$, le vecteur \mathbf{m} est un vecteur normal à la surface S qui pointe vers le bas, donc dans la direction opposée à l'orientation de la surface S . Ainsi, $d\mathbf{S} = -\mathbf{m} dA$ et

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \operatorname{rot} F(2 \cos(\theta) \sin(\phi), 2 \sin(\theta) \sin(\phi), 2 \cos(\phi)) \\ &\quad \cdot (4 \cos(\theta) \sin^2(\phi), 4 \sin(\theta) \sin^2(\phi), 4 \sin(\phi) \cos(\phi)) d\phi d\theta \end{aligned}$$

Nous laissons aux lecteurs courageux la tâche de calculer cette intégrale. Essayons de contourner ce calcul à l'aide du Théorème de Stokes.

Nous avons que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} F \cdot ds$$

où $\Gamma = \partial S$ est la courbe qui possède la représentation paramétrique

$$(x, y, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \sqrt{3})$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$. Cette représentation paramétrique a l'orientation positive de Γ associée à la surface S . Donc

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} F(\cos(\theta), \sin(\theta), \sqrt{3}) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta .$$

Nous laissons encore aux lecteurs la tâche de calculer cette intégrale. Cette intégrale est plus simple mais demande quand même de long calculs.

Considérons la surface T définie par $x^2 + y^2 \leq 1$ et $z = \sqrt{3}$. Nous avons que $\Gamma = \partial T$. La direction positive de Γ qui a été utilisé plus tôt est la direction positive imposée par l'orientation de T si celle-ci est donnée par le vecteur $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Grâce au Théorème de Taylor, nous pouvons conclure que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Gamma} F \cdot d\mathbf{s} = \iint_T \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \iint_T \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{k} dS .$$

Considérons la représentation paramétrique de T donnée par

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \sqrt{3})$$

pour $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Nous avons

$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| dA \\ &= \|(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \times (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0)\| dA = \|(0, 0, r)\| dA = r dA . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_T \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_T -4yz dS = -4\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\theta) dr d\theta \\ &= -4\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^{r=1} \right) \sin(\theta) d\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{3} (-\cos(\theta)) \Big|_0^{2\pi} = 0 . \end{aligned}$$

C'est un bel exemple qui démontre bien qu'une utilisation judicieuse du Théorème de Stokes peut énormément simplifier les calculs. ♣

16.4.1 Une deuxième interprétation physique du rotationnel

Nous considérons un champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ et \mathbf{v} un vecteur unitaire arbitraire mais fixe. Soit S_r un disque de rayon r centré en \mathbf{x}_0 perpendiculaire au vecteur \mathbf{v} . Assumons que \mathbf{v} détermine l'orientation de S_r . Nous représentons cette situation à la figure 16.19.

Il découle du Théorème de Stokes que

$$\int_{C_r} F \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_r} \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_r} \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{v} dS$$

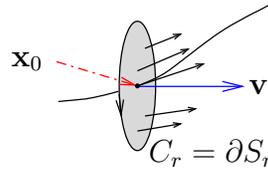


FIGURE 16.19 – Interprétation physique du rotationnel à l’aide du Théorème de Stokes. Quelques vecteurs du champ de vecteurs F sur la surface S_r sont représentés. Le vecteur \mathbf{v} n’est pas un vecteur du champ de vecteurs mais seulement un vecteur perpendiculaire à la surface S_r .

où $C_r = \partial S_r$ est la frontière de la surface S_r . L’orientation sur C_r est l’orientation positive sur C_r imposée par le vecteur \mathbf{v} qui détermine l’orientation de S_r . Il découle du Théorème de la moyenne pour les intégrales que

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{S_r} \text{rot } F \cdot \mathbf{v} \, dS = \text{rot } F(\mathbf{x}_r) \cdot \mathbf{v}$$

pour un point \mathbf{x}_r de S_r . Donc

$$\text{rot } F(\mathbf{x}_r) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot ds .$$

Puisque $\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_0$, nous obtenons

$$\text{rot } F(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \lim_{r \rightarrow 0} \text{rot } F(\mathbf{x}_r) \cdot \mathbf{v} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot ds = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{t} \, ds$$

où $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ est un vecteur unitaire tangent à la courbe C_r au point \mathbf{x} sur la courbe. Puisque $F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x})$ est la longueur de la composante du champ de vecteurs F tangente à la courbe C_r au point \mathbf{x} de la courbe, $\int_{C_r} F \cdot \mathbf{t} \, ds$ représente le déplacement le long de C_r . Donc, pour r très petit, $\frac{1}{\pi r^2} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{t} \, ds$ peut être vu comme une mesure de la rotation autour du point \mathbf{x}_0 par unité d’aire dans le plan perpendiculaire à \mathbf{v} . Donc, lorsque $r \rightarrow 0$, $\text{rot } F(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$ mesure la rotation autour du point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{v} .

Notons que $\text{rot } F(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$ atteint sa valeur maximale pour $\mathbf{v} = \frac{1}{\|\text{rot } F(\mathbf{x}_0)\|} \text{rot } F(\mathbf{x}_0)$. Dans ce cas, $\text{rot } F(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \|\text{rot } F(\mathbf{x}_0)\|$. Nous pouvons conclure que la vitesse angulaire de rotation par rapport à l’axe $\text{rot } F(\mathbf{x}_0)$ au point \mathbf{x}_0 est $\|\text{rot } F(\mathbf{x}_0)\|$.

16.5 Théorème de la divergence

Soit $Q \subset \mathbb{R}^3$ un solide bornée par une surface orientée S . L’orientation positive de la surface S est donnée par le vecteur normal unitaire $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ qui pointe vers l’extérieur de Q en tout point $\mathbf{x} \in S$.

Théorème 16.5.1 (Théorème de la divergence)

Soit V un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 et F un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur V . Si Q est un solide bornée par la surface S (i.e. $S = \partial Q$) et $Q \subset V$, alors

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \iint_S F \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_Q \operatorname{div} F dV,$$

où \mathbf{n} est le vecteur associé à l'orientation positive de la surface S ; c'est-à-dire, qui pointe vers l'extérieur du solide Q (figure 16.20).

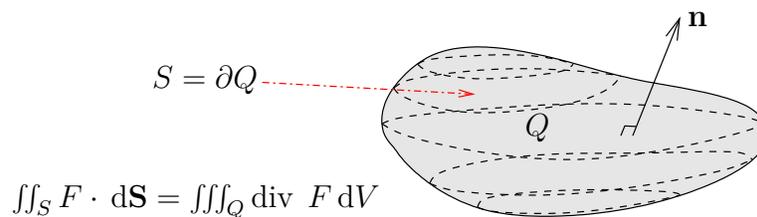
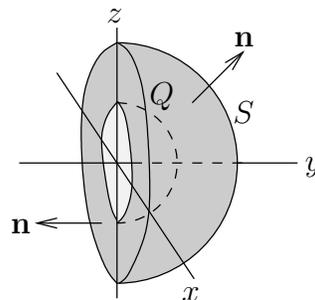


FIGURE 16.20 – Théorème de la divergence

Exemple 16.5.2

Considérons la région Q bornée par les demi-sphères de rayons 1 et 2 centrées à l'origine qui se trouvent dans la région $y \geq 0$, et l'anneau $1 \leq x^2 + z^2 \leq 2$ pour $y = 0$. La frontière $S = \partial D$ de cette région possède l'orientation positive donnée par le vecteur normal unitaire \mathbf{n} qui pointe vers l'extérieur de la région D . Calculons le flux du champ de vecteurs $F = (x^3 + y \sin(z), y^3 + z \sin(x), z^3)$ qui passe au travers de la surface S .



Nous pourrions calculer l'intégrale $\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$ directement. Nous invitons le lecteur à faire ce calcul. Cependant, nous allons utiliser le Théorème de la divergence. Nous avons que

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \iiint_Q \operatorname{div} F dV$$

Utilisons la substitution suivante pour calculer l'intégrale triple.

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi))$$

pour $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Ce sont les coordonnées sphériques pour x , z et y (attention à l'ordre des coordonnées). Puisque

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \phi, r)} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & \cos(\theta) \sin(\phi) \\ 0 & -r \sin(\phi) & \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin(\phi) \end{aligned}$$

car $0 \leq \phi \leq \pi/2$, et

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 3r^4 \sin(\phi) \, dr \, d\phi \, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^5}{5} \Big|_{r=1}^{r=2} \right) \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{93}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\cos(\phi) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \right) \, d\theta = \frac{93}{5} \int_0^{2\pi} \, d\theta = \frac{186\pi}{5}. \end{aligned}$$

♣

16.6 Exercices

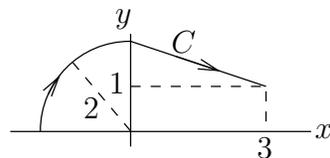
16.6.1 Intégrale le long d'une courbe

Question 16.1

Évaluez l'intégrale $\int_C F \cdot ds$ où F est le champ de vecteurs défini par $F(x, y, z) = (xz, y+z, x)$ et C est la courbe avec la représentation paramétrique $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, e^{2t})$ qui va du point $(1, 1, 1)$ au point (e, e^{-1}, e^2) .

Question 16.2

Évaluez l'intégrale $\int_C x\sqrt{y} \, dx + 2xy \, dy$ où C est le trajet décrit dans le dessin suivant.

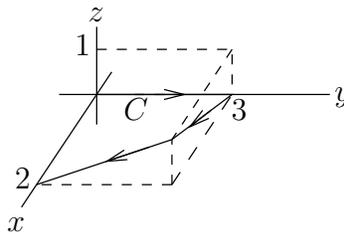


Question 16.3

Soit C la courbe qui est composée de l'arc de cercle (centré à l'origine) de $(0, 1)$ à $(1, 0)$ et suivie du segment de droite de $(1, 0)$ à $(-1, 0)$. Calculez le travail nécessaire pour déplacer une particule le long de C si le champ de vecteurs est donné par $F(x, y) = (x + 2y)\mathbf{i} + (-2x + y)\mathbf{j}$.

Question 16.4

Une particule est soumise à une force $F = (yz, xz, y)$ lorsqu'elle se déplace le long du trajet C représenté dans le dessin ci-dessous. La particule part de l'origine pour terminer son trajet au point $(2, 0, 0)$.



Calculez le travail nécessaire pour déplacer la particule le long de ce trajet.

16.6.2 Rotationnel et divergence**Question 16.5**

Pour chacun des champs de vecteurs F suivants, déterminez s'il est conservateur et, s'il est conservateur, trouvez une fonction f telle que $\nabla f = F$.

- $F(x, y) = (ye^{xy} + 4x^3y, xe^{xy} + x^4)$
- $F(x, y) = (2xye^{xz} + x^2ye^{xz}, x^2e^{xz}, x^3ye^{xz})$
- $F(x, y, z) = (2xy \cos(xyz) - x^2y^2z \sin(xyz), x^2 \cos(xyz) - x^3z \sin(xyz), -x^3y^2 \sin(xyz))$
- $F(x, y, z) = (yz, xy^2 + xz, xy)$

Question 16.6

Considérez le champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$F(x, y, z) = (e^x \cos(z), y, -e^x \sin(z)) .$$

- Montrez que ce champ de vecteurs est conservateur sans calculer $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$.
- Trouvez un fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F = \nabla f$.

Question 16.7

Pour chacun des champs de vecteurs F donnés ci-dessous, calculez $\int_C F \cdot ds$ le long de la courbe C donnée.

Suggestion : Dans certains cas, il serait utile de vérifier si le champ de vecteurs est conservateur.

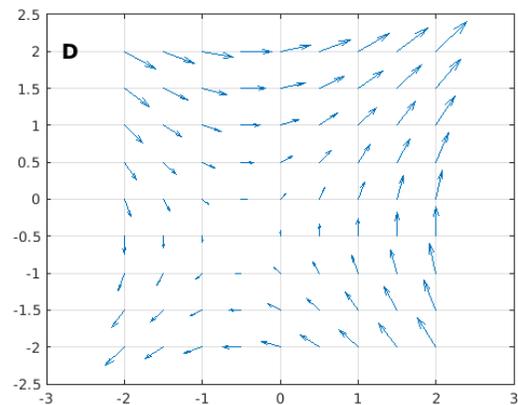
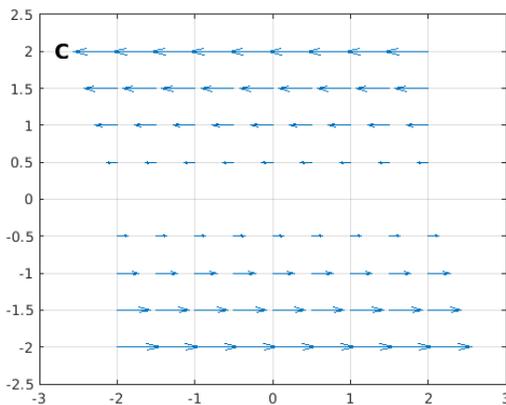
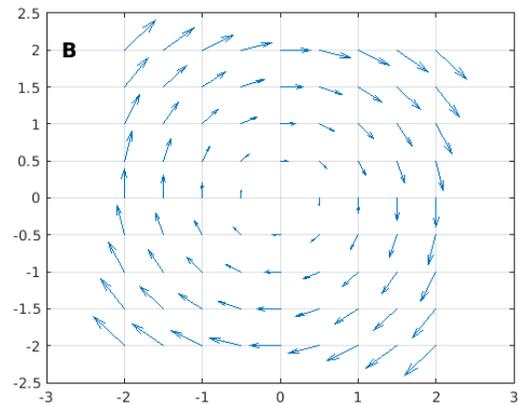
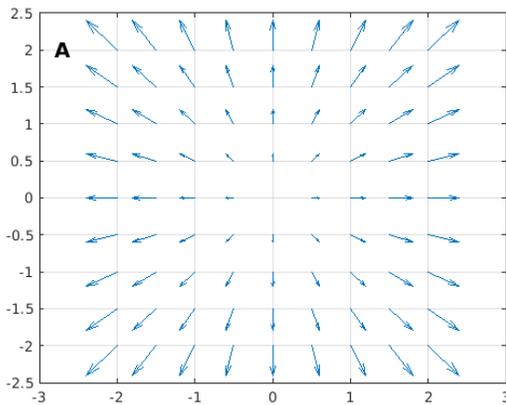
- a) $F(x, y) = e^{2y}\mathbf{i} + (1 + 2xe^{2y})\mathbf{j}$ et C est la courbe orientée donnée par la représentation paramétrique $\rho(t) = (te^t, 1 + t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
- b) $F(x, y, z) = (6xy^3 + 2z^2)\mathbf{i} + (9x^2y^2)\mathbf{j} + (4xz + 1)\mathbf{k}$ et C est une droite qui va de $(1, 0, 2)$ à $(-2, 1, 3)$.
- c) $F(x, y) = (2x + y^2 + 3x^2y)\mathbf{i} + (2xy + x^3 + 3y^2)\mathbf{j}$ et C est la partie de la courbe $y = x \sin(x)$ qui va du point $(0, 0)$ au point $(\pi, 0)$.
- d) $F(x, y, z) = (ye^{xy} + ze^{xz}, xe^{xy} + ze^{yz}, xe^{xz} + ye^{yz})$ et C est la courbe orientée définie par $\rho(t) = (\ln(t) \cos(t), \ln(t) \sin(t), t)$ pour $1 \leq t \leq \pi$.
- e) $F(x, y, z) = 2xyz \mathbf{i} + (x^2z + z \cos(yz)) \mathbf{j} + (x^2y + y \cos(yz) + 2z) \mathbf{k}$ et C est la droite qui va de $(0, 0, 0)$ à $(2, \pi, 1/2)$.
- f) $F(x, y, z) = 2xy^2\mathbf{i} + 2(x^2 + 1)y\mathbf{j} - 4z\mathbf{k}$ et C est la courbe du point $(e, 1, e)$ au point $(1/e, 1, 1/e)$ définie par $\rho(t) = e^{\cos(t)}\mathbf{i} + e^{\sin(t)}\mathbf{j} + e^{\cos(t)}\mathbf{k}$ pour $0 \leq t \leq \pi$.

Question 16.8

Chacune des figures ci-dessous représente un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^2 .

- a) Quels sont les champs de vecteurs irrotationnel (i.e. de rotationnel nul)?
- b) Quels sont les champs de vecteurs à divergence nulle?

Justifiez vos réponses. La longueur des vecteurs détermine la force du champ de vecteurs.



16.6.3 Intégrale sur une surface

Question 16.9

Évaluez l'intégrale $\iint_S xy \, dS$ où S est la surface du cylindre $y^2 + z^2 = 4$ entre les surface $y = 0$ et $y = 3 - x$.

Question 16.10

Évaluez l'intégrale $\iint_S (x^2 + y^2)z \, dS$ où S est la surface de la partie supérieure de la sphère de rayon 2 centrée à l'origine qui est à l'intérieur du cylindre de rayon $\sqrt{2}$ dont l'axe principal est l'axe des z .

Question 16.11

Quelle est la masse de l'entonnoir donnée par l'équation $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ dont le rayon de la base de l'entonnoir est 1 et le rayon du dessus de l'entonnoir est 3. La densité est donnée par $\rho(x, y, z) = 8 - z$.

Question 16.12

Quelle est l'aire de la partie de la parabolôide $y = x^2 + z^2$ qui est à l'intérieur du cylindre $x^2 + z^2 = 9$.

Question 16.13

Quelle est l'aire de la partie de la parabolôide $z = x^2 + y^2 - 4$ qui est à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Question 16.14

Calculez l'aire de la surface S du solide obtenu par l'intersection de la balle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$ et de la région $z \geq (x^2 + y^2)/2$.

Question 16.15

Calculez l'aire de la partie S du cylindre $x^2 + z^2 = a^2$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = a^2$. Dessinez cette surface.

Question 16.16

Calculez l'aire de la partie S de la surface de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = ax$. Dessinez cette surface.

Question 16.17

Calculez l'intégrale $\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$ où $F(x, y, z) = (x, y, z)$ et S est la partie du parabolôide $z = x^2 + y^2$ pour $z \leq 4$. L'orientation sur la surface S est donnée par un vecteur normal unitaire qui point dans la direction de z positif.

Question 16.18

Calculez le flux du champ de vecteur $F(x, y, z) = (xy, y^2, yz)$ qui passe au travers de la partie de la sphère de rayon 2 centrée à l'origine qui se trouve dans la région $y \geq 0$. L'orientation sur la sphère est donnée par un vecteur normal unitaire dans la direction de y positif.

Question 16.19

Calculer le flux du champ de vecteurs $F(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ au travers de la partie du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui se trouve entre les plans $z = 2$ et $z = 3$. L'orientation de la surface est donnée par la normale qui pointe dans la direction de z négatif.

Question 16.20

Calculez le flux du champ de vecteur $F(x, y, z) = (y, x, z)$ qui passe au travers de l'hélicoïde S décrit par la représentation paramétrique

$$\rho(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$$

pour $(u, v) \in D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}$. L'orientation de la surface est donnée par le vecteur normal unitaire \mathbf{n} qui pointe dans la direction de z positif.

Question 16.21

Soit $F(x, y, z) = (x, \cos(xy), z)$ et S la surface du cylindre $x^2 + z^2 = a^2$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre $y^2 + z^2 = a^2$. L'orientation sur S est donnée par un vecteur unitaire normal qui pointe vers l'extérieur du cylindre $x^2 + z^2 = a^2$. Calculez $\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$.

16.6.4 Théorèmes de Stokes et de Green**Question 16.22**

Utilisez le Théorème de Green pour évaluez l'intégrale $\int_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$ où C est la frontière de la région D du premier quadrant (c'est-à-dire, $x, y \geq 0$) définie par $x^2 + y^2 \leq 1$. L'orientation de C est dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Question 16.23

Évaluez l'intégrale $\int_C (y + e^{x^2}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy$ où C est la frontière de la région D bornée par les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$. L'orientation de C est dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Question 16.24

Nous voulons déplacer une particule le long de la courbe C qui part de l'origine pour se rendre au point $(2, 0)$ en longeant l'axe des x , puis se rendre au point $(-2, 0)$ en longeant la partie supérieure du cercle $x^2 + y^2 = 4$, et finalement revenir à l'origine encore en longeant l'axe des x . Calculez le travail nécessaire pour déplacer une particule le long de ce trajet si le champ de vecteurs est $F = (x, x^3 + 3xy^2)$.

Question 16.25

Soit $F(x, y, z) = (yz, xy, xz)$ et C le rectangle de sommets aux points $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 2)$ et $(0, 1, 2)$. Supposons que C soit parcourue dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre lorsque nous l'observons d'un point $(0, 0, z)$ avec $z > 2$. Utilisez le Théorème de Stokes pour calculer l'intégrale $\int_C F \cdot ds$.

Question 16.26

Soit $F(x, y, z) = (y^2, x, z)$. Utilisez le Théorème de Stokes pour calculer l'intégrale $\int_C F \cdot ds$ où C est la courbe donnée par l'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et du plan contenant les points $(0, 2, 0)$, $(1, 1, 1)$ et $(-1, 1, 2)$. L'orientation sur C est dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque vue du dessus (i.e. d'un point $(0, 0, z)$ pour $z > 0$ très grand).

Question 16.27

Soit S la surface de la parabolôide $z = 4 - x^2 - y^2$ qui se trouve dans la région $x, y, z \geq 0$. Calculez $\int_C F \cdot ds$ où le champ de vecteur F est défini par $F(x, y, z) = -yz(1 - z)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ et la direction sur la courbe $C = \partial S$ est dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre lorsque que vu d'un point sur l'axe des z avec $z > 4$.

Question 16.28

Soit $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{k}$ et S la partie du parabolôide d'équation $z = x^2 + y^2$ pour $z \leq 4$. L'orientation sur S est donnée par un vecteur unitaire qui pointe dans la direction de z positif. Calculez $\iint_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S}$.

Question 16.29

Soit $F(x, y, z) = z^3 e^{xz^2}\mathbf{i} + z^4 e^{yz^2}\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ et S la surface du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ pour $2 \leq z \leq 4$. L'orientation sur S est donnée par un vecteur unitaire normal qui pointe vers l'extérieur du cylindre. Calculez $\iint_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S}$.

16.6.5 Théorème de la divergence**Question 16.30**

Soit $F(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$ et S la surface du tétraèdre bornée par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$. L'orientation de S est donnée par une normale unitaire à S qui pointe vers l'extérieure. Calculez $\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$ à l'aide du Théorème de la divergence.

Question 16.31

Soit $F(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + (z^3 + \cos(y^2))\mathbf{k}$ et E le solide délimité par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et les plans $z = 0$ et $z = 2$. L'orientation sur la surface S de E est donnée par une normale unitaire qui pointe vers l'extérieure. Calculez le flux de F qui s'échappe de ce solide; c'est-à-dire, calculez $\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$.

Question 16.32

Soit $F(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + 2xz^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ et E le solide délimité par le parabolôide $z = 4 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 0$. L'orientation sur la surface S de E est donnée par la normale unitaire qui pointe vers l'extérieure. Calculez le flux de F qui s'échappe de ce solide; c'est-à-dire, calculez $\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$.



Systemes d'equations differentielles d'ordre un



17

Ce chapitre est une très brève introduction aux systemes d'equations differentielles d'ordre un. Le but principal de cette introduction est de convaincre le lecteur de l'importance que ces systemes ont en science et genie.

Nous presentons une approche qualitative a l'etude des systemes d'equations differentielles d'ordre un. Puisque ces systemes peuvent avoir un grand nombre d'inconnues, essayer de les resoudre analytiquement demanderait un travail enorme et cela en supposant que c'est possible. Nous utilisons normalement des methodes numeriques pour « resoudre » les systemes d'equations differentielles d'ordre un. Mais meme avec ces methodes, il est souvent tres difficile d'analyser ces systemes. C'est pour cette raison que l'etude qualitative des systemes d'equations differentielles d'ordre un est tres importante.

Nous fournirons une analyse complete dans le cas des systemes d'equations differentielles lineaires d'ordre un. C'est le mieux que nous puissions faire. La section sur l'analyse global nous fournit des outils pour l'analyse qualitative des systemes d'equations differentielles non-lineaire d'ordre un. La section sur l'equation de Van der Pol et la section sur le systeme predateurs-proies fournissent deux exemples simples de systemes d'equations differentielles non-lineaires d'ordre un qui presentent une dynamique beaucoup plus complexe que celle que nous pouvons observer pour les systemes d'equations differentielles lineaires d'ordre un. L'approche dans ces deux dernieres sections est tres intuitive et informelle. C'est seulement la pointe de l'iceberg de ce sujet d'etudes.

17.1 Introduction

Exemple 17.1.1 (Systeme predateurs-proies)

Cet exemple est present dans la majorite des manuels de mathematiques pour les sciences biologiques. Nous nous sommes inspire de Murray [10] pour la presentation qui suit.

L'exemple classique d'un systeme d'equations differentielles d'ordre un est le systeme qui decrit le nombre d'individus de deux especes animales; une espece representant les proies et l'autre representant les predateurs. Les deux especes sont en competition pour leur existence.

Nous pouvons imaginer que, si les predateurs devorent trop de proies, ces predateurs mettront en danger leur propre existence en detruisant leur source de nourriture. Par contre, si le nombre de proies devient tres grand, il sera facile pour les predateurs de capturer des

proies et le nombre de prédateurs va augmenter. Qu'arrivera-t-il à long terme ? Est-ce que les espèces vont disparaître ? Est-ce qu'il s'établira un équilibre entre le nombre de proies et de prédateurs ?

Nous pouvons décrire l'interaction entre les deux espèces à l'aide d'équations différentielles. Soit $q(t)$ le nombre de proies au temps t et $p(t)$ le nombre de prédateurs au temps t dans un espace donné (e.g. par km^2). Le choix des unités pour le temps est déterminé par l'espérance de vie des proies et prédateurs. Les unités de temps normalement utilisées pour les mammifères sont les années. Pour certains insectes nous utiliserons les jours.

Lotka et Voltera, deux biomathématiciens à une époque où nous ne parlions pas de biomathématiques, développèrent séparément (en 1920 et 1926 respectivement) le système d'équations différentielles d'ordre un suivant.

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= q(a - bp) \\ \frac{dp}{dt} &= p(cq - d)\end{aligned}\tag{17.1.1}$$

où a , b , c et d sont des constantes positives. Ce système d'équations différentielles porte maintenant le nom de **système (d'équations différentielles) de Lotka-Voltera**.

Commençons par expliquer le rôle et la signification des constantes dans le système (17.1.1). S'il n'y a pas d'interaction entre les proies et les prédateurs, le nombre de proies et de prédateurs est décrit par les équations différentielles

$$\frac{dq}{dt} = aq \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = -dp.$$

Ces deux équations sont indépendantes et peuvent être résolues par la méthode de séparation des variables. La constante a représente le taux relatif de croissance pour les proies et la constante $-d$ représente le taux relatif de croissance pour les prédateurs. Dans ce dernier cas, le taux de croissance est négatif car les prédateurs vont disparaître par manque de nourriture si la population de proies est absente.

Nous représentons le nombre de contacts entre les proies et les prédateurs par le produit pq . Ainsi, le terme $-bpq$ du côté droit de la première équation en (17.1.1) a un effet négatif sur le taux de croissance des proies car $-bpq \leq 0$. Par contre le terme cqp du côté droit de la deuxième équation en (17.1.1) a un effet positif sur le taux de croissance car $cqp \geq 0$. Cela est consistant avec le fait que lorsqu'un prédateur entre en contact avec une proie, c'est la proie qui est la grande perdante.

Le système (17.1.1) semble dépendre de quatre paramètres : a , b , c et d . Par contre, il existe une dépendance entre ces quatre paramètres qui cache la simplicité du système. Le raisonnement suivant est appelé **non-dimensionalisation** et permet de réduire le nombre de paramètres au nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire la comportement qualitatif de (17.1.1).

Si nous posons

$$q(t) = \frac{d}{c}u(\alpha t), \quad p(t) = \frac{a}{b}v(\alpha t) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{d}{a},$$

nous obtenons

$$q'(t) = \frac{d}{c} \frac{d}{dt} u(at) = \frac{da}{c} u'(at)$$

et

$$p'(t) = \frac{a}{b} \frac{d}{dt} v(at) = \frac{a^2}{b} v'(at) .$$

Ainsi, (17.1.1) donne

$$\frac{da}{c} u'(at) = \frac{d}{c} u(at) \left(a - b \frac{a}{b} v(at) \right) = \frac{ad}{c} u(at) (1 - v(at)) \quad (17.1.2a)$$

et

$$\frac{a^2}{b} v'(at) = \frac{a}{b} v(at) \left(c \frac{d}{c} u(at) - d \right) = \frac{ad}{b} v(at) (u(at) - 1) . \quad (17.1.2b)$$

Si nous multiplions les deux côtés de (17.1.2a) par $\frac{c}{ad}$ et ceux de (17.1.2b) par $\frac{b}{a^2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} u'(at) &= u(at) (1 - v(at)) \\ v'(at) &= \frac{d}{a} v(at) (u(at) - 1) = \alpha v(at) (u(at) - 1) . \end{aligned}$$

Finalement, si nous ajustons le temps en posant $\tau = at$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1 - v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u - 1) \end{aligned} \quad (17.1.3)$$

Qualitativement, (17.1.3) est équivalent à (17.1.1) ; c'est-à-dire que nous pouvons représenter tous les types de solutions que (17.1.1) possède en variant le paramètre α seulement.

Dans ce chapitre, nous développerons des outils pour analyser les systèmes d'équations différentielles d'ordre comme (17.1.3). 

Exemple 17.1.2 (Compétition – exclusion)

Comme pour l'exemple précédent, nous nous sommes inspiré de Murray [10] pour la présentation qui suit.

Le deuxième exemple de systèmes d'équations différentielles d'ordre un décrit le comportement de deux espèces animales, l'espèce P et l'espèce Q, restreintes à un même territoire et ayant la même source de nourriture.

Soit $p(t)$ le nombre d'individus de l'espèce P au temps t et $q(t)$ le nombre d'individus de l'espèce Q au temps t dans un espace donné. Comme à l'exemple précédent, le choix des unités pour le temps est déterminé par l'espérance de vie des deux espèces.

Si les deux espèces occupent des milieux distincts, ils n'entrent donc pas en compétition pour la nourriture, alors p est gouverné par une équation logistique et il en est de même pour q . Ce type d'équation a été étudié au chapitre sur les équations différentielles. Nous avons

$$\frac{dp}{dt} = ap \left(1 - \frac{p}{M_p}\right) \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dt} = bq \left(1 - \frac{q}{M_q}\right) . \quad (17.1.4)$$

La constante $a > 0$ est associée au taux de croissance relatif de l'espèce P et la constante $b > 0$ est associée à celui de l'espèce Q. M_p est le nombre maximal d'individus de l'espèce P que le milieu peut supporter et M_q est le nombre maximal d'individus de l'espèce Q que le milieu peut supporter.

Les équations différentielles ci-dessus décrivent la situation où la consommation de nourriture d'une espèce n'a pas d'effet sur l'autre espèce. Par contre, si les deux espèces occupent le même milieu, elles entrent en compétition pour la nourriture disponible. Pour décrire le nombre d'individus d'une espèce, il faut donc tenir compte du nombre d'individus de l'autre espèce.

Nous considérons le système d'équations différentielles d'ordre un suivant.

$$\frac{dp}{dt} = ap \left(1 - \frac{p + cq}{M_p}\right) \quad (17.1.5a)$$

$$\frac{dq}{dt} = bq \left(1 - \frac{q + dp}{M_q}\right) \quad (17.1.5b)$$

Les constantes positives c et d sont déterminées par la quantité de nourriture consommée par chacun des individus des deux espèces – Peut-être qu'un individu de l'espèce P a besoin pour survivre du double de la quantité de nourriture qu'un individu de l'espèce Q a besoin pour survivre. Les constantes c et d peuvent aussi dépendre de l'état de la source de nourriture après le passage d'une espèce – Peut-être que les individus d'une espèce détruisent plus de nourriture qu'ils en consomment.

Le terme $(p + cq)/M_p$ du côté droit de (17.1.5a) joue le même rôle que le terme p/M_p dans l'équation logistique à gauche dans l'équation (17.1.4). Il faut tenir compte de l'impact de l'espèce Q sur la source de nourriture. Un individu de l'espèce Q a un effet qui est c fois celle d'un individu de l'espèce P. De même, le terme $(q + dp)/M_q$ du côté droit de (17.1.5b) joue le même rôle que le terme q/M_q dans l'équation logistique à droite dans l'équation (17.1.4). Il faut maintenant tenir compte de l'impact de l'espèce P sur la source de nourriture. Un individu de l'espèce P a un effet qui est d fois celle d'un individu de l'espèce Q.

Le nombre de contacts entre les deux espèces est représenté par le produit pq . Nous parlons de contact lorsque les individus des deux espèces se nourrissent à la même source.

Le système (17.1.5) semble dépendre de six paramètres : a, b, c, d, M_p et M_q . Nous pouvons utiliser la technique de **non-dimensionalisation** pour éliminer certains des paramètres.

Si nous posons

$$p(t) = M_p u(at) \quad , \quad q(t) = M_q v(at) \quad ,$$

$$\alpha = \frac{b}{a} \quad , \quad \rho = \frac{c M_q}{M_p} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{d M_p}{M_q} .$$

et que nous ajustons le temps en posant $\tau = at$, le système (17.1.5) devient le système

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1 - u - \rho v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(1 - v - \xi u) \end{aligned} \tag{17.1.6}$$

Nous laissons aux lecteurs le soin de vérifier cette conclusion. Nous avons réduit le nombre de paramètres à trois. Comme à l'exemple précédent, (17.1.5) et (17.1.6) sont équivalant qualitativement. ♣

Exemple 17.1.3

L'exemple suivant provient en grande partie de Borelli et Coleman [3].

Pour qu'un médicament contre le rhume soit efficace, il faut que la quantité du médicament dans le sang du patient soit plus grande qu'une certaine valeur minimale pour une période suffisamment longue.

Nous analysons deux médicaments contre le rhume : un décongestionnant et un antihistaminique.

Une seule dose

Le nombre d'unités $x(t)$ d'un médicament dans l'estomac au temps t en heures satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x \tag{17.1.7}$$

et le nombre d'unités $y(t)$ de ce médicament dans le sang au temps t en heures satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y . \tag{17.1.8}$$

Les constantes k_1 et k_2 sont positives et déterminées par le médicament considéré.

$k_1 x(t)$ est le taux d'assimilation du médicament au temps t par le sang qui traverse l'estomac et $k_2 y(t)$ est le taux d'élimination du médicament au temps t par le foie et les reins.

S'il y a initialement $x(0) = A$ unités du médicament (le patient avale une dose de A unités) et $y(0) = 0$ unité (il n'y a aucune trace du médicament dans le sang car c'est la première dose que le patient reçoit), alors la solution de (17.1.7) et (17.1.8) est

$$x(t) = Ae^{-k_1 t} \quad , \quad y(t) = -\frac{Ak_1 e^{-k_1 t}}{k_1 - k_2} + \frac{Ak_1 e^{-k_2 t}}{k_1 - k_2} .$$

Pour un décongestionnant, nous estimons que $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$. Supposons que le patient prenne initialement $A = 1$ unité du médicament. Nous obtenons alors les graphes de x et y donnés à la figure 17.1a.

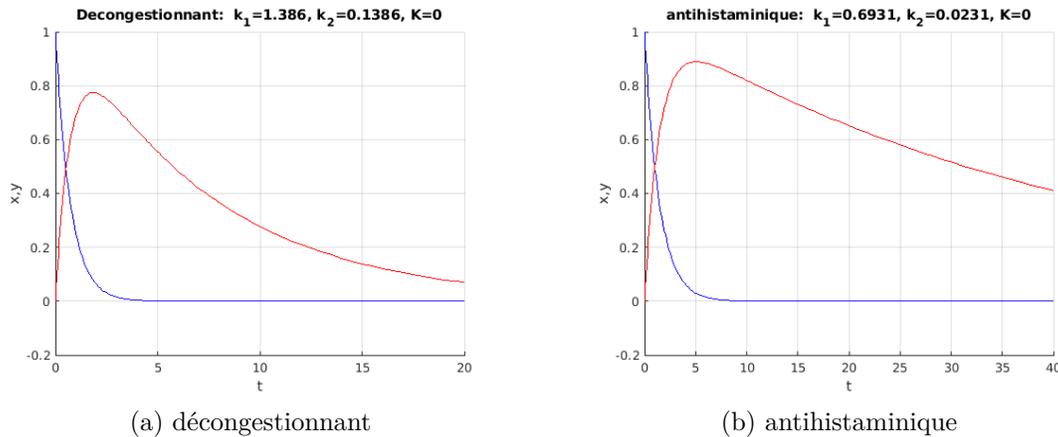


FIGURE 17.1 – (a) Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une seule dose. (b) Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une seule dose.

Pour un antihistaminique, nous estimons que $k_1 = 0.6931$ et $k_2 = 0.0231$. Supposons encore que le patient prenne initialement $A = 1$ unité du médicament. Nous obtenons les graphes de x et y donnés à la figure 17.1b.

Si seulement les quantités de médicament dans le sang sont considérées, l'antihistaminique semble avoir un plus long effet. Par contre, le décongestionnant semble agir plus rapidement.

Un médicament administré de façon continue

Certaines pilules sont formées d'un très grand nombre de petites boules qui se dissolvent dans l'estomac à des rythmes différents. Le résultat est que le médicament n'est pas absorbé par l'estomac d'un seul coup comme dans le cas précédent mais il est absorbé par l'estomac à un taux constant de K unités par heure (pour la durée de la pilule).

Supposons que la fréquence à laquelle le patient prend une pilule soit telle que le taux d'absorption dans l'estomac soit constant à K unités par heure, alors le nombre d'unités $x(t)$ dans l'estomac au temps t en heures et le nombre d'unités $y(t)$ dans le sang au temps t en heures sont gouvernés par les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= K - k_1x \\ \frac{dy}{dt} &= k_1x - k_2y \end{aligned} \quad (17.1.9)$$

Dans le présent problème, nous avons $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$ unité initialement. La condition $x(0) = 0$ ne veut pas dire que le patient ne prend pas de médicament. Le patient reçoit une dose de K unités par heure. La condition $x(0) = 0$ veut dire que le patient n'a pas de médicament dans l'estomac au départ. De même, $y(0) = 0$ veut dire que le patient n'a pas de médicament dans le sang au départ.

La solution de (17.1.9) est

$$x(t) = -\frac{K(-1 + e^{-k_1 t})}{k_1}$$

$$y(t) = -\frac{K(-k_1 + k_2 - k_2 e^{-k_1 t} + k_1 e^{-k_2 t})}{k_2(k_1 - k_2)}$$

La quantité $x(t)$ du médicament dans l'estomac converge vers $x = K/k_1$ lorsque t tend vers l'infini (de plus, $x'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$) et la quantité $y(t)$ du médicament dans le sang converge vers $y = K/k_2$ lorsque t tend vers plus l'infini (de plus, $y'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$).

Utilisons les valeurs $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$ pour un décongestionnant qui ont été données précédemment et supposons que $K = 1$ unité par heure. Nous obtenons alors les graphes de x et y donnés à la figure 17.2a.

Utilisons les valeurs $k_1 = 0.6931$ et $k_2 = 0.0231$ pour un antihistaminique qui ont été données précédemment et supposons toujours que $K = 1$ unité par heure. Nous obtenons alors les graphes de x et y donnés à la figure 17.2b.

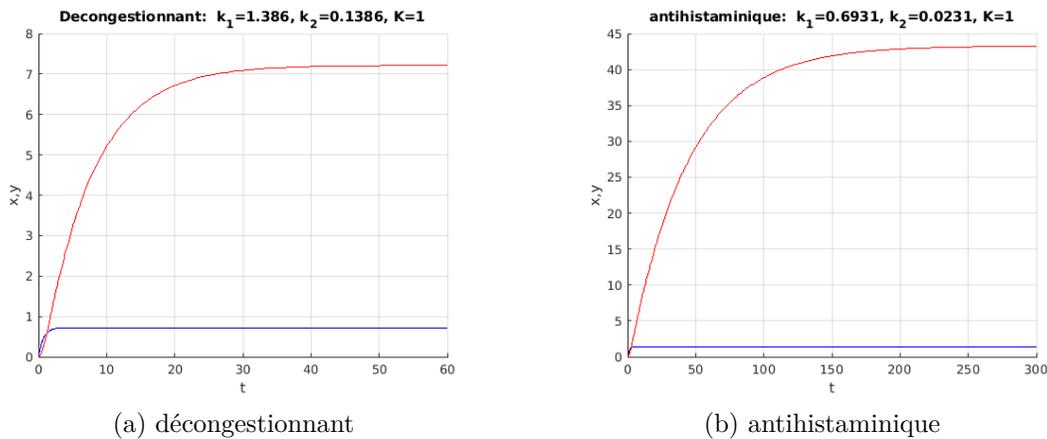


FIGURE 17.2 – (a) Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication administré de façon continue. (b) Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication administré de façon continue.

Le décongestionnant et l'antihistaminique ont des comportements semblables à long terme dans le présent cas. $x'(t) \rightarrow 0$ et $y'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Plus précisément, $x(t)$ est asymptotique à $x = K/k_1$ et $y(t)$ est asymptotique à $x = K/k_2$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Si seulement les quantités de médicament dans le sang sont considérées, le décongestionnant commence à agir beaucoup plus rapidement que l'antihistaminique. Par contre, l'action de l'antihistaminique est beaucoup plus forte.

Un médicament administré à intervalle régulier

Dans l'exemple précédent, nous avons supposé que le médicament est absorbé par l'estomac à un taux constant de K unités par heure (pour la durée de la pilule) et que le patient prend une pilule à intervalle régulier de façon à maintenir le taux d'absorption constant à K unités par heure. C'est une situation idéale qui est presque impossible à satisfaire.

La situation suivante est plus réaliste. Supposons que le type de pilules utilisée soit celui de la section précédente. Plus précisément, supposons que le médicament entre dans l'estomac à un taux constant de $K = 12$ unités par heure durant une demi-heure. Après une demi-heure, la pilule a été complètement assimilée par l'organisme et il n'y a plus de médicament qui entre dans l'estomac. De plus, supposons que le patient prend une pilule à toutes les six heures.

Le taux d'absorption par l'estomac du médicament est décrit par la formule

$$F(t) = \sum_{n=0}^N K(H(t + 6n) - H(t - 0.5 + 6n))$$

où H est la fonction de Heaviside définie par

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et $N + 1$ est le nombre de pilules prises par le patient. Le graphe de F pour les quatre premières pilules (i.e. $N = 3$) est donné à la figure 17.3. C'est ce que nous appelons une onde carrée.

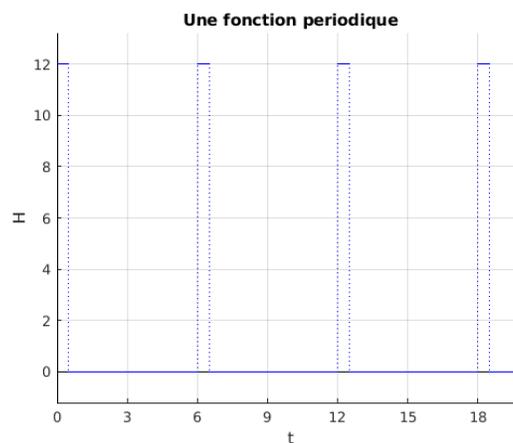


FIGURE 17.3 – Le taux d'absorption d'un médicament pris à intervalles réguliers.

Dans ce cas, le nombre d'unités $x(t)$ dans l'estomac au temps t en heures et le nombre d'unités $y(t)$ dans le sang au temps t en heures sont gouvernés par les équations

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= -k_1x(t) + F(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) &= k_1x(t) - k_2y(t) \end{aligned} \tag{17.1.10}$$

Reprenons les deux types de médicament qui ont été considérés précédemment ; à savoir le décongestionnant et l'antihistaminique.

Remarquons que la première équation de (17.1.10) est indépendante de la fonction y . Cette équation peut donc être résolue à l'aide des transformations de Laplace ; c'est un des sujets d'un premier cours d'équations différentielles. Après avoir trouvé x , la deuxième équation de (17.1.10) devient une équation linéaire d'ordre un pour la fonction y . Nous pourrions (avec amplement de temps et de patience, ou avec un logiciel de calculs symboliques) trouver une expression pour x et y . Puisque nous voulons tracer le graphe des solutions x et y de (17.1.10), au lieu de trouver une expression pour x et y , nous résolvons numériquement le système (17.1.10). Il faut porter une attention particulière aux points où le côté droit de l'équation (17.1.10) est discontinu.

Comme dans le cas de la médication continue, nous supposons que $x(0) = 0$ unité et $y(0) = 0$ unité.

Pour le décongestionnant, nous avons $k_1 = 1.386$ et $k_2 = 0.1386$. Les graphes de x et y sont donnés à la figure 17.4a.

Les graphes à la figure 17.4a suggèrent que la quantité de médication dans l'estomac a un comportement périodique et ne dépassera pas environ 4.5 unités. De plus, la quantité de médication dans le sang semble tendre vers une fonction périodique de moyenne 7 unités et d'amplitude environ 1.8. Nous supposons ici que le patient ne cesse pas de prendre des pilules et donc N augmente. Est-ce que le patient risque d'avoir une surdose du médicament ? Une analyse mathématique plus poussée est nécessaire pour montrer que le patient ne souffrira pas d'une surdose.

Nous traçons le graphe de la quantité d'antihistaminique pour $k_1 = 0.6931$ et $k_2 = 0.0231$ dans l'estomac et dans le sang en fonction du temps à la figure 17.4b. Nous supposons toujours que $x(0) = 0$ unité et $y(0) = 0$ unité.

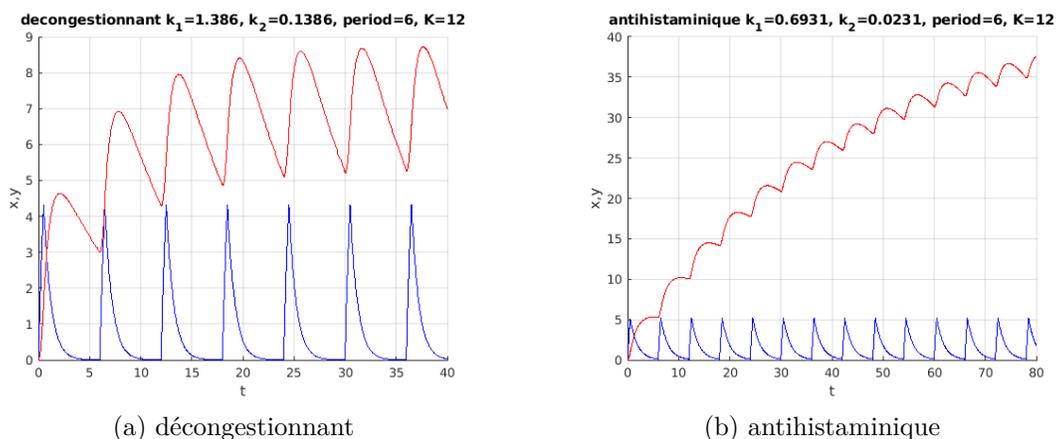


FIGURE 17.4 – (a) Graphes de la quantité de décongestionnant dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication administré à intervalles réguliers. (b) Graphes de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac (en bleu) et dans le sang (en rouge) pour une médication administré à intervalles réguliers.

Comme dans le cas du décongestionnant, le graphe de la quantité d'antihistaminique dans l'estomac en fonction du temps suggèrent que la quantité de médication dans l'estomac a un comportement périodique et ne dépassera pas environ 5 unités. Par contre, la quantité d'antihistaminique dans le sang semble en moyenne augmenter sans borne supérieure. En fait, une étude plus poussée montre que la quantité d'antihistaminique dans le sang approche une fonction périodique de moyenne environ 43 unités et de période environ 1. Dépendant des unités utilisées, nous risquons d'intoxiquer le patient car la quantité d'antihistaminique dans le sang devient en moyenne 11 fois la quantité dans l'estomac. ♣

17.2 Énoncé du problème général

La forme générale d'un **système d'équations différentielles d'ordre un** dans \mathbb{R}^2 est

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2)\end{aligned}\tag{17.2.1}$$

où $f_i :]a, b[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1$ et 2 .

La majorité des définitions et résultats que nous allons énoncer ont un équivalent pour les systèmes d'équations différentielles d'ordre un qui ont plus de deux inconnus et deux équations différentielles. Nous allons nous limiter aux systèmes composés de deux inconnus et deux équations différentielles.

Si f_1 et f_2 ne dépendent pas de t , nous obtenons le **système d'équations différentielles autonomes d'ordre un**

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{17.2.2}$$

où $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1$ et 2 . C'est ce genre de systèmes d'équations différentielles que nous considérons dans ce chapitre. Une forme brève pour (17.2.2) est

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\tag{17.2.3}$$

où

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Le but est de trouver 2 fonctions, $\phi_1 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_2 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, telles que si nous remplaçons x_1 par ϕ_1 et x_2 par ϕ_2 dans (17.2.2) alors l'équation est satisfaite pour tout $t \in]a, b[$.

Définition 17.2.1

Une fonction

$$\begin{aligned}\phi :]a, b[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

est une **solution** du système d'équations différentielles (17.2.2) si

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt}(t) &= f_1(\phi_1(t), \phi_2(t)) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(t) &= f_2(\phi_1(t), \phi_2(t))\end{aligned}$$

pour tout $t \in]a, b[$.

Exemple 17.2.2

Soit le système d'équations différentielles autonome d'ordre un

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 5x_1 - 2x_2\end{aligned}\tag{17.2.4}$$

Les fonctions $\phi_1(t) = e^{3t} - 2e^{-4t}$ et $\phi_2(t) = e^{3t} + 5e^{-4t}$ satisfont (17.2.4) car

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(e^{3t} - 2e^{-4t}) = 3e^{3t} + 8e^{-4t} \\ &= (e^{3t} - 2e^{-4t}) + 2(e^{3t} + 5e^{-4t}) = \phi_1(t) + 2\phi_2(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_2}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(e^{3t} + 5e^{-4t}) = 3e^{3t} - 20e^{-4t} \\ &= 5(e^{3t} - 2e^{-4t}) - 2(e^{3t} + 5e^{-4t}) = 5\phi_1(t) - 2\phi_2(t)\end{aligned}$$

pour tout t . Nous verrons prochainement comment trouver ϕ_1 et ϕ_2 pour un système d'équations différentielles de la forme (17.2.4).

Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 donne la solution

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - 2e^{-4t} \\ e^{3t} + 5e^{-4t} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de (17.2.4). ♣

Il est commun d'imposer une **condition initiale** au système d'équations différentielles (17.2.2). C'est-à-dire, de demander que la solution $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de (17.2.2) satisfasse

$$\phi(t_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) \\ \phi_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$$

pour $t_0 \in]a, b[$ et $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$ donnés.

Exemple 17.2.3

Nous invitons les lecteurs à vérifier que

$$\phi(t) = a_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

est une solution du système d'équations différentielles (17.2.4) de l'exemple 17.2.2 quelles que soient les valeurs données aux constantes a_1 et a_2 .

Pour trouver la solution de (17.2.4) qui satisfasse la condition initiale

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad (17.2.5)$$

il faut déterminer a_1 et a_2 tels que

$$\phi(0) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 \\ a_1 + 5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Si nous résolvons le système d'équations linéaires $a_1 - 2a_2 = 4$ et $a_1 + 5a_2 = -3$, nous trouvons $a_1 = 2$ et $a_2 = -1$. La solution du système (17.2.4) qui satisfait la condition initiale (17.2.5) est

$$\phi(t) = 2e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} + 2e^{-4t} \\ 2e^{3t} - 5e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Nous parlons de « la solution ». Pourrions-nous avoir une autre fonction ϕ qui satisfait ce système d'équations différentielles et la condition initiale? Nous donnerons prochainement des conditions sur le système d'équations différentielles qui assurent l'existence et l'unicité d'une solution. ♣

Définition 17.2.4

L'**orbite** d'une solution $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de (17.2.2) est l'image

$$\{\phi(t) : a < t < b\}$$

de cette solution dans le plan. L'orbite est une courbe dans le plan. Le **portrait de phases** de (17.2.2) est l'ensemble des orbites.

Exemple 17.2.5

L'orbite de la solution

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} + 2e^{-4t} \\ 2e^{3t} - 5e^{-4t} \end{pmatrix}$$

de l'exemple 17.2.3 est la courbe avec une flèche représentée à la figure 17.5. ♣

Puisque nous allons généralement étudier les systèmes d'équations différentielles de la forme (17.2.2) où f_1 et f_2 sont différentiable, le théorème suivant nous assure qu'il y aura toujours une et une seule solution associée à une condition initiale.

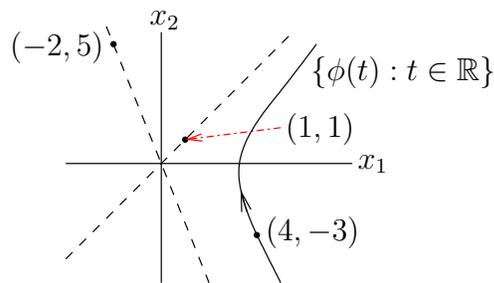


FIGURE 17.5 – L'orbite de la solution $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de l'équation différentielle de l'exemple 17.2.3. La flèche indique le déplacement le long de l'orbite lorsque t augmente.

Théorème 17.2.6

Si les fonctions $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui décrivent le système d'équation différentielles (17.2.2) sont différentiables, alors il existe une et une seule solution ϕ de (17.2.2) qui satisfait la condition initiale $\phi(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 17.2.7

Puisqu'il y a une et une seule solution de (17.2.2) qui passe par un point donné (i.e. qui satisfait une condition initiale donnée), les orbites ne se coupent pas. ♠

Il est généralement très difficile de résoudre les systèmes d'équations différentielles. Très souvent, nous ne sommes pas directement intéressés aux solutions du système d'équations différentielles mais simplement à leur comportement lorsque nous progressons dans le temps. Qu'arrive-t-il aux solutions lorsque nous regardons très loin dans le temps ?

17.3 Systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre un

Nous débutons notre étude des systèmes d'équations différentielles d'ordre un par l'étude d'une classe de systèmes qui sont « très simples » à analyser. Il ne faut pas en conclure que ces systèmes n'auront pas d'importance par la suite. C'est tout à fait le contraire. Ils joueront un rôle primordial dans l'analyse de systèmes d'équations différentielles beaucoup plus compliqués. Les résultats de la présente section et leur généralisation à \mathbb{R}^n sont des outils très fréquemment utilisés par les chercheurs en biomathématiques.

Un **système d'équations différentielles linéaires d'ordre un** dans \mathbb{R}^2 est un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = a x_1 + b x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1 + dx_2$$

où a , b , c et d sont des constantes. Si nous posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

nous pouvons récrire le système d'équations différentielles précédent sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \tag{17.3.1}$$

où

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}.$$

Nos connaissances sur les valeurs et vecteurs propres vont nous permettre de résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre un. En fait, les solutions possibles de (17.3.1), et donc les portraits de phases pour (17.3.1), peuvent être groupés en un petit nombre de classes selon le signe des valeurs propres de A et le nombre de vecteurs propres non colinéaires. Nous résumons les résultats dans les trois propositions suivantes.

Proposition 17.3.1

Si la matrice A de l'équation (17.3.1) possède deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 distinctes, nous choisissons \mathbf{v}_1 un vecteur propre associé à λ_1 et \mathbf{v}_2 un vecteur propre associé à λ_2 . Les solutions de (17.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + a_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \tag{17.3.2}$$

où a_1 et a_2 sont des constantes. Nous retrouvons à la figure 17.6 les portraits de phases possibles dans cette situation.

Proposition 17.3.2

Si la matrice A de l'équation (17.3.1) possède une seule valeur propre λ , il y a deux cas possibles. S'ils existent deux vecteurs propres \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 associés à λ qui ne sont pas colinéaires, alors la solution est donnée par (17.3.2). Si ce n'est pas le cas, les vecteurs propres associés à λ sont donc tous colinéaires, alors les solutions de (17.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + a_2 e^{\lambda t} (\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

où a_1 et a_2 sont des constantes, \mathbf{v} un vecteur propre associé à λ et \mathbf{u} est une solution de $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Nous retrouvons à la figure 17.7 un portrait de phases possible dans ce dernier cas. Les solutions approchent de l'origine lorsque $\lambda < 0$ et s'éloignent de l'origine lorsque $\lambda > 0$.

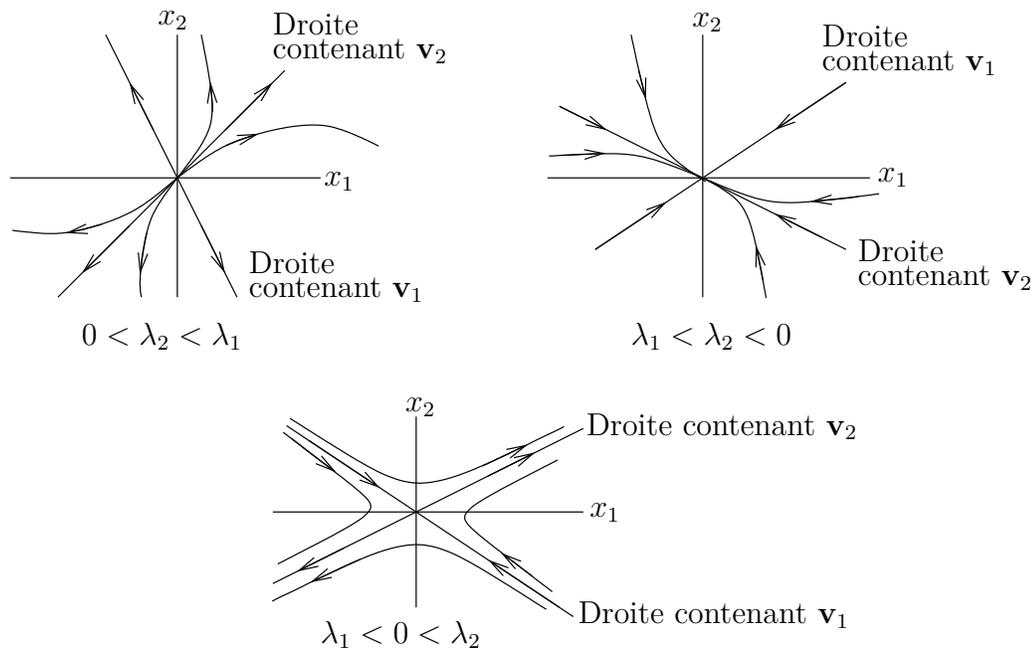


FIGURE 17.6 – Des portraits de phases possibles pour (17.3.1) si les valeurs propres sont réelles et distinctes.

Proposition 17.3.3

Si la matrice A de l'équation (17.3.1) possède une paire de vecteurs propres complexes λ_1 et λ_2 , alors $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ puisque les composantes de la matrice A sont réelles. Supposons que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. Soit $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$, avec $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2$, un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 . Les solutions de (17.3.1) sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} (a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t)) \mathbf{u}_1 + e^{\alpha t} (-a_1 \sin(\beta t) + a_2 \cos(\beta t)) \mathbf{u}_2$$

où a_1 et a_2 sont des constantes. Nous retrouvons à la figure 17.8 un portrait de phases possible.

Exemple 17.3.4

Considérons le système d'équations différentielles linéaire d'ordre un $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Quelle est la solution de ce système qui satisfait la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Les valeurs propres et un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres de A sont

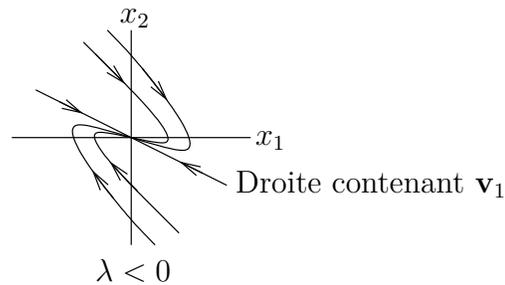


FIGURE 17.7 – Un portrait de phases possible pour (17.3.1) s'il n'y a qu'une valeur propre réelle et tous les vecteur propres sont colinéaires.

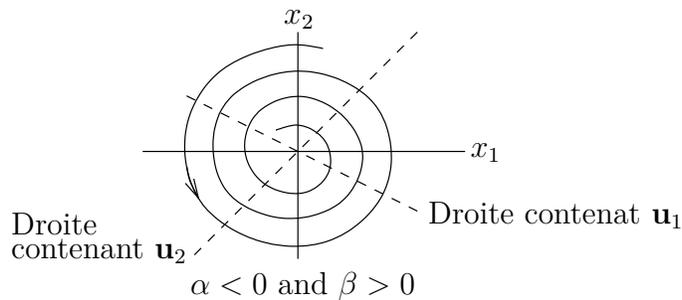


FIGURE 17.8 – Un portrait de phases possible pour (17.3.1) si les valeurs propres sont complexes conjuguées.

donnés dans le tableau suivant.

valeur propre	vecteur propre
$\lambda_1 = -1$	$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^\top$
$\lambda_2 = 3$	$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$

Les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ -a_1 e^{-t} + a_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $a_1 = 2$ et $a_2 = 6$. Nous avons la solution

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} + 6e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de tracer le portrait de phases de ce système. Remarquons premièrement que toute solution dont la condition initiale est un multiple de \mathbf{v}_1 est de la forme $\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \mathbf{v}_1$ pour une constante a_1 . Son orbite est donc sur la droite contenant \mathbf{v}_1 et approche l'origine quand $t \rightarrow \infty$. De même, toute solution dont la condition initiale est un multiple de \mathbf{v}_2 est de la forme $\mathbf{x}(t) = a_2 e^{3t} \mathbf{v}_2$ pour une constante a_2 . Son orbite est donc sur la droite contenant \mathbf{v}_2 et s'éloigne de l'origine quand $t \rightarrow \infty$. De plus, il ne faut pas oublier que les orbites ne peuvent pas se couper en raison de l'unicité des solutions et que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour tout t est une solution. Toutes les autres solutions de la forme $\mathbf{x}(t) = a_1 e^{-t} \mathbf{v}_1 + a_2 e^{3t} \mathbf{v}_2$ vont s'approcher de la droite contenant \mathbf{v}_2 mais s'éloigner de la droite contenant \mathbf{v}_1 quand $t \rightarrow \infty$. Nous obtenons le portrait de phase qui est donné à la figure 17.9. ♣

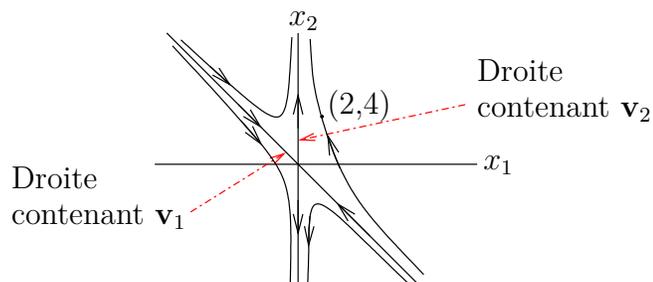


FIGURE 17.9 – Portrait de phases du système d'équations différentielles linéaires de l'exemple 17.3.4

Remarque 17.3.5

Il serait plus laborieux de tracer l'orbite associée à la solution de l'exemple précédent si nous n'avions pas la proposition 17.3.3. Voici comment nous devrions procéder. Lorsque t tend vers plus l'infini, la première composante $x_1(t) = 2e^{-t}$ tend vers 0 alors que la deuxième composante $x_2(t) = -2e^{-t} + 6e^{3t}$ tend vers plus l'infini. Donc $\mathbf{x}(t)$ approche asymptotiquement l'axe x_2 lorsque t tend vers plus l'infini. L'axe des x_2 est la droite qui contient \mathbf{v}_2 . Lorsque t tend vers moins l'infini, la composante $x_1(t)$ tend vers plus l'infini alors que la composante $x_2(t)$ tend vers moins l'infini. Puisque

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-t}}{-e^{-t} + 3e^{3t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-1 + 3e^{4t}} = -1,$$

nous avons que $\mathbf{x}(t)$ approche asymptotiquement la droite $x_2 = -x_1$ lorsque t tend vers moins l'infini (figure 17.9). C'est la droite qui contient \mathbf{v}_1 . ♠

Exemple 17.3.6

Considérons le système d'équations différentielles linéaires d'ordre un $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Quelle est la solution de ce système qui satisfait la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$?

La matrice A a une seule valeur propre qui est $\lambda = 2$. Un vecteur propre associé à cette valeur propre est $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tous les autres vecteurs propres associés à λ sont colinéaires au vecteur \mathbf{v} .

Il faut trouver un vecteur \mathbf{u} tel que $(A - 1I)\mathbf{u} = \mathbf{v}$; c'est-à-dire, tel que

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si nous résolvons ce système à l'aide de sa matrice augmentée, nous trouvons $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 - 2\alpha \end{pmatrix}$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha = 1$, nous obtenons $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Toutes les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 e^{2t} + a_2(1+t)e^{2t} \\ -2a_1 e^{2t} - a_2(3+2t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ -2a_1 - 3a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $a_1 = 10$ et $a_2 = -8$. Nous avons la solution

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 10e^{2t} - 8(1+t)e^{2t} \\ -20e^{2t} + 8(3+2t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$



Exemple 17.3.7

Considérons le système d'équations différentielles linéaires d'ordre un $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Quelle est la solution de ce système qui satisfait la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$?

La matrice A possède les valeurs propres et vecteurs propres complexes suivants.

valeur propre	vecteur propre
$\lambda_1 = 2 + 3i$	$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}^\top$
$\lambda_2 = 2 - 3i$	$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^\top$

Nous avons $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{u}_2$ pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Toutes les solutions de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sont de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{2t} (a_1 \cos(3t) + a_2 \sin(3t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} (-a_1 \sin(3t) + a_2 \cos(3t)) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} a_1 \cos(3t) + a_2 \sin(3t) \\ a_1 \sin(3t) - a_2 \cos(3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les paramètres a_1 et a_2 sont déterminés par la condition initiale

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On obtient $a_1 = 2$ et $a_2 = -4$. La solution est donc

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \cos(3t) - 4 \sin(3t) \\ 2 \sin(3t) + 4 \cos(3t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Remarque 17.3.8

La matrice $\begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}$ de l'exemple précédant est une matrice de rotation de $3t$ radians dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.



Définition 17.3.9

Considérons le système d'équations différentielles linéaires d'ordre un (17.3.1). Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A .

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, l'origine est appelé un **noeud stable**.
2. Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, l'origine est appelé un **noeud instable**.
3. Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$), l'origine est appelé un **col**,
4. Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et $a < 0$, l'origine est appelé un **foyer stable**.
5. Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et $a > 0$, l'origine est appelé un **foyer instable**.
6. Si $\lambda_1 = a + ib$ avec $b \neq 0$ et $a = 0$, l'origine est appelé un **centre**.

Les différents portraits de phases pour (17.3.1) peuvent être classifiés par rapport au signe du déterminant et de la trace de A .

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Nous avons que

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr}(A) + \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(A) - \sqrt{(\operatorname{tr}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2},$$

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \det(A) = \lambda_1 \lambda_2.$$

Ces relations nous donnent la classification des portraits de phases de (17.3.1) que nous retrouvons à la figure 17.10.

En résumé, le portrait de phase d'un système d'équation différentielles linéaires d'ordre un correspond à une des situations suivantes.

1. Si l'origine est un noeud stable, toutes les solutions approchent l'origine.
2. Si l'origine est un noeud instable, toutes les solutions s'éloignent de l'origine.
3. Si l'origine est un col, les solutions dont la condition initiale est le long de la droite contenant les vecteurs propres associés à la valeur propre négative tendent vers l'origine. Les solutions dont la condition initiale n'est pas sur cette droite s'éloignent de l'origine.

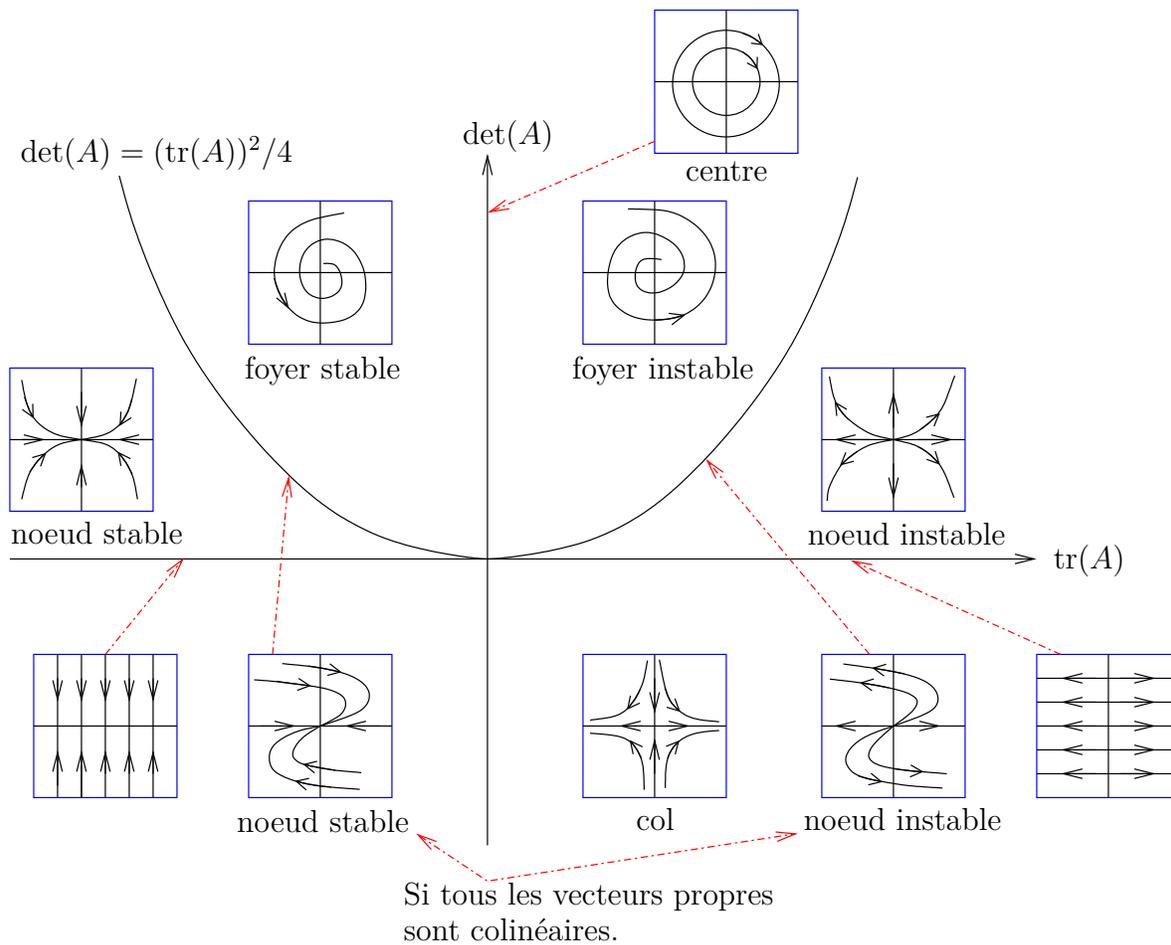


FIGURE 17.10 – Classification des portraits de phases pour le système d'équations différentielles linéaires (17.3.1).

4. Si l'origine est un foyer stable, toutes les solutions approchent l'origine, en tournant autour de celle-ci.
5. Si l'origine est un foyer instable, toutes les solutions s'éloignent de l'origine, en tournant autour de celle-ci.
6. Si l'origine est un centre, toutes les solutions tracent des ellipses autour de l'origine.

17.4 Introduction à l'analyse globale

Nous allons utiliser dans les prochaines sections les concepts de point d'équilibre, stabilité et portrait de phases que nous avons introduits lors de l'étude des équations différentielles linéaires.

Considérons le système d'équations différentielles d'ordre un (17.2.2) où f_1 et f_2 sont

différentiables sur \mathbb{R}^2 . Nous avons vu lors de l'étude de la représentation paramétrique des courbes que si $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe dans le plan, alors

$$\phi'(\tau) = \begin{pmatrix} \phi'_1(\tau) \\ \phi'_2(\tau) \end{pmatrix}$$

est un vecteur parallèle à la droite tangente à la courbe ϕ au point $\phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \end{pmatrix}$. Si, en particulier, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une solution de (17.2.2), alors

$$\phi'(\tau) = \begin{pmatrix} \phi'_1(\tau) \\ \phi'_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)) \\ f_2(\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)) \end{pmatrix} \quad (17.4.1)$$

est un vecteur parallèle à la droite tangente à l'orbite de la solution ϕ au point $\phi(\tau) = \begin{pmatrix} \phi_1(\tau) \\ \phi_2(\tau) \end{pmatrix}$ (figure 17.11). Donc $f(x, y)$ est un vecteur parallèle à l'orbite qui passe par le point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

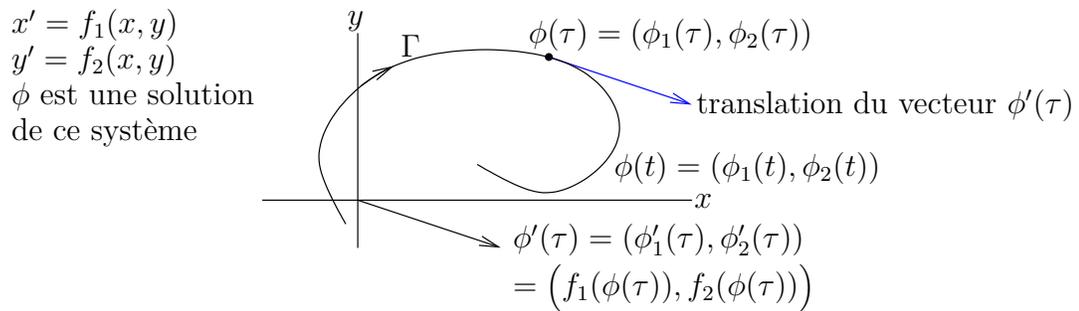


FIGURE 17.11 – La courbe Γ représente l'orbite associée à une solution ϕ du système d'équations différentielles (17.2.3). La direction de la tangente à la courbe Γ au point $\phi(\tau)$ est donnée par le vecteur $\phi'(\tau)$.

Le comportement qualitatif des solutions peut être déterminé à partir du **champ de vecteurs** \mathbf{f} associé au côté droit de (17.2.3). Pour dessiner un champ de vecteurs, il faut choisir un ensemble de points du plan (uniformément distribués) et tracer le vecteur $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$ à partir de chacun de ces points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple 17.4.1

Soit le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y) = y - x^2 \\ y' &= f_2(x, y) = x - 2 \end{aligned} \quad (17.4.2)$$

Nous retrouvons à la figure 17.12 le champ de vecteurs pour ce système. Nous y retrouvons aussi les orbites qui passent par les points $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2.5 \\ 4.0 \end{pmatrix}$ à $t = 0$.

Pour mieux visualiser le champ de vecteurs, tous les vecteurs ont été de même longueur. La base des vecteurs est indiquée par un point ; le point est rouge si c'est un point d'équilibre. La longueur des vecteurs n'est généralement pas la même d'un point à l'autre. Plus le vecteur est long, plus le déplacement le long d'une orbite est rapide. Par exemple, les vecteurs sont de plus en plus courts lorsque nous nous approchons du point $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Cela indique que la progression est de plus en plus lente le long d'une orbite au voisinage de ce point. Nous verrons dans un instant que ce point, appelé un point d'équilibre, joue un rôle important dans l'étude du portrait de phases du système (17.4.2). ♣

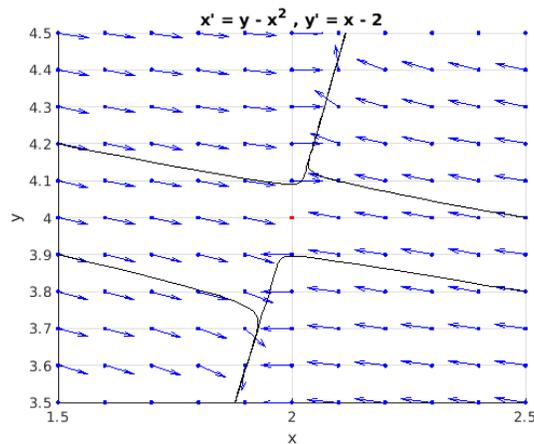


FIGURE 17.12 – Le champ de vecteurs pour le système (17.4.2) avec quelques orbites.

17.4.1 Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système d'équations différentielles (17.2.3) jouent un rôle fondamental lorsque nous dessinons le portrait de phases de ce système.

Définition 17.4.2

Un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ est un **point d'équilibre** pour le système d'équation différentielles (17.2.3) si $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{p}) \\ f_2(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ est un point d'équilibre, alors $\phi(t) = \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ pour tout t est une solution constante de (17.2.3). C'est la raison pour laquelle le point \mathbf{p} est appelé un point d'équilibre.

Le comportement des solutions près d'un point d'équilibre \mathbf{p} de (17.2.3) peut souvent être déterminé à l'aide du système d'équations différentielles linéaires d'ordre un

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = D\mathbf{f}(\mathbf{p}) \mathbf{x} \quad (17.4.3)$$

où

$$Df(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Si nous développons le système précédent, alors

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) x_2 \end{aligned}$$

Définition 17.4.3

Le système d'équations différentielles (17.4.3) est la **linéarisation du système** (17.2.3) au point d'équilibre \mathbf{p}

L'importance de l'étude des systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre un est une conséquence du résultat suivant.

Proposition 17.4.4

Soit (17.4.3) la linéarisation du système d'équations différentielles (17.2.3) au point d'équilibre \mathbf{p} de (17.2.3). Si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(\mathbf{p})$ ont des parties réelles non nulles, alors les orbites de (17.2.3) au voisinage du point d'équilibre \mathbf{p} se comportent comme les orbites de (17.4.3) près de l'origine.

Tracer le portrait de phase d'un système d'équations différentielles d'ordre un va demander beaucoup plus d'information que la seule connaissance des points d'équilibre. La prochaine section introduit un ensemble de courbes qui permettent de tracer qualitativement les orbites d'un système d'équations différentielles d'ordre un et de déterminer la direction du déplacement le long de ces orbites lorsque t augmente.

17.4.2 Nullclines

Définition 17.4.5

Pour $j = 1$ ou 2 , les **nullclines** associés à la variable x_j sont les courbes définies par

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : f_j(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Nous obtenons l'information suivante des nullclines.

1. **Les points d'intersection des nullclines de (17.2.2) associés à x_1 avec ceux associés à x_2 sont des points d'équilibre** car $f_1(\mathbf{q}) = f_2(\mathbf{q}) = 0$ pour tout point d'intersection \mathbf{q} .
2. **Les orbites qui coupent un nullcline associé à x_1 le font verticalement.** Supposons que Γ soit une orbite de (17.2.2) qui coupe un nullcline associé à x_2 au point \mathbf{q} . Si $\Gamma = \{\phi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ où ϕ est une solution de (17.2.2), alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(c) = \mathbf{q}$. Si \mathbf{q} n'est pas un point d'équilibre, alors,

$$\frac{d\phi_1}{dt}(c) = f_1(\phi(c)) = f_1(\mathbf{q}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\phi_2}{dt}(c) = f_2(\phi(c)) = f_2(\mathbf{q}) \neq 0.$$

La tangente à Γ au point \mathbf{q} est donc verticale car elle est parallèle à

$$\phi'(c) = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(c) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\phi_2}{dt}(c) \end{pmatrix}.$$

3. **Les orbites qui coupent un nullcline associé à x_2 le font horizontalement.** Comme dans le cas précédent, supposons que Γ soit une orbite de (17.2.2) qui coupe un nullcline associé à x_2 au point \mathbf{q} . Si $\Gamma = \{\phi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ où ϕ est une solution de (17.2.2), alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(c) = \mathbf{q}$. Si \mathbf{q} n'est pas un point d'équilibre, alors,

$$\frac{d\phi_1}{dt}(c) = f_1(\phi(c)) = f_1(\mathbf{q}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\phi_2}{dt}(t_r) = f_2(\phi(t_r)) = f_2(\mathbf{q}) = 0.$$

La tangente à Γ au point \mathbf{q} est donc horizontale car elle est parallèle à

$$\phi'(t_r) = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(t_r) \\ \frac{d\phi_2}{dt}(t_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_1}{dt}(t_r) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les nullclines sont des courbes qui partagent le plan en régions dans lesquelles les vecteurs du champ de vecteurs pointent tous dans une «direction semblable». Que voulons-nous dire par «direction semblable»? Supposons que U soit une de ces régions et que \mathbf{p} et \mathbf{q} soient deux points dans U , alors $f_1(\mathbf{p})$ et $f_1(\mathbf{q})$ sont de même signe, et il en est de même pour $f_2(\mathbf{p})$ et $f_2(\mathbf{q})$. Les fonctions f_1 et f_2 peuvent possiblement changer de signe seulement lorsque nous traversons les nullclines.

Exemple 17.4.6

Traçons le portrait de phase du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} x' &= y - x^2 \\ y' &= x - 2 \end{aligned} \tag{17.4.4}$$

La première étape est de trouver et tracer les nullclines.

Nullclines associés à x : Nous avons $y - x^2 = 0$. Le long de la parabole $y = x^2$, les solutions satisfont $x' = 0$ et ainsi les orbites traversent verticalement.

Nullclines associés à y : Nous avons $x - 2 = 0$. Le long de la ligne $x = 2$, les solutions satisfont $y' = 0$ et les orbites traversent horizontalement.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent un seul point d'équilibre $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Pour déterminer la direction générale du champ de vecteurs dans chacune des régions délimitées par les nullclines, il suffit de choisir un point \mathbf{q} dans cette région et de calculer $f(\mathbf{q})$. Comme il a déjà mentionné précédemment, f_1 et f_2 peuvent changer de signe seulement lorsque nous traversons les nullclines.

La linéarisation de (17.4.4) au point \mathbf{p} est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : $-2 + \sqrt{5} > 0$ et $-2 - \sqrt{5} < 0$. Les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à $-2 + \sqrt{5}$ et $-2 - \sqrt{5}$ respectivement.

Puisque les deux valeurs propres sont de signes opposés, le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre \mathbf{p} est un col pour le système (17.4.4) comme nous pouvons le constater dans le portrait de phases qui est donné à la figure 17.13.

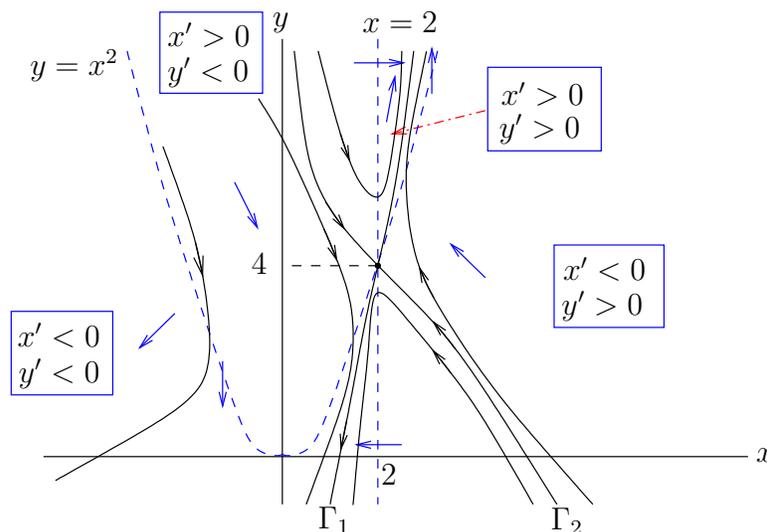


FIGURE 17.13 – Portrait de phases pour le système d'équations différentielles (17.4.4). Les lignes hachurées en bleu sont les nullclines. Les flèches indiquent la direction du déplacement le long des orbites lorsque t augmente.

Remarque 17.4.7

La proposition 17.4.4 est en fait beaucoup plus précise que l'énoncé qui a été donné. Dans l'exemple précédent, soit Γ_1 la courbe formée des orbites qui convergent vers le point d'équilibre \mathbf{p} lorsque $t \rightarrow -\infty$ et du point d'équilibre lui-même. La tangente à Γ_1 au point \mathbf{p} est parallèle au vecteur \mathbf{u}_1 . De même, soit Γ_2 la courbe formée des orbites qui convergent vers le point d'équilibre \mathbf{p} lorsque $t \rightarrow \infty$ et du point d'équilibre, alors la tangente à Γ_2 au point \mathbf{p} est parallèle au vecteur \mathbf{u}_2 (figure 17.13). ♠

Exemple 17.4.8

Traçons le portrait de phases du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}x' &= y - x \\y' &= -x - x^2 - y.\end{aligned}\tag{17.4.5}$$

Trouvons les nullclines.

Nullclines associés à x : Nous avons $y - x = 0$. Le long de la droite $y = x$, les solutions satisfont $x' = 0$ et les orbites traversent verticalement.

Nullclines associés à y : Nous avons $-x - x^2 - y = 0$. Le long de la parabole $y = -x^2 - x$, les solutions satisfont $y' = 0$ et les orbites traversent horizontalement.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent deux points d'équilibre : $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La linéarisation de (17.4.5) au point \mathbf{p}_2 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres conjuguées, $-1 \pm i$, qui ont une partie réelle négative. Il y a donc un foyer stable à l'origine pour le système linéarisé. Ainsi, \mathbf{p}_2 est un foyer stable pour le système (17.4.5).

La linéarisation de (17.4.5) au point \mathbf{p}_1 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : $-1 \pm \sqrt{3}$. Puisque $-1 - \sqrt{3} < 0 < -1 + \sqrt{3}$, l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre \mathbf{p}_1 est un col pour le système (17.4.5).

Le portrait de phases est donné à la figure 17.14. ♣

Exemple 17.4.9

Le modèle compétition – exclusion présenté à l'exemple 17.1.2 est décrit par le système d'équations différentielles (17.1.6); c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - x - \rho y) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y(1 - y - \xi x)\end{aligned}\tag{17.4.6}$$

où u , v et τ dans (17.1.6) ont été remplacées par x , y et t respectivement. Les constantes α , ρ et ξ sont positives. Traçons le portrait de phases de ce système.

Trouvons les nullclines de (17.4.6).

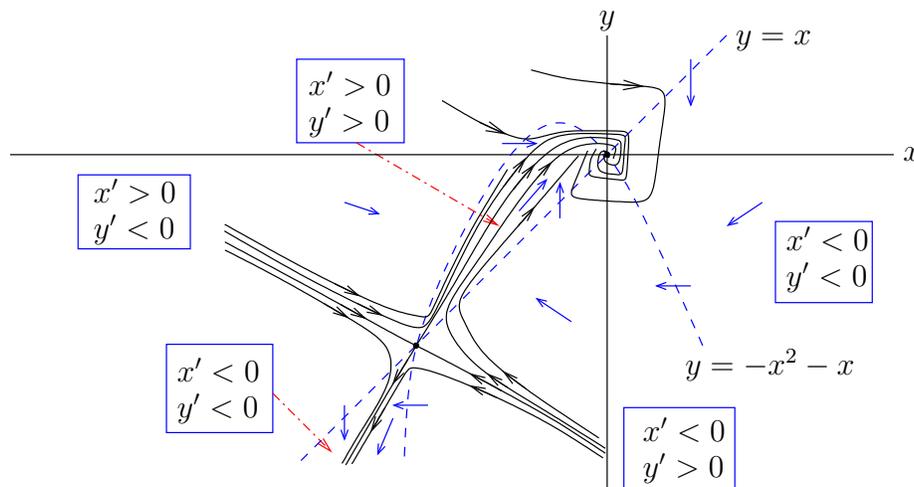


FIGURE 17.14 – Portrait de phases pour le système d'équations différentielles (17.4.5). Les lignes hachurées en bleu sont les nullclines. Les flèches indiquent la direction du déplacement le long des orbites lorsque t augmente.

Nullclines associés à x : Nous avons $x(1 - x - \rho y) = 0$. Le long des droites $x = 0$ et $y = (1 - x)/\rho$, les solutions satisfont $x' = 0$ et les orbites traversent verticalement.

Nullclines associés à y : Nous avons $\alpha y(1 - y - \xi x) = 0$. Le long des droites $y = 0$ et $y = 1 - \xi x$, les solutions satisfont $y' = 0$ et les orbites traversent horizontalement.

Il y a plusieurs scénarios selon le choix des valeurs pour les paramètres α , ρ et ξ .

A) Prenons $\rho = 2$ et $\xi = 1/3$. Les nullclines associés à x sont alors $x = 0$ et $y = -x/2 + 1/2$, et ceux associés à y sont $y = 0$ et $y = -x/3 + 1$.

Puisque l'analyse des portraits de phases que nous ferons sera faite seulement pour x et y non négatifs, car il ne peut pas y avoir de population avec un nombre négatif d'individus, nous considérerons seulement les points d'équilibre dans le premier quadrant. L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent trois points d'équilibre dans le premier quadrant : $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La linéarisation de (17.4.6) au point \mathbf{p}_1 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et α . Puisque $\alpha > 0$, les deux valeurs propres sont positives et l'origine est un noeud instable pour le système linéarisé. Donc \mathbf{p}_1 est un noeud instable pour (17.4.6).

La linéarisation de (17.4.6) au point \mathbf{p}_2 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\alpha/3 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : -1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, les deux valeurs propres sont négatives et l'origine est donc un noeud stable pour le système linéarisé. Ainsi, le point \mathbf{p}_2 est un noeud stable pour le système (17.4.6).

Finalement, la linéarisation de (17.4.6) au point \mathbf{p}_3 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2\alpha/3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont -1 et $2\alpha/3$. Puisque $\alpha > 0$, les deux valeurs propres sont de signes opposés et l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, le point \mathbf{p}_3 est un col pour le système (17.4.6).

Rappelons qu'une des conséquences des transformations utilisées pour réduire le système d'équations différentielles (17.1.6) au système (17.4.6) est que $x(t)$ et $y(t)$ ne représentent pas le nombre d'individus de chaque espèce mais représentent une fraction du nombre maximum d'individus de chaque espèce que le milieu peut supporter.

Le portrait de phases du (17.4.6) avec $\rho = 2$, $\xi = 1/3$ et $\alpha > 0$ est donné à la figure 17.15. L'espèce décrite par x va disparaître alors que l'espèce décrite par y va tendre vers 1.

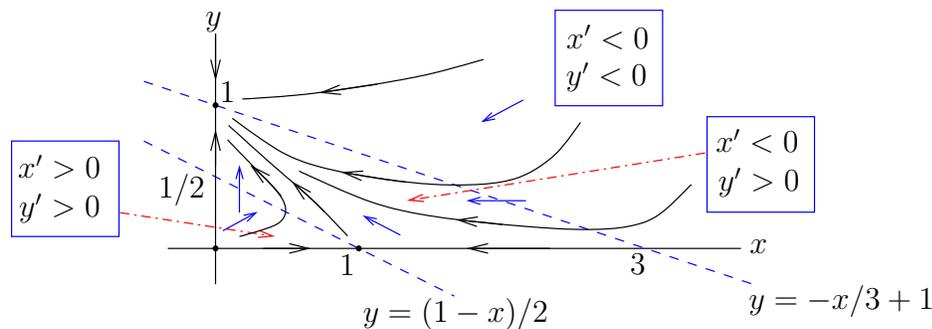


FIGURE 17.15 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (17.4.6) avec $\rho = 2$, $\xi = 1/3$ et $\alpha > 0$.

B) Prenons $\rho = 1/2$ et $\xi = 1/3$. Les nullclines associés à x sont $x = 0$ et $y = -2x + 2$, et les nullclines associés à y sont $y = 0$ et $y = -x/3 + 1$.

Comme précédemment, nous tracerons le portrait de phases seulement pour x et y non négatifs. Nous considérerons seulement les points d'équilibre dans le premier quadrant. L'intersection des nullclines associés à x et y donnent quatre points d'équilibre dans le premier quadrant : $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$.

La linéarisation de (17.4.6) au point \mathbf{p}_1 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et α . Puisque $\alpha > 0$, les deux valeurs propres sont positives et l'origine est donc un noeud instable pour le système linéarisé. Donc \mathbf{p}_1 est un noeud instable pour le système (17.4.6).

La linéarisation de (17.4.6) au point \mathbf{p}_2 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -\alpha/3 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, les valeurs propres sont

de signes opposés et l'origine est un col pour le système linéarisé. Donc \mathbf{p}_2 est un col pour le système (17.4.6).

La linéarisation de (17.4.6) au point \mathbf{p}_3 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 2\alpha/3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont -1 et $2\alpha/3$. Puisque $\alpha > 0$, les valeurs propres sont de signes opposés et l'origine est un col pour le système linéarisé. Donc \mathbf{p}_3 est un col pour le système (17.4.6).

Finalement, la linéarisation de (17.4.6) au point \mathbf{p}_4 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -3/5 & -3/10 \\ -4\alpha/15 & -4\alpha/5 \end{pmatrix}$. Pour simplifier le problème, nous supposons que $\alpha = 1$. Les valeurs propres de A sont alors $-2/5$ et -1 . Puisque les deux valeurs propres sont négatives, l'origine est un noeud stable pour le système linéarisé. Ainsi, le point d'équilibre \mathbf{p}_4 est un noeud stable pour le système (17.4.6).

Le portrait de phases de (17.4.6) avec $\alpha = 1$, $\rho = 2$ et $\xi = 1/3$ est donné à la figure 17.16. les deux espèces vont cohabiter. Ni l'une ni l'autre ne disparaîtra.

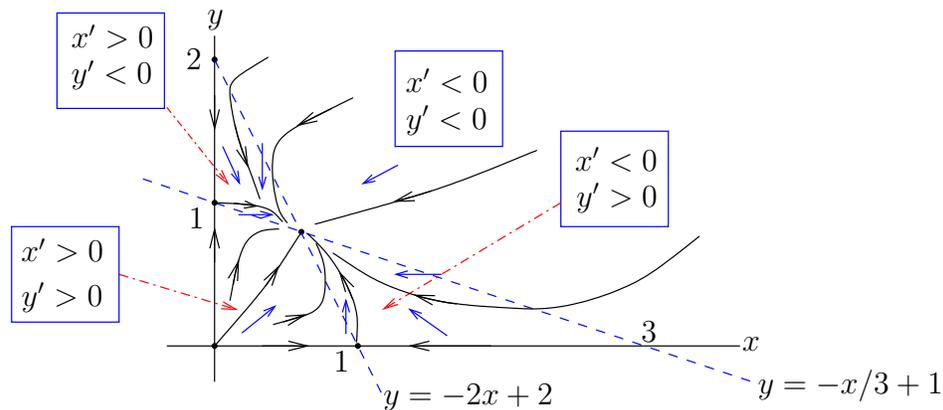


FIGURE 17.16 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (17.4.6) avec $\alpha = 1$, $\rho = 2$ et $\xi = 1/3$.



17.5 Équation de Van der Pol

Jusqu'à maintenant, les solutions qui ont jouées un rôle fondamental lors de l'étude des portraits de phases ont été les points d'équilibre. Mais d'autres solutions jouent un rôle fondamental. C'est le cas des solutions périodiques que nous verrons dans l'exemple qui suit.

Définition 17.5.1

Une solution ϕ d'un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

est une **solution périodique** s'il existe une constante T telle que $\phi(t + T) = \phi(t)$ pour tout t . La plus petite constante positive T telle que $\phi(t + T) = \phi(t)$ pour tout t est appelée la **période** de la solution. L'orbite tracée par cette solution est une **orbite fermée**.

Exemple 17.5.2

L'exemple suivant décrit un système d'équations différentielles qui possède une solution périodique. C'est un modèle classique d'oscillateur en physique.

L'équation de Van der Pol est

$$x'' + \epsilon x'(x^2 - 1) + x = 0.$$

Il est possible de transformer l'équation de Van der Pol en un système de deux équations différentielles d'ordre un en posant $y_1 = x$ et $y_2 = x'$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\epsilon y_2(y_1^2 - 1) - y_1 \end{aligned} \quad (17.5.1)$$

C'est un système d'équations différentielles non-linéaire. Il est généralement impossible de trouver une expression pour les fonctions y_1 et y_2 qui donnent la solution de (17.5.1). Des méthodes numériques sont alors utilisées pour estimer ces fonctions.

Comme aucun des coefficients de (17.5.1) ne dépend de t , il est généralement plus informatif de faire le graphe des orbites $\{(y_1(t), y_2(t)) : t \geq 0\}$ pour observer l'effet qu'une composante peut avoir sur l'autre.

la figure 17.17 contient quatre orbites de (17.5.1) où $\epsilon = 0.1$. Les quatre orbites ont respectivement les conditions initiales $(3, 2)$, $(-1, 3)$, $(-1, 1)$ et $(0.5, 0.5)$ à $t = 0$.

Il semble y avoir une solution périodique car les orbites avec les conditions initiales $(0.5, 0.5)$ et $(-1, 1)$ à $t = 0$ respectivement tracent des spirales vers l'extérieur alors que les deux autres orbites tracent des spirales vers l'intérieur. Comme les orbites ne peuvent pas se couper et qu'il n'y a pas de points d'équilibre autre que l'origine, nous pouvons montrer à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson qu'il doit y avoir une solution périodique entre les orbites qui tracent des spirales vers l'intérieur et ceux qui tracent des spirales vers l'extérieur.

Avec la condition initiale $(1, 1)$ à $t = 0$ et une très longue période d'intégration en t , nous obtenons l'orbite représentée à la figure 17.18. Comme cette orbite se rapproche de plus en plus de la solution périodique, nous obtenons «l'ombre» de la solution périodique qui est représenté par la courbe fermée, tracée à l'aide d'un pinceau plus épais.

L'étude mathématique de l'équation de Van der Pol dépasse le cadre de ce manuel. Ce sujet est abordé dans tous les bons manuels d'équations différentielles avancées. ♣

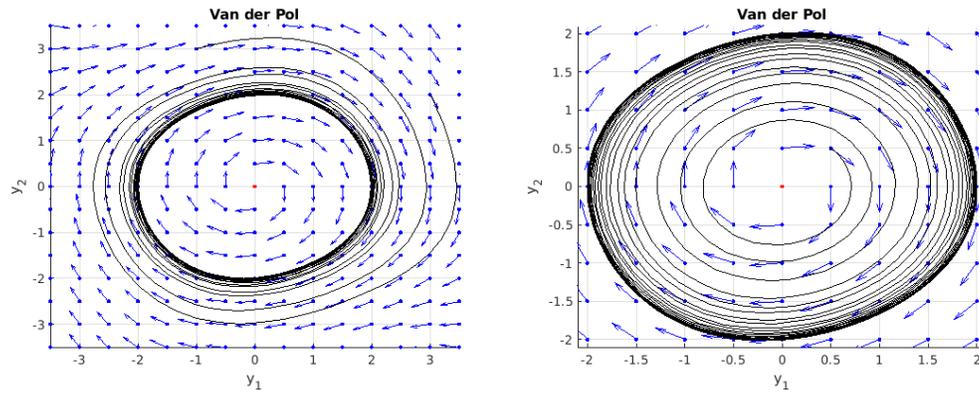


FIGURE 17.17 – Quatre orbites du système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol. Les orbites dans le champ de vecteurs à droite tracent des spirales vers l'extérieur alors que celles dans le champ de vecteurs à gauche tracent des spirales vers l'intérieur.

17.6 Système prédateurs-proies

17.6.1 Lotka-Volterra

Le modèle prédateurs-proies qui a été présenté à l'exemple 17.1.1 est donné par le système d'équations différentielles (17.1.3) ; c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - y) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y(x - 1)\end{aligned}\tag{17.6.1}$$

où u , v et τ dans (17.1.3) ont été remplacées par x , y et t respectivement. Le paramètre α est positif. Notons aussi que le changement de variable utilisé pour réduire le système (17.1.1) de Lotka-Volterra au système (17.6.1) a modifié l'ordre de grandeur de x et y . Les variables x et y ne représentent pas le nombre de proies et de prédateurs respectivement mais la fraction des populations de proies et prédateurs que le milieu peut supporter. Nous allons tracer le portrait de phases de (17.6.1).

Comme toujours, trouvons premièrement les nullclines.

Nullclines associés à x : Nous avons $x(1 - y) = 0$. Le long des droites $x = 0$ et $y = 1$, les solutions satisfont $x' = 0$ et les orbites traversent verticalement.

Nullclines associés à y : Nous avons $\alpha y(x - 1) = 0$. Le long des droites $y = 0$ et $x = 1$, les solutions satisfont $y' = 0$ et les orbites traversent horizontalement.

L'intersection des nullclines associés à x avec ceux associés à y donnent deux points d'équilibre : $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La linéarisation de (17.6.1) au point \mathbf{p}_1 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

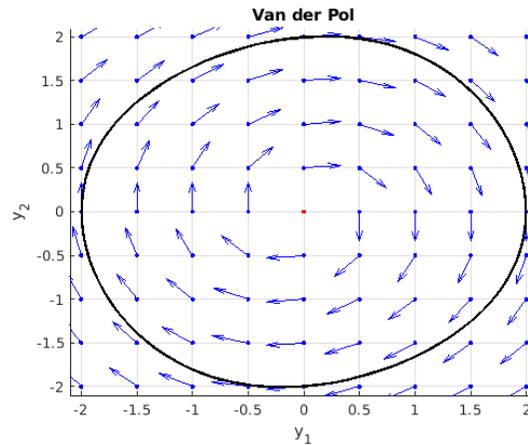


FIGURE 17.18 – L'ombre de la solution périodique pour le système d'équations différentielles obtenu de l'équation de Van der Pol

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. La matrice A a deux valeurs propres réelles : 1 et $-\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, les valeurs propres sont de signes opposés et l'origine est un col pour le système linéarisé. Ainsi, \mathbf{p}_1 est un col pour le système (17.6.1).

La linéarisation de (17.6.1) au point \mathbf{p}_2 est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\alpha > 0$, la matrice A a deux valeurs propres complexes : $\pm\alpha i$. Puisque la partie réelle des valeurs propres est nulle, nous ne pouvons rien conclure (à partir du système linéarisé) au sujet du point d'équilibre \mathbf{p}_2 du système (17.6.1).

Dans le portrait de phase représenté à la figure 17.19, la stabilité du point \mathbf{p}_2 et le comportement des solutions dans le premier quadrant proviennent du fait que (17.6.1) est un **système conservateur** ; c'est-à-dire que les orbites sont des courbes de niveau d'une certaine fonction que nous allons maintenant déterminer.

Commençons par remarquer que l'axe des x et l'axe des y sont des nullclines, alors les orbites dont la condition initiale est dans le premier quadrant demeurent dans le premier quadrant. De plus, une analyse détaillée du signe de x' et y' dans le premier quadrant nous permet de conclure que les orbites dans le premier quadrant font le tour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Le système (17.6.1) peut être transformé en une équation différentielle séparable. Il suffit de diviser la deuxième équation de (17.6.1) par la première équation de (17.6.1). Puisque

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

grâce à la règle de dérivation des fonctions composées, nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \frac{y(x-1)}{x(1-y)}.$$

Ainsi,

$$\int \frac{1-y}{y} dy = \alpha \int \frac{x-1}{x} dx .$$

Puisque nous sommes seulement intéressé aux solutions dans le premier quadrant, nous pouvons assumer que x et y sont positifs. Après intégration, nous obtenons

$$\ln(y) - y = \alpha(x - \ln(x)) + C$$

où C est une constante d'intégration.

L'orbite $\{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ associée à la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ dans le premier quadrant est donc la courbe de niveau $F(x, y) = C$ où

$$F(x, y) = \ln(y) - y - \alpha(x - \ln(x))$$

et $C = F(x_0, y_0)$ ¹. Une démonstration que l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $F(x, y) = C$ est une courbe fermée est donnée dans [4].

Nous traçons les portraits de phases pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ (figure 17.19) car ils sont intéressants, cependant nous ferons leur interprétation seulement pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$ car il ne peut pas y avoir de population avec un nombre négatif d'individus.

Pour $\alpha > 0$, le portrait de phases représenté à la figure 17.19 indique que les deux espèces ont un comportement périodique autour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 . Le point \mathbf{p}_2 est un centre. Aucune des deux espèces n'est vouée à l'extinction.

Remarque 17.6.1

Même si la signification biologique est douteuse, il n'en reste pas moins que le cas $\alpha < 0$ est très intéressant du point de vue mathématique.

Si $\alpha < 0$, l'origine est un noeud instable pour le système linéarisé au point \mathbf{p}_1 . Ainsi, le point \mathbf{p}_1 (i.e. l'origine) est aussi un noeud instable pour le système (17.6.1). De plus, si $\alpha < 0$, l'origine est un col pour le système linéarisé au point \mathbf{p}_2 car la linéarisation de (17.6.1) au point \mathbf{p}_2 a les deux valeurs propres $\pm\sqrt{-\alpha}$. Ainsi, le point \mathbf{p}_2 est un col pour le système (17.6.1).

Le portrait de phases représenté de la figure 17.20 indique que $x(t)$ ou $y(t)$, pas les deux, tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$ alors que l'autre tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. C'est la condition initiale qui détermine laquelle de $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers $+\infty$ et laquelle tend vers 0. La probabilité que $(x(t), y(t))$ tende vers le point d'équilibre \mathbf{p}_2 est presque nulle. Il faudrait que la condition initiale soit sur une des deux orbites qui tend vers \mathbf{p}_2 , ce qui est improbable.



1. En fait, l'argument donné permet seulement de conclure que l'orbite fait partie d'une courbe de niveau de F . Une preuve plus élaborée, qui utilise le fait qu'il n'y a pas de point d'équilibre autre que \mathbf{p}_2 dans le premier quadrant est nécessaire pour démontrer qu'une orbite est une courbe de niveau de F et vice-versa

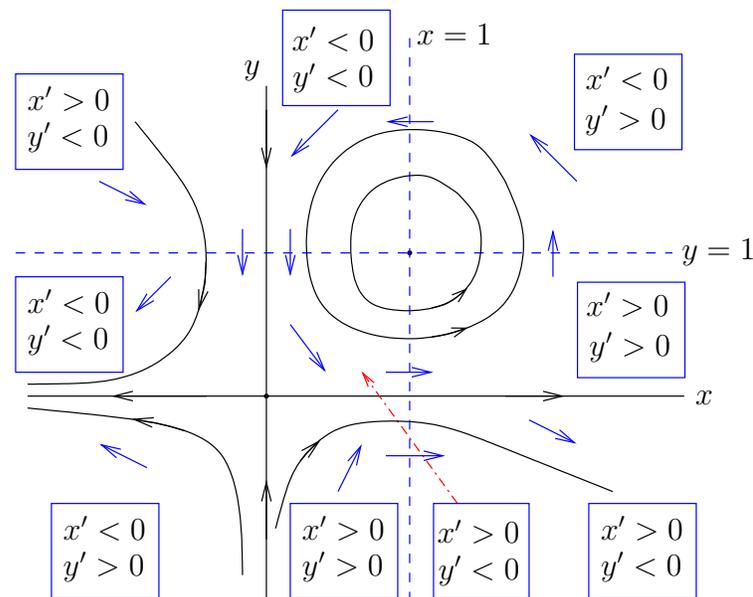


FIGURE 17.19 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (17.6.1) lorsque $\alpha > 0$.

17.6.2 Un meilleur modèle prédateurs-proies

Il existe deux problèmes majeurs avec le modèle prédateurs-proies de Lotka-Volterra.

Le modèle prédateurs-proies de Lotka-Volterra n'est malheureusement pas un modèle «structurellement stable». Il existe une définition très rigoureuse de stabilité structurelle d'un système dynamique que nous ne donnerons pas. Nous donnerons seulement une explication intuitive de cette notion.

Supposons que nous modifions légèrement le système (17.6.1) pour obtenir le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - y) + 0.0001y \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y(x - 1) \end{aligned} \quad (17.6.2)$$

Seul le terme $0.0001y$ a été ajouté au membre de droite de la première équation. Nous disons que le système (17.6.2) est une «perturbation» du système (17.6.1). Pour (x, y) près de \mathbf{p}_2 , le terme $0.0001y$ est très petit et ne devrait donc pas modifier les orbites de façon dramatique, n'est-ce pas ?

Deux orbites du système (17.6.2) avec $\alpha = 1$ ont été tracées à la figure 17.21 pour $0 \leq t \leq 500$, une avec la condition initiale $(0.5, 1.5)$ et l'autre avec la condition initiale $(1.1, 1.2)$. Ces solutions ne sont plus périodiques. Elles tournent autour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 en s'éloignant très lentement de celui-ci. Les solutions au voisinage du point d'équilibre \mathbf{p}_2 ne sont plus périodiques comme nous avons avec le système (17.6.1).

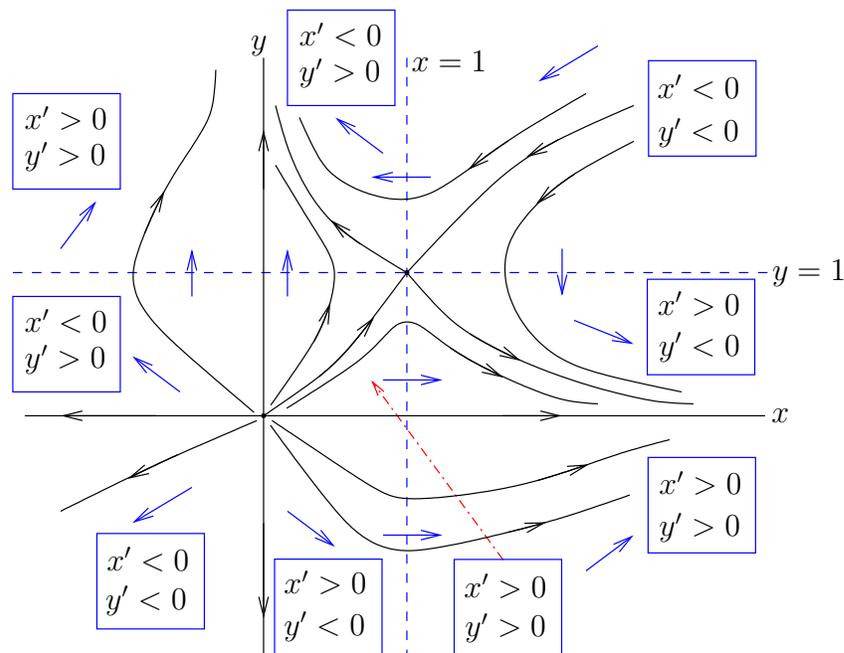


FIGURE 17.20 – Portrait de phases du système d'équations différentielles (17.6.1) lorsque $\alpha < 0$

Nous avons répété l'expérience précédente pour le système (17.6.2) avec $\alpha = 0.1$. Deux orbites du système (17.6.2) ont été tracées à la figure 17.22 pour $0 \leq t \leq 500$, une avec la condition initiale $(0.5, 1.5)$ et l'autre avec la condition initiale $(1.1, 1.2)$. Comme dans le cas avec $\alpha = 1$, ces solutions ne sont plus périodiques. Elles tournent autour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 en s'éloignant très lentement de celui-ci.

Les orbites que nous retrouvons dans les deux dernières figures ne sont plus des solutions périodiques. Le portrait de phase a changé de façon «dramatique» en passant du système (17.6.1) au système (17.6.2). En fait, il existe des «perturbations» (aussi petites que nous voulions) du système (17.6.1) qui produisent un portrait de phases très «différent» de celui du système (17.6.1). Pour cette raison, nous disons que le système (17.6.1) n'est pas «structurellement stable».

La raison pour laquelle nous exigeons que les systèmes d'équations différentielles que nous utilisons pour décrire des phénomènes biologiques, physiques, et autres soient structurellement stables est que ces systèmes sont seulement des approximations (que nous espérons très bonnes) des systèmes d'équations différentielles qui décrivent réellement les phénomènes étudiés. Si nous utilisons un système d'équations différentielle qui est structurellement stable, nous pouvons espérer que son portrait de phases est qualitativement identique à celui du système qui décrit réellement le phénomène.

Un autre problème avec le système de Lotka-Volterra est qu'il n'existe normalement pas une multitude de solutions périodiques. Il n'existe généralement qu'une seule solution pé-

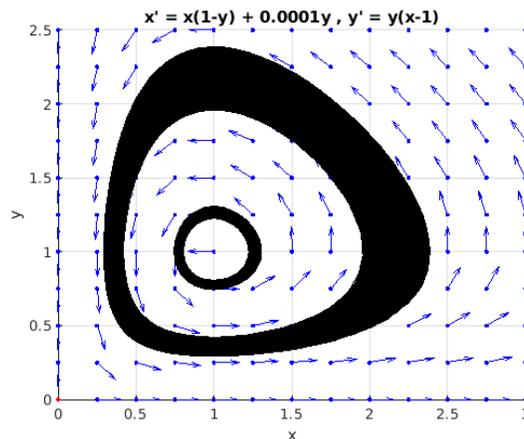


FIGURE 17.21 – Quelques orbites du système (17.6.2) obtenu du système prédateurs-proies (17.6.1) de Lotka-Volterra pour $\alpha = 1$.

riodique qui décrit l'équilibre entre les proies et les prédateurs. À la longue, le nombre y de prédateurs et le nombre x de proies vont tendre vers cet équilibre périodique quel que soit le nombre initial y_0 de prédateurs et le nombre initial x_0 de proies. En termes mathématiques, si la condition initial (x_0, y_0) n'est pas sur cette unique solution périodique, l'orbite qui passe par (x_0, y_0) va «tendre» vers la solution périodique.

Remplaçons le système (17.1.1) par un système de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= qf(p, q) \\ \frac{dp}{dt} &= pg(p, q) \end{aligned} \tag{17.6.3}$$

où $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues. Pour plus de détails sur la discussion que nous présentons ci-dessous, le lecteur est invité à consulter [1], [11] et en particulier [10].

En s'inspirant du modèle logistique pour décrire une seule population animale dont la survie dépend des ressources du milieu, nous déduisons que la fonction f devrait contenir un terme de la forme

$$a \left(1 - \frac{q}{Q}\right)$$

où a est le taux de croissance relatif de la population de proies lorsque qu'il n'y a pas le limite supérieur au nombre de proie que le milieu peut supporter, et Q est le nombre maximal de proies que le milieu peut supporter. De plus la fonction f devrait contenir un terme de la forme $-ph(q)$ pour une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que nous déterminerons dans quelques instants. Ce terme représente l'impact des prédateurs sur la croissance de la population de proies.

Supposons que

$$f(p, q) = a \left(1 - \frac{q}{Q}\right) - ph(q) .$$

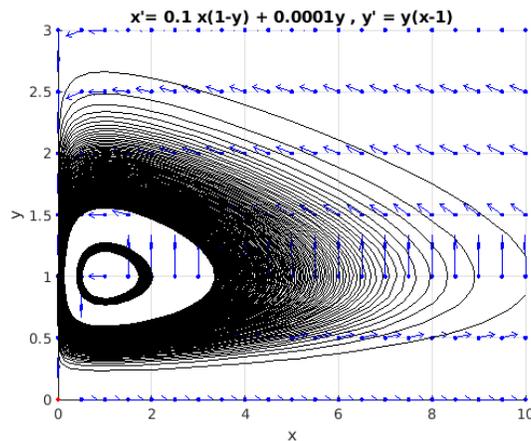


FIGURE 17.22 – Quelques orbites du système (17.6.2) obtenu du système prédateurs-proies (17.6.1) de Lotka et Voltera pour $\alpha = 0.1$.

De plus, supposons que la fonction g soit de la forme

$$g(p, q) = b \left(1 - \frac{kp}{q} \right)$$

où b et k sont des constantes positives. La population de prédateurs augmente lorsque $q > kp$; le nombre de proies est k fois supérieur au nombre de prédateurs.

La fonction h doit tenir compte de l'effet de saturation chez les prédateurs. Pour plusieurs raisons, il y a un nombre limite de proies qu'un prédateur peut (ou veut) attraper.

Il y a plusieurs choix possibles pour h . Pour le système (17.1.1) de Lotka-Voltera, la fonction h est constante. Le terme $-bqp$ que nous retrouvons dans la première équation en (17.1.1) indique que le nombre de proies capturées par les prédateurs dépend linéairement du nombre de proies et cela sans aucune borne supérieure sur le nombre de proies. Nous savons que ce n'est pas réaliste.

Les fonctions h les plus souvent utilisées sont

$$h(q) = \frac{\alpha}{q + \beta} \quad , \quad h(q) = \frac{\alpha q}{q^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad h(q) = \frac{\alpha(1 - e^{-\beta q})}{q}$$

(figure 17.23). Dans ces trois cas, nous avons que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} qh(q) = \alpha .$$

Le nombre de proies que les prédateurs peut attraper est bornée par α .

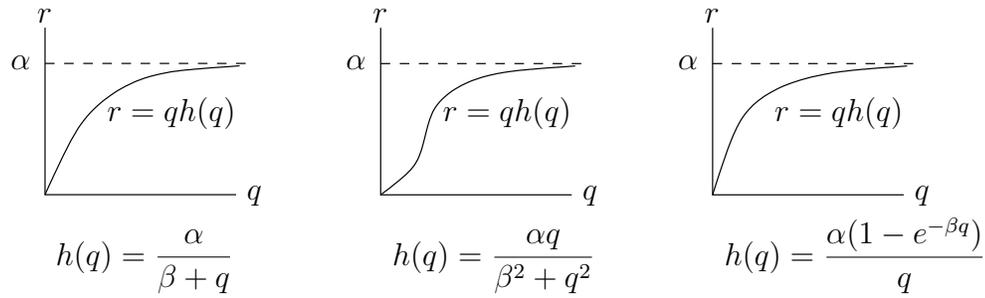


FIGURE 17.23 – Modèles possibles pour décrire le phénomène de saturation chez les prédateurs.

Si nous utilisons la fonction $h(q) = \alpha/(\beta + q)$, nous obtenons le système suivant.

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= q \left(a \left(1 - \frac{q}{Q} \right) - \frac{\alpha p}{\beta + q} \right) \\ \frac{dp}{dt} &= bp \left(1 - \frac{kp}{q} \right) \end{aligned} \quad (17.6.4)$$

Au moins trois paramètres du système précédent peuvent être éliminés. Posons

$$u = \frac{q}{Q}, \quad v = \frac{kp}{Q} \quad \text{et} \quad \tau = bt.$$

Avec ces substitutions, le système précédent devient

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u \left(\frac{a}{b} (1 - u) - \frac{\alpha v / (kb)}{\beta/Q + u} \right) \\ \frac{dv}{d\tau} &= v \left(1 - \frac{v}{u} \right). \end{aligned}$$

Si nous posons

$$A = \frac{a}{b}, \quad B = \frac{\alpha}{kb} \quad \text{et} \quad C = \frac{\beta}{Q},$$

mous obtenons le système

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u \left(A(1 - u) - \frac{Bv}{C + u} \right) \\ \frac{dv}{d\tau} &= v \left(1 - \frac{v}{u} \right) \end{aligned} \quad (17.6.5)$$

Trouvons les nullclines de (17.6.5).

Nullclines associés à u : Nous avons

$$0 = u \left(A(1 - u) - \frac{Bv}{C + u} \right) = \frac{u}{C + u} (A(1 - u)(C + u) - Bv).$$

Le long de la droite $u = 0$ (l'axe des v) et le long de la parabole $v = \frac{A}{B}(1-u)(C+u)$, les solutions satisfont $u' = 0$ et les orbites traversent verticalement.

Nullclines associés à v : Nous avons

$$0 = v \left(1 - \frac{v}{u} \right) .$$

Le long des droites $v = 0$ (l'axe des u) et $u = v$, les solutions satisfont $v' = 0$ et les orbites traversent horizontalement.

En fait l'axe des v n'est pas un nullcline car l'équation différentielle

$$\frac{dv}{d\tau} = v \left(1 - \frac{v}{u} \right)$$

n'est pas définie pour $u = 0$. De même, l'équation différentielle

$$\frac{du}{d\tau} = u \left(A(1-u) - \frac{Bv}{C+u} \right)$$

n'est pas définie pour $u = -C$. Cependant, nous pouvons ignorer ces problèmes car $C > 0$ et nous considérons seulement $u > 0$.

Afin de simplifier la discussion, nous allons assumer que $A = 5$, $B = 10$ et $C = 0.03$. Le choix de ces valeurs n'est pas arbitraire. Ces valeurs ont été choisies pour obtenir une seule orbite périodique vers laquelle les autres orbites «convergent». Nous avons donc le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u \left(5(1-u) - \frac{10v}{0.03+u} \right) \\ \frac{dv}{d\tau} &= v \left(1 - \frac{v}{u} \right) \end{aligned} \tag{17.6.6}$$

L'intersection des nullclines associés à u avec ceux associés à v donnent deux points d'équilibre pour $u > 0$ et $v \geq 0$:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{p}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.028346114369 \\ 0.028346114369 \end{pmatrix} .$$

Le point d'équilibre \mathbf{p}_2 provient de la solution positive de l'équation quadratique $u^2 + 1.03u - 0.03 = 0$ que nous obtenons de l'intersection des nullclines $v = u$ et $v = \frac{A}{B}(1-u)(C+u) = 0.5(1-u)(0.03+u)$.

Avant de déterminer la stabilité des points d'équilibre, nous traçons les nullclines et analysons en détail le signe de x' et y' dans les quatre régions du premier quadrant qui sont découpées par les nullclines. Ces résultats nous donnent le portrait de phases que l'on retrouve à la figure 17.24. Remarquons en particulier que les orbites qui débutent dans le premier quadrant demeurent dans le premier quadrant. De plus, ces orbites font le tour du point d'équilibre \mathbf{p}_2 dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

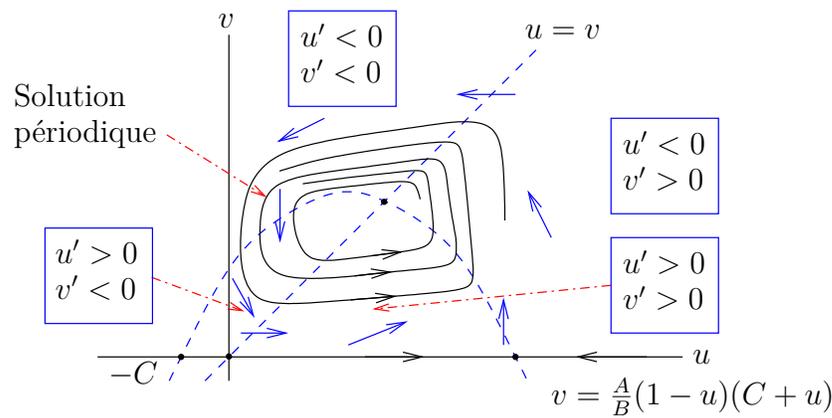


FIGURE 17.24 – Le portrait de phases du système (17.6.5) pour $A = 5$, $B = 10$ et $C = 0.03$ ressemble (i.e. est qualitativement équivalent) à celui dans la figure ci-dessus.

Le côté droit du système (17.6.6) est

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} u \left(5(1-u) - \frac{10v}{0.03+u} \right) \\ v \left(1 - \frac{v}{u} \right) \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$DF(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{du} & \frac{dF_1}{dv} \\ \frac{dF_2}{du} & \frac{dF_2}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1-2u) - \frac{0.3v}{(0.03+u)^2} & -\frac{10u}{0.03+u} \\ \frac{v^2}{u^2} & 1 - \frac{2v}{u} \end{pmatrix},$$

la linéarisation de (17.6.6) au point \mathbf{p}_1 est

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -\frac{10}{1.03} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont $1 > 0$ et $-5 < 0$. Le système linéarisé a donc un col à l'origine car les valeurs propres sont de signes opposés. Ainsi, \mathbf{p}_1 est un col pour le système (17.6.5).

La linéarisation de (17.6.6) au point \mathbf{p}_2 est

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1-2\nu) - \frac{0.3\nu}{(0.03+\nu)^2} & -\frac{10\nu}{0.03+\nu} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2.218547612 & -4.858269428 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

où $\nu \approx 0.028346114369101$.

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont approximativement $0.609274 \pm 1.506157 i$. Puisque la partie réelle des valeurs propres est positive, \mathbf{p}_2 est un foyer instable. Les orbites qui débutent près de \mathbf{p}_2 s'éloignent de ce point. Nous pourrions montrer à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson qu'il doit exister au moins une solution périodique qui entoure le point \mathbf{p}_2 .

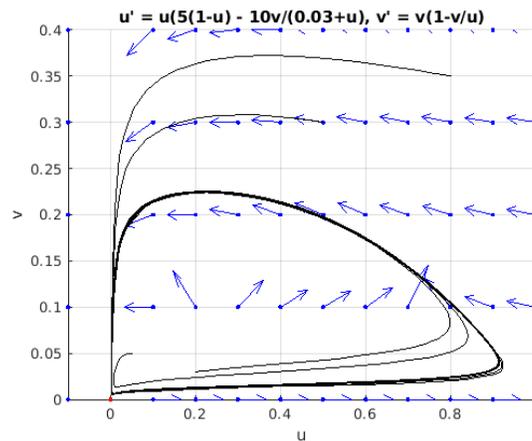


FIGURE 17.25 – Si $A = 5$, $B = 10$ et $C = 0.03$ dans le système prédateurs-proies donné en (17.6.5), les orbites tendent vers une solution périodique représentant l'équilibre périodique entre les populations de prédateurs et de proies.

Nous retrouvons à la figure 17.25 le dessin de quelques orbites qui tendent vers une solution périodique. Les conditions initiales utilisées dans la figure sont $(u, v) = (0.05; 0.05)$, $(0.2; 0.03)$, $(0.5, 0.3)$ et $(0.8, 0.35)$ avec $0 \leq \tau \leq 200$. Comme nous pouvons observer, la convergence vers la solution périodique est très rapide.

17.7 Exercices

17.7.1 Systèmes d'équations différentielles linéaires

Question 17.1

Dessinez le portrait de phase du système d'équations différentielles linéaires $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ et trouvez sa solution avec la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

17.7.2 Analyse global

Question 17.2

Pour chacun des systèmes d'équations différentielles suivants,

I: trouvez les nullclines,

II: trouvez le point d'équilibre,

III: déterminez si possible le type de ce point d'équilibre à partir de la linéarisation du système d'équations différentielles, et

IV: tracez le portrait de phases.

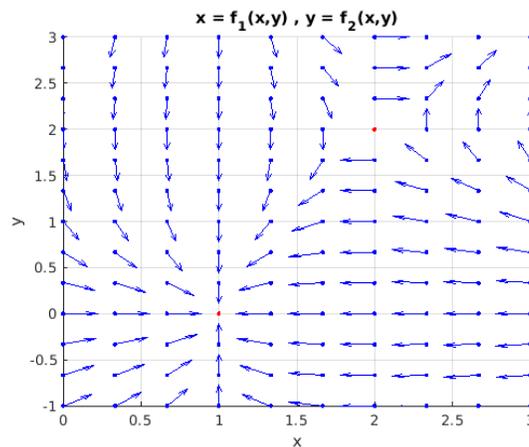
$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y + 25 \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y + 15 \end{cases} \\ \text{b)} & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y - 2 \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y - 1 \end{cases} \end{array}$$

Question 17.3

Le système d'équation différentielles

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

possède le portrait de phase suivant.



Il y a deux points d'équilibre marqués par des points en rouge. Déterminez le type de chacun des points d'équilibre.

Question 17.4

Pour chacun des systèmes d'équations différentielles suivants,

I: trouvez les nullclines,

II: trouvez les points d'équilibre,

III: déterminez si possible le type de chacun des points d'équilibre à partir de la linéarisation du système d'équations différentielles, et

IV: tracez le portrait de phases.

$$\text{a) } \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(1 - x - \frac{y}{2}\right)x \\ \frac{dy}{dt} &= \left(1 - \frac{x}{2} - y\right)y \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - x - 2y)x \\ \frac{dy}{dt} &= (1 - 2x - y)y \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 20 - 5xy - 5x \\ \frac{dy}{dt} &= 5xy - 10y \end{aligned}$$

$$\text{d) } \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)x \\ \frac{dy}{dt} &= \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right)y \end{aligned}$$

Question 17.5

Le système d'équation différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x)(x-0.5) - \frac{1}{8}xy \\ \frac{dy}{dt} &= -dy + xy \end{aligned} \tag{17.7.1}$$

décrit un système prédateur-proies où x est la fraction des proies que le milieu peut supporter et y est la fraction des prédateurs que le milieu peut supporter.

- a) Donnez un sens biologique à chacun des termes de ce système.
- b) Quel est le seuil de survie des proies lorsqu'il n'y a pas de prédateurs ?
- c) Trouvez les points d'équilibre et les nullclines.
- d) Pour quelles valeurs de d aurons-nous un état d'équilibre stable où les prédateurs et proies peuvent coexister ?
- e) Tracez le portrait de phases dans le cas où $d = 0.9$.
- f) Tracez dans le portrait de phases en (e), la solutions qui possède la condition initiale $(1.3, 1)$.
- g) Tracez approximativement le graphe de chacune des composantes de la solution en (f) (i.e. x et y) en fonction du temps.



18.1 Fonctions

18.1.1 Algèbre

Question 1.1

a) $(3^4)^{0.5} = 3^2 = 9$

b) $2^{2^3} \times 2^{2^2} = 2^{2^3+2^2} = 2^{8+4} = 2^{12}$

c) $\log_3(1) = 0$ car $3^0 = 1$.

d) $\log_{10}(5) + \log_{10}(20) = \log_{10}(5 \times 20) = \log_{10}(100) = 2$

e) $\log_{10}(500) - \log_{10}(50) = \log_{10}(500/50) = \log_{10}(10) = 1$

f) $\log_{42.3}(42.3^7) = 7$

Question 1.2

a)

$$\frac{(x^4 y^{1/4})^{1/2}}{y^{1/2}} \Rightarrow \frac{(x^4)^{1/2} (y^{1/4})^{1/2}}{y^{1/2}} \Rightarrow \frac{x^{4/2} y^{1/8}}{y^{1/2}} \Rightarrow x^2 y^{1/8-1/2} \Rightarrow x^2 y^{-3/8}.$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} + \frac{x+1}{x-3} + \frac{-9x+21}{x^2-5x+6} &= \frac{x+1}{x-2} + \frac{x+1}{x-3} + \frac{-9x+21}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(x+1)(x-3) + (x+1)(x-2) - 9x + 21}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{2x^2 - 12x + 16}{(x-2)(x-3)} = \frac{2(x-4)(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{2(x-4)}{(x-3)}. \end{aligned}$$

Question 1.3

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + x + 3 \quad | \quad x + 2 \\ -(x^3 + 2x^2) \quad \quad \quad x^2 + 1 \\ \hline \quad \quad \quad x + 3 \\ \quad \quad \quad -(x + 2) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

Donc

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 3}{x + 2} = x^1 + 1 + \frac{1}{x + 2}.$$

Question 1.4

Les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$ sont données par la formule

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si $b^2 - 4ac \geq 0$. Dans ce cas, nous avons $ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+)$. Si $b^2 - 4ac < 0$, il n'y a pas de racine réelle et nous ne pouvons pas factoriser le polynôme.

a) Les racines du polynôme $x^2 + x - 6$ sont

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_- = \frac{-1 - \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 - 5}{2} = -3.$$

Donc $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

b) Les racines du polynôme $3x^2 - 5x - 2$ sont

$$x_+ = \frac{5 + \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 + 7}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_- = \frac{5 - \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 - 7}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Donc $3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x + 1)$.

c) Nous avons

$$x^{3/2} + x^{1/2} - 12x^{-1/2} = x^{-1/2}(x^2 + x - 12) = x^{-1/2}(x + 4)(x - 3)$$

car les racines du polynôme $x^2 + x - 12$ sont

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_- = \frac{-1 - \sqrt{1 + 48}}{2} = -4.$$

Question 1.5

a) Les racines d'une polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ sont

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

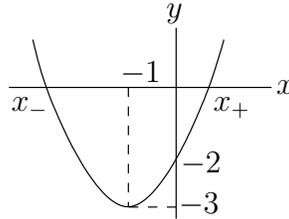
Donc les racines cherchées sont

$$x_+ = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

et

$$x_- = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}.$$

b) Puisque le coefficient de x^2 est positif, nous avons une parabole ouverte vers le haut (i.e. convexe). Cette parabole coupe l'axe des x aux points $(x, 0)$ où $x^2 + 2x - 2 = 0$; c'est-à-dire, aux points $(x_-, 0)$ et $(x_+, 0)$. La parabole coupe l'axe des y au point $(0, -2)$. La parabole a un minimum lorsque $x = \frac{x_- + x_+}{2} = -1$; le point milieu entre x_- et x_+ . Nous obtenons la figure ci-dessous.



Question 1.7

a)

$$7 \times 5^{3x} = 21 \Leftrightarrow 5^{3x} = 3 \Leftrightarrow \ln(5^{3x}) = \ln(3) \Leftrightarrow 3x \ln(5) = \ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{3 \ln(5)}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 \times 3^{-2x+1} = 7 \times 3^{3x} &\Leftrightarrow \frac{3^{-2x+1}}{3^{3x}} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 3^{-5x+1} = \frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow \ln(3^{-5x+1}) = \ln\left(\frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow (-5x+1) \ln(3) = \ln(7) - \ln(4) \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \left(-1 + \frac{\ln(7) - \ln(4)}{\ln(3)} \right) \end{aligned}$$

c)

$$\log_{10}(100^x) = 3 \Rightarrow \log_{10}(10^{2x}) = 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Question 1.8

Si nous multiplions des deux côtés par e^x , nous obtenons

$$e^x + 2e^{-x} = 3 \Rightarrow e^{2x} + 2 = 3e^x \Rightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Rightarrow (e^x - 2)(e^x - 1) = 0.$$

Donc $e^x = 1$ donne $x = 0$ et $e^x = 2$ donne $x = \ln(2)$.

Question 1.9

a) Pour $x \neq 0$ et -1 ,

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x} \Leftrightarrow 2x^2 = (2x-1)(x+1) = 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

b) Pour $x \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{(x-1) + 3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x+2}{(x+1)(x-1)} = 4$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4x + 2 &= 4(x + 1)(x - 1) = 4x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 6 &= 4\left(x^2 - x - \frac{3}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

c) Nous devons avoir $x > 5$ pour que les trois logarithmes soient bien définis. Donc

$$\begin{aligned} \ln(x - 3) + \ln(x - 5) &= \ln(2x - 6) \Leftrightarrow \ln((x - 3)(x - 5)) = \ln(x^2 - 8x + 15) = \ln(2x - 6) \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 &= 2x - 6 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 &= (x - 3)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 7 \end{aligned}$$

pour $x > 5$. La racine 3 ne satisfait pas $x > 5$.

d) $|x - 2| = 5$ si $x - 2 = 5$ ou $x - 2 = -5$; c'est-à-dire, si $x = 7$ ou -3 .

e) Ce cas n'est pas beaucoup plus difficile que le précédent. Si nous assumons que $x \neq 5/2$, qui n'est pas une solution de toute façon, alors

$$|x - 2| = |2x - 5| \Leftrightarrow \frac{|x - 2|}{|2x - 5|} = \left| \frac{x - 2}{2x - 5} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{x - 2}{2x - 5} = 1 \text{ ou } \frac{x - 2}{2x - 5} = -1.$$

Si $\frac{x - 2}{2x - 5} = 1$, nous obtenons $x - 2 = 2x - 5$ et ainsi $x = 3$. Si $\frac{x - 2}{2x - 5} = -1$, nous obtenons $x - 2 = -2x + 5$ et ainsi $x = 7/3$.

f)

$$|x^2 - 4| = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 4 \text{ ou } x^2 - 4 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 8 \text{ ou } x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \text{ ou } x = 0.$$

g) Nous devons avoir $0 < x < 3$ pour que les deux logarithmes soient bien définis. Donc

$$\begin{aligned} \ln(2) - \ln(x) &= \ln(3 - x) \Leftrightarrow \ln(2) - \ln(x) - \ln(3 - x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{x(3 - x)}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{x(3 - x)} &= 1 \Leftrightarrow 2 = x(3 - x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x = 2 \end{aligned}$$

pour $0 < x < 3$.

Question 1.10

a) Nous avons

$$5 - \frac{6}{x} < 4 \Leftrightarrow 1 - \frac{6}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x - 6}{x} < 0.$$

La fonction $f(x) = (x - 6)/x$ peut changer de signe seulement aux points x où $f(x) = 0$ ou $f(x)$ n'est pas définie; c'est-à-dire, aux points 0 et 6. Il suffit donc de déterminer le signe de $f(x)$ dans les intervalles délimités par ces points pour trouver les intervalles où $f(x) < 0$.

x	$x < 0$	$0 < x < 6$	$x > 6$
$x - 6$	-	-	+
x	-	+	+
$f(x) = (x - 6)/x$	+	-	+

Donc $5 - 6/x < 4$ pour $0 < x < 6$.

b) Nous avons $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. La fonction $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ peut changer de signe seulement aux points x où $f(x) = 0$; c'est-à-dire, aux points 1 et 3. Il suffit donc de déterminer le signe de $f(x)$ dans les intervalles délimités par ces points pour trouver les intervalles où $f(x) > 0$.

x	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$x - 1$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
$f(x) = (x - 1)(x - 3)$	+	-	+

Donc $x^2 - 4x + 3 > 0$ pour $x < 1$ ou $x > 3$.

c) Nous avons

$$\frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-7}{(x+1)(x-3)} > 0.$$

La fonction $f(x) = \frac{x-7}{(x+1)(x-3)}$ peut changer de signe seulement aux points x où $f(x) = 0$ ou $f(x)$ n'est pas définie. Nous parlons des points -1 , 3 et 7 . Il suffit donc de déterminer le signe de $f(x)$ dans les intervalles délimités par ces points pour trouver les intervalles où $f(x) > 0$.

	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$3 < x < 7$	$x > 7$
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	+	+
$x - 7$	-	-	-	+
$f(x) = \frac{x-7}{(x+1)(x-3)}$	-	+	-	+

Donc $f(x) > 0$ si $-1 < x < 3$ ou $x > 7$.

d) Nous avons

$$\frac{x^2}{x+2} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{x^2}{x+2} = -\frac{x^2 - x - 2}{x+2} = -\frac{(x-2)(x+1)}{x+2}.$$

La fonction $f(x) = -\frac{(x-2)(x+1)}{x+2}$ peut changer de signe seulement aux points x où $f(x) = 0$ ou $f(x)$ n'est pas définie. Nous parlons des points -2 , -1 et 2 . Il suffit donc de déterminer le signe de $f(x)$ dans les intervalles délimités par ces points pour trouver les intervalles où $f(x) > 0$.

x	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$x - 2$	-	-	-	+
$x + 1$	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	-

L'inégalité est donc vrai pour $x < -2$ ou $-1 < x < 2$.

e) Nous avons

$$\frac{x}{x-3} < \frac{-6}{x+1} \Leftrightarrow 0 < \frac{-6}{x+1} - \frac{x}{x-3} = -\frac{x^2 + 7x - 18}{(x-3)(x+1)} = -\frac{(x+9)(x-2)}{(x-3)(x+1)}.$$

La fonction $f(x) = -\frac{(x+9)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$ peut changer de signe seulement aux points x où $f(x) = 0$ ou $f(x)$ n'est pas définie. Nous parlons des points $-9, -1, 2$ et 3 . Il suffit donc de déterminer le signe de $f(x)$ dans les intervalles délimités par ces points pour trouver les intervalles où $f(x) > 0$.

x	$x < -9$	$-9 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
$x+9$	-	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	-	+
$x+1$	-	-	+	+	+
$f(x)$	-	+	-	+	-

L'inégalité est donc vrai pour $-9 < x < -1$ ou $2 < x < 3$.

f) Nous avons

$$|x-2| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-2 < 5 \Leftrightarrow -5 < x-2 \text{ et } x-2 < 5 \Leftrightarrow -3 < x \text{ et } x < 7.$$

L'inégalité est donc vrai pour $-3 < x < 7$.

g) Si nous assumons que $x \neq 1$, qui n'est pas une solution de toute façon, alors

$$|x^2 - 2x - 5| < |x-1| \Leftrightarrow \frac{|x^2 - 2x - 5|}{|x-1|} = \left| \frac{x^2 - 2x - 5}{x-1} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x^2 - 2x - 5}{x-1} < 1.$$

Nous avons deux inégalité à résoudre simultanément.

i: Nous commençons avec l'inégalité

$$-1 < \frac{x^2 - 2x - 5}{x-1} \Leftrightarrow 0 < 1 + \frac{x^2 - 2x - 5}{x-1} = \frac{x^2 - x - 6}{x-1} = \frac{(x-3)(x+2)}{x-1}.$$

La fonction $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x-1}$ peut changer de signe seulement aux points x où $f(x) = 0$ ou $f(x)$ n'est pas définie. Nous parlons des points $-2, 1$ et 3 . Il suffit de déterminer le signe de $f(x)$ dans les intervalles délimités par ces points pour trouver les intervalles où $f(x) > 0$.

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
$f(x)$	-	0	+	N.D.	-	0	+

L'inégalité est donc vrai pour $] -2, 1[\cup] 3, \infty[$.

ii: Nous considérons maintenant

$$\frac{x^2 - 2x - 5}{x - 1} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{x^2 - 2x - 5}{x - 1} = -\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 1} = -\frac{(x - 4)(x + 1)}{x - 1}.$$

La fonction $f(x) = -\frac{(x - 4)(x + 1)}{x - 1}$ peut changer de signe seulement aux points x où $f(x) = 0$ ou $f(x)$ n'est pas définie. Nous parlons des points -1 , 1 et 4 . Il suffit de déterminer le signe de $f(x)$ dans les intervalles délimités par ces points pour trouver les intervalles où $f(x) > 0$.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x < 4$	4	$x > 4$
$f(x)$	$+$	0	$-$	N.D.	$+$	0	$-$

L'inégalité est donc vraie pour $] -\infty, -1[\cup]1, 4[$.

Pour répondre à la question initiale, il faut trouver les valeurs de x qui satisfont les deux cas simultanément. Il faut donc trouver l'intersection des deux ensembles de solutions que nous avons. Nous obtenons $] -2, -1[\cup]3, 4[$.

18.1.2 Fonctions

Question 1.11

Puisque $f(x) = 3 + 2x - x^2 = 4 - (x - 1)^2$, nous avons que $f(x)$ peut prendre toutes les valeurs plus petites ou égales à 4 car $(x - 1)^2$ peut prendre toutes les valeurs plus grandes ou égales à 0 .

Question 1.13

a) La fonction g est définie pour tout x réel. Le domaine de g est donc \mathbb{R} . Puisque x^3 peut prendre toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$, on a que l'image de g est l'image de 5^x pour $x \in \mathbb{R}$; c'est-à-dire que l'image de g est $]0, \infty[$.

Puisque

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 5^{x_1^3} = 5^{x_2^3} \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

nous avons que g est une fonction injective sur \mathbb{R} , son domaine. Nous pouvons donc inverser $g : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$. L'inverse de g est donné par

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = 5^{x^3} \Leftrightarrow \log_5(y) = x^3 \Leftrightarrow x = (\log_5(y))^{1/3}.$$

Par convention, nous écrivons $y = g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\log_5(x)}$. Le domaine de g^{-1} est $]0, \infty[$, l'image de g , et l'image de g^{-1} est \mathbb{R} , le domaine de g .

b) Déterminons les valeurs de x pour lesquelles $(x+1)/(x-1) \geq 0$. L'expression $(x+1)/(x-1)$ peut changer de signe seulement aux points x où elle est nul ou elle n'est pas définie. C'est-à-dire aux points -1 et 1 . Il suffit donc de déterminer le signe de $(x+1)/(x-1)$ dans les intervalles délimités par ces points pour trouver les intervalles où $(x+1)/(x-1) > 0$.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$x + 1$	$-$	0	$+$	2	$+$
$x - 1$	$-$	2	$-$	0	$+$
$(x + 1)/(x - 1)$	$+$	0	$-$	N.D.	$+$

Le domaine de f est donc $] -\infty, -1[\cup]1, \infty[$. L'image de f est $[0, 1[\cup]1, \infty[$ car

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

où $2/(x-1)$ prend toutes les valeurs plus grande que 0 lorsque $1 < x < \infty$ et $2/(x-1)$ prend toutes les valeurs entre -1 et 0 (-1 inclus) lorsque $-\infty < x \leq -1$. Ne pas oublier que la racine carrée est positive ou nulle.

Puisque

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}} = \sqrt{\frac{x_2+1}{x_2-1}} \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \\ &\Rightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1) \\ &\Rightarrow x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 \\ &\Rightarrow x_2 - x_1 = -x_2 + x_1 \Rightarrow 2x_2 = 2x_1 \Rightarrow x_2 = x_1, \end{aligned}$$

nous avons que f est une fonction injective sur son domaine. Nous pouvons donc inverser

$$f : \text{Dom } f \rightarrow \text{Im } f .$$

L'inverse de f est donné par

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow y^2(x-1) = x+1 \\ &\Leftrightarrow y^2x - x = y^2 + 1 \Leftrightarrow x(y^2 - 1) = y^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} . \end{aligned}$$

Notez que la deuxième équivalence ci-dessus est vrai seulement parce que nous assumons que y est dans l'image de f ; c'est-à-dire, $y \in [0, 1[\cup]1, \infty[$.

Par convention, nous écrivons $y = f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Le domaine de f^{-1} est l'image de f et l'image de f^{-1} est le domaine de f .

c) La fonction h est définie pour tout x sauf $x = -1$. Le domaine de h est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Puisque $y^{10} \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et $\frac{x}{x+1}$ peut prendre toutes les valeurs réelles sauf 1 (pourquoi?) en variant x , nous avons que l'image de h est $[0, 1[\cup]1, \infty[$.

La fonction h n'est pas injective car

$$h(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = h\left(-\frac{1}{3}\right) .$$

En fait, le lecteur peut vérifier que $h(x_1) = h(x_2)$ si $x_1 + 2x_1x_2 + x_2 = 0$. Donc h n'est pas inversible sur son domaine.

Note : Si nous restreignons la fonction h à $[0, \infty[$, alors $h : [0, \infty[\rightarrow [0, 1[$ est inversible. Plus précisément, puisque

$$\begin{aligned} h(x_1) = h(x_2) &\Rightarrow \left(\frac{x_1}{x_1+1}\right)^{10} = \left(\frac{x_2}{x_2+1}\right)^{10} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+1} \\ &\Rightarrow x_1(x_2+1) = x_2(x_1+1) \Rightarrow x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

nous avons que h est injective sur $[0, \infty[$. Nous avons utilisé le fait que $\frac{x_1}{x_1+1} \geq 0$ et $\frac{x_2}{x_2+1} \geq 0$ pour obtenir la deuxième implication ci-dessus. L'inverse de h est donné par

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{10} \Leftrightarrow y^{1/10} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow y^{1/10}(x+1) = x \\ &\Leftrightarrow y^{1/10}x - x = -y^{1/10} \Leftrightarrow x(y^{1/10} - 1) = -y^{1/10} \Leftrightarrow x = \frac{y^{1/10}}{1 - y^{1/10}}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\frac{x}{x+1} \geq 0$ pour obtenir la deuxième équivalence ci-dessus. Par convention, nous écrivons $y = h^{-1}(x) = \frac{x^{1/10}}{1 - x^{1/10}}$. Le domaine de h^{-1} est l'image de h où h est restreint à $[0, \infty[$. C'est-à-dire que le domaine de h^{-1} est $[0, 1[$. L'image de h^{-1} est $[0, \infty[$, le domaine que nous avons assigné à h .

Nous pourrions montrer que si nous restreignons la fonction h à $] -\infty, -1[$, alors $h :] -\infty, -1[\rightarrow] 1, \infty[$ est aussi inversible. De même, si nous restreignons la fonction h à $] -1, 0[$, alors $h :] -1, 0[\rightarrow [0, \infty[$ est inversible.

Question 1.14

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g^2(x) - 1} = \sqrt{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1} = \sqrt{(x^2 + 1) - 1} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Question 1.15

a) Nous avons $f(x) = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = 5y^{-1}$ et $f_2(x) = 1 + 5^x$.

b) Nous avons $h(t) = h_1(h_2(t))$ où $h_1(x) = x^{-4}$ et $h_2(t) = 1 - t^2$.

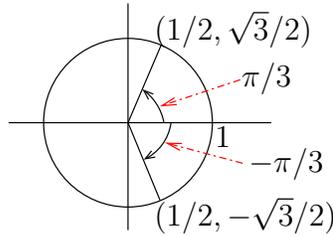
Question 1.16

Nous avons que $g(x) = g_1(g_2(g_3(x)))$ où $g_1(x) = \cos(x)$, $g_2(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ et $g_3(x) = 1 + x^2$.

18.1.3 Trigonométrie

Question 1.18

Puisque θ est un angle connu (i.e. $\theta = \pm\pi/3 + 2n\pi$), nous utilisons le cercle unité pour répondre à cette question.



Nous trouvons donc $\sin(\theta) = \pm\sqrt{3}/2$.

Nous aurions pu utiliser l'identité $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ pour obtenir le même résultat.

Question 1.19

a) La fonction est de la forme

$$x = f(t) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right)$$

où l'amplitude est $A = (9 - (-1))/2 = 5$, la moyenne est $M = (9 + (-1))/2 = 4$, la période est $P = 2$ et la phase est $T = 0$. Donc

$$x = f(t) = 4 + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{2}(t - 0)\right) = 4 + 5 \cos(\pi t) .$$

b) La fonction est de la forme

$$x = g(t) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right)$$

où l'amplitude est $A = (8 - (-2))/2 = 5$, la moyenne est $M = (8 + (-2))/2 = 3$, la période est $P = 2$ et la phase est $T = 0.5$. Donc

$$x = g(t) = 3 + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{2}(t - 0.5)\right) = 3 + 5 \cos(\pi(t - 0.5)) .$$

c) La fonction est de la forme

$$x = V(t) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right)$$

où la moyenne est $M = (2.2 + 1.8)/2 = 2$, l'amplitude $A = (2.2 - 1.8)/2 = 0.2$, la période est 0.2, et la phase est $T = 0.1$. Donc

$$\begin{aligned} x = V(t) &= M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right) = 2 + 0.2 \cos\left(\frac{2\pi}{0.2}(t - 0.1)\right) \\ &= 2 + 0.2 \cos(10\pi(t - 0.1)) . \end{aligned}$$

d) La fonction est de la forme

$$x = h(t) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right)$$

où la moyenne est $M = 3$, l'amplitude est $A = 2$, la période est $P = 10$ et la phase est $T = 1$.
Donc

$$x = h(t) = 3 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{10}(t - 1)\right) = 3 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}(t - 1)\right).$$

Question 1.20

a) Puisque $\cos(t) = -\cos(t - \pi)$, nous pouvons écrire

$$f(t) = 2 - \cos(t) = 2 + \cos(t - \pi) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right)$$

avec $M = 2$, $A = 1$, $P = 2\pi$ et $T = \pi$.

b) Nous avons

$$f(t) = 2 + \sin(t) = 2 + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right),$$

où $M = 2$ est la moyenne, $A = 1$ est l'amplitude, $P = 2\pi$ est la période et $T = \frac{\pi}{2}$ est la phase.

c) Puisque $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$, nous avons que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2 - t)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(t - 1)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(t - 1)\right).$$

Ainsi

$$f(t) = -5 + 7 \sin\left(\frac{\pi}{2}(2 - t)\right) = -5 + 7 \cos\left(\frac{\pi}{2}(t - 1)\right) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - T)\right)$$

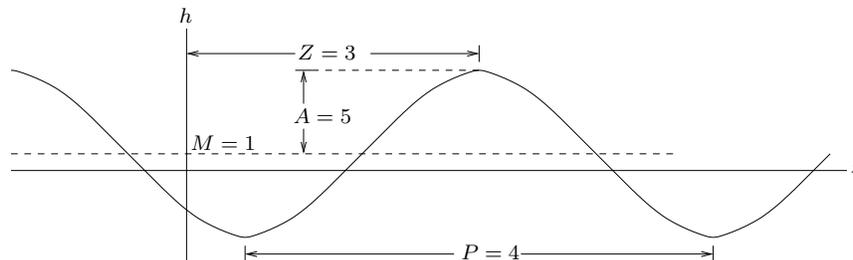
où $M = -5$ est la moyenne, $A = 7$ est l'amplitude, $P = 4$ est la période et $T = 1$ est la phase.

Question 1.21

a)

$$h(z) = 1 + 5 \cos\left(\frac{\pi z}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) = 1 + 5 \cos\left(\frac{2\pi}{4}(z - 3)\right) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(z - Z)\right)$$

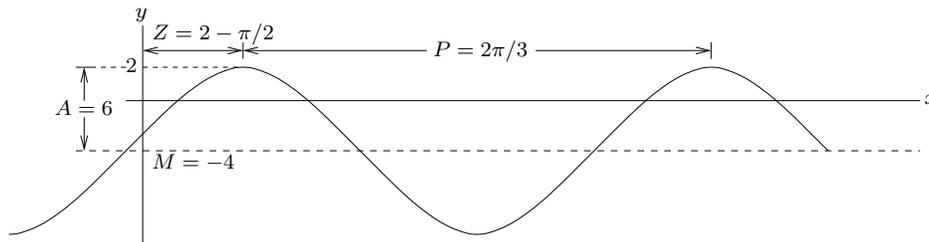
où $M = 1$ est la moyenne, $A = 5$ est l'amplitude, $P = 4$ est la période et $Z = 3$ est la phase.



b)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 6 \sin(3x - 6) - 4 = -4 + 6 \cos\left((3x - 6) - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -4 + 6 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\left(x - \left(2 + \frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(x - Z)\right).
 \end{aligned}$$

L'amplitude est $A = 6$. La période est $P = 2\pi/3$, la moyenne est $M = -4$ et la phase est $Z = 2 + \frac{\pi}{6}$. Remarque que $Z = 2 - \frac{\pi}{2}$ serait préférable et acceptable car la période est $2\pi/3$.

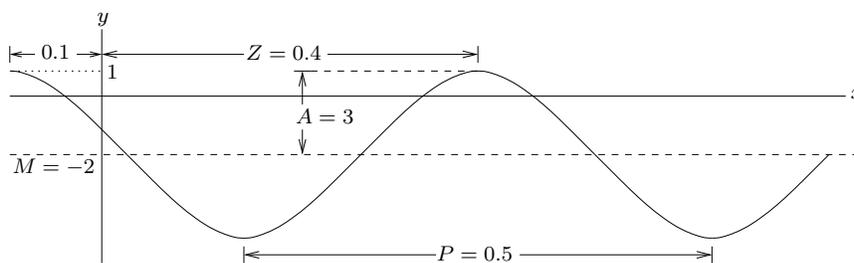


c)

$$W(y) = -2.0 + 3.0 \cos\left(\frac{2\pi}{0.5}(y + 0.1)\right) = M + A \cos\left(\frac{2\pi}{P}(y - Z)\right)$$

où $M = -2$ est la moyenne, $A = 3$ est l'amplitude, $P = 0.5$ est la période et $Z = 0.4$ est la phase. Remarquons que $Z = -0.1$ serait aussi acceptable pour la phase car la période est 0.5.

Le graphe de W est donnée ci-dessous.

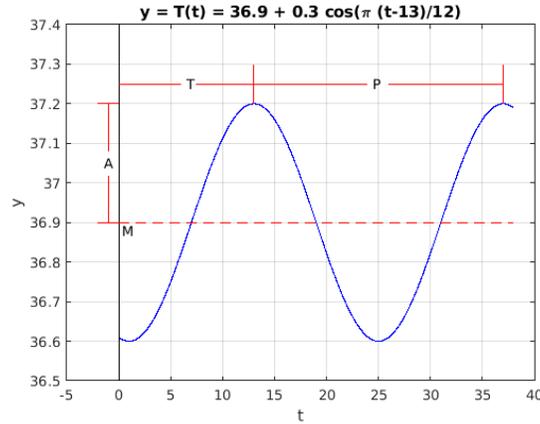


Question 1.22

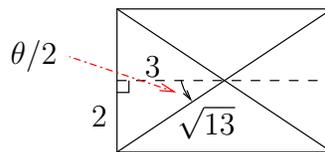
La période P est 24 heures, la moyenne M est $(37.2 + 36.6)/2 = 36.9$, l'amplitude A est $(37.2 - 36.6)/2 = 0.3$ et la phase T est 13. Ainsi,

$$T(t) = 36.9 + 0.3 \cos\left(\frac{2\pi}{24}(t - 13)\right) = 36.9 + 0.3 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 13)\right)$$

Le graphe de cette fonction est

**Question 1.23**

Nous avons la figure ci-dessous où le Théorème de Pythagore a été utilisé pour trouver la longueur de la diagonale du rectangle.



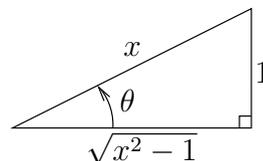
Nous trouvons donc que $\sin(\theta/2) = 2/\sqrt{13}$ et $\cos(\theta/2) = 3/\sqrt{13}$. Ainsi

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{9}{13} - \frac{4}{13} = \frac{5}{13}.$$

Question 1.24

Nous pourrions toujours utiliser les identités trigonométriques pour résoudre cette question. Mais si vous êtes comme l'auteur de ce manuel et avez de la difficulté à mémoriser toutes ces formules, un retour à la définition du cosinus et du sinus à partir d'un triangle peut résoudre cette question.

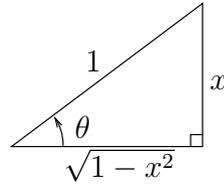
Nous obtenons le dessin suivant de $\sin(\theta) = \frac{1}{x}$.



Ainsi, $\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. La valeur négative est donnée par l'angle obtus.

Question 1.25

Soit $\theta = \arcsin(x)$ où $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Donc $\sin(\theta) = x$ et nous obtenons la figure suivante.



Ainsi, $\tan(\arcsin(x)) = \tan(\theta) = x/\sqrt{1-x^2}$.

18.1.4 Fonctions exponentielles

Question 1.26

Si $f(x) = pb^x$, alors

$$b^2 = \frac{pb^4}{pb^2} = \frac{f(4)}{f(2)} = \frac{0.1875}{0.75} \Rightarrow b = 0.5$$

$$b^2 = \frac{pb^6}{pb^4} = \frac{f(6)}{f(4)} = \frac{0.046875}{0.1875} \Rightarrow b = 0.5$$

et

$$b^2 = \frac{pb^8}{pb^6} = \frac{f(8)}{f(6)} = \frac{0.011719}{0.046875} \Rightarrow b \approx 0.50000533$$

Nous pouvons supposer que $f(x) = p(1/2)^x$. Puisque $f(2) = p(1/2)^2 = 0.75$ par hypothèse, nous obtenons $p = 3$. Ainsi, $f(x) = 3(1/2)^x$.

Si $g(x) = mx + b$, alors

$$2m = (4m + b) - (2m + b) = g(4) - g(2) = 10.3 - 5.7 = 4.6 \Rightarrow m = 2.3$$

$$2m = (6m + b) - (4m + b) = g(6) - g(4) = 14.9 - 10.3 = 4.6 \Rightarrow m = 2.3$$

et

$$2m = (8m + b) - (6m + b) = g(8) - g(6) = 19.5 - 14.9 = 4.6 \Rightarrow m = 2.3$$

Nous pouvons supposer que $g(x) = 2.3x + b$. Puisque $g(2) = 2.3 \times 2 + b = 5.7$, nous obtenons $b = 1.1$. Ainsi, $g(x) = 2.3x + 1.1$.

Question 1.27

Nous avons $S(t) = S_0 10^{0.693t}$. Pour répondre à la première question, il faut trouver t tel que $S(t) = 2S(0)$. Donc

$$S_0 10^{0.693t} = 2S_0 \Rightarrow 10^{0.693t} = 2 \Rightarrow \log_{10}(10^{0.693t}) = \log_{10}(2) \Rightarrow 0.693t = \log_{10}(2)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log_{10}(2)}{0.693} = 0.4343876 \dots$$

Remarquons que la solution ne dépend pas de la valeur de S_0 .

Pour répondre à la deuxième question, il faut trouver t tel que $S(t) = 10S(0)$. Donc

$$S_0 10^{0.693t} = 10S_0 \Rightarrow 10^{0.693t} = 10 \Rightarrow 0.693 t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{0.693} = 1.443001 \dots$$

Question 1.28

Puisque la population double tous les 24 ans, nous avons que $p(24) = 2p(0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_0 e^{24\alpha} = 2p_0 &\Rightarrow e^{24\alpha} = 2 \Rightarrow \ln(e^{24\alpha}) = \ln(2) \Rightarrow 24\alpha = \ln(2) \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{\ln(2)}{24} = 0.02888 \dots \end{aligned}$$

Donc $p(t) \approx p_0 e^{0.02888 t}$. Puisque $p(12) \approx 500 e^{0.02888 \times 12} = 707.1067 \dots$, nous avons donc approximativement 707 individus (par km^2) après 12 ans.

Question 1.29

Pour trouver les unités de α , nous écrivons l'équation $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$ en termes des unités seulement.

$$\text{cm}^3 = \text{cm}^3 e^{(\text{unités de } \alpha) \times s}$$

Pour que l'équation soit satisfaite, il faut que $e^{(\text{unités de } \alpha) \times s}$ n'est pas d'unités. Il faut donc que les unités de α soient s^{-1} .

La valeur initiale n'est pas nécessaire pour déterminer le temps qu'il faut pour que le volume double, quadruple, etc. Pour déterminer le temps nécessaire pour que le volume double, nous cherchons t tel que $V_0 e^{1.1t} = 2V_0$; c'est-à-dire, $e^{1.1t} = 2$. Donc $t = \frac{\ln(2)}{1.1} \approx 0.63013380$ s. Ainsi, le volume double à tous les 0.63013380 s. Le volume sera quatre fois plus grand après 2×0.63013380 s, le volume sera huit fois plus grand après $2 \times 2 \times 0.63013380$ s, etc.

Question 1.30

Nous cherchons t tel que $Q(t) = Q_0 e^{-0.000122 t} = \frac{1}{2} Q_0$. Comme $Q_0 \neq 0$, nous pouvons diviser des deux côtés pour obtenir

$$\begin{aligned} Q_0 e^{-0.000122 t} = \frac{1}{2} Q_0 &\Rightarrow e^{-0.000122 t} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \\ &\Rightarrow -0.000122 t = \ln(2^{-1}) = -\ln(2) \\ &\Rightarrow t = \frac{-\ln(2)}{-0.000122} = 5,681.53426 \dots \text{ années.} \end{aligned}$$

Question 1.31

Puisque $200 = \frac{1}{2^3} \times 1600$, nous pouvons utiliser un raisonnement élémentaire pour répondre à la première question. Après 43 ans, la population sera de 800 individus (par m^2). Après un autre 43 ans, la population sera de 400 individus (par m^2). Finalement, après un autre

43 ans, la population sera de 200 individus (par m^2). Il faut donc $3 \times 43 = 129$ ans pour que la population atteigne 200 individus (par m^2).

La méthode que nous venons d'utiliser ne peut pas déterminer le nombre d'années pour atteindre une population de 437 individus. Il faut trouver $P(t)$.

Nous savons que $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$, où α est le taux de croissance relatif et P_0 est le nombre initial d'individus (par m^2) dans la population. Pour déterminer α , nous utilisons le fait que la demie-vie est de 43 ans. Donc

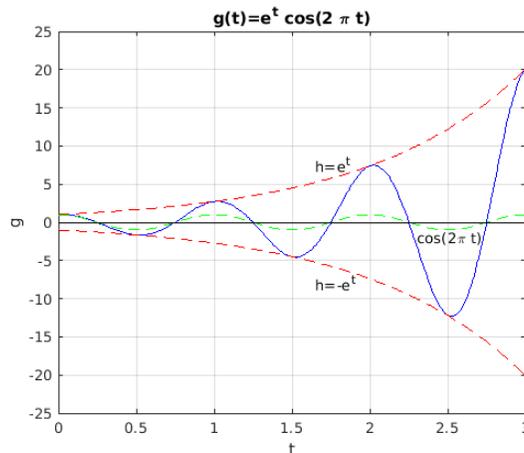
$$P_0 e^{43\alpha} = \frac{1}{2} P_0 \Rightarrow e^{43\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow 43\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \Rightarrow \alpha = \frac{-\ln(2)}{43} \approx -0.0161197$$

Nous cherchons t tel que $1600e^{\alpha t} = 437$. Donc

$$\begin{aligned} 1600e^{\alpha t} = 437 &\Rightarrow e^{\alpha t} = \frac{437}{1600} \Rightarrow \alpha t = \ln\left(\frac{437}{1600}\right) = \ln(437) - \ln(1600) \\ \Rightarrow t &= \frac{\ln(437) - \ln(1600)}{\alpha} \approx \frac{\ln(437) - \ln(1600)}{-0.0161197} \approx 80.511768 \text{ ans.} \end{aligned}$$

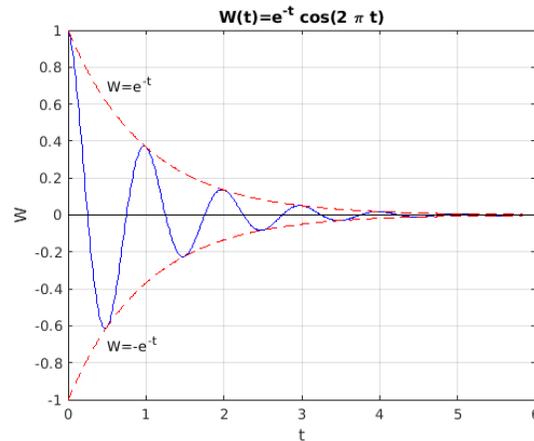
Question 1.32

Nous pouvons « imaginer » que g est la fonction $\cos(2\pi t)$ avec une amplitude e^t qui augmente lorsque $t \rightarrow \infty$ et converge vers zéro lorsque $t \rightarrow -\infty$. La fonction $\cos(2\pi t)$ est une fonction périodique de période 1. De plus, $\cos(2\pi t) = 0$ pour $t = (2n + 1)/4$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Le graphe de g est donnée ci-dessous.



Question 1.33

Nous pouvons « imaginer » que W est la fonction $\cos(2\pi t)$ avec une amplitude e^{-t} qui augmente lorsque $t \rightarrow -\infty$ et converge vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. La fonction $\cos(2\pi t)$ est une fonction périodique de période 1. De plus, $\cos(2\pi t) = 0$ pour $t = (2n + 1)/4$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Le graphe de W est donnée ci-dessous.



18.2 Suites et séries

18.2.1 Suites

Question 2.1

a) Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

La deuxième égalité provient du théorème 2.1.8 et la troisième égalité de la proposition 2.1.17.

b) Puisque $\ln(n+3) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+3}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+3) - \ln(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) = \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)\right) = \ln(1) = 0.$$

Nous verrons lors de l'étude des fonctions continues que la deuxième égalité, lorsque nous passons la limite à l'intérieure de la fonction \ln , est valide.

d)

$$\left\{3 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, \dots\}.$$

La suite 4, 3, 2, 3 est répétée un nombre infini de fois. Donc, le terme générale de la suite n'approche pas une valeur unique et fixe.

18.2.2 Séries

Question 2.4

a) Après n années, le nombre d'unités produites dans la première année et qui sont toujours en usage est de $5000(1 - 0.01)^n$, le nombre d'unités produites dans la deuxième année et qui sont toujours en usage est de $5000(1 - 0.01)^{n-1}$, ..., le nombre d'unités produites dans l'avant dernière année et qui sont toujours en usage est de $5000(1 - 0.01)^2$, et le nombre

d'unités produites dans la dernière année et qui sont toujours en usage est de $5000(1 - 0.01)$. Ainsi, après n années, le nombre d'unités produites et qui sont toujours en usage est

$$P_n = \sum_{i=1}^n 5000(1 - 0.1)^i = 5000 \sum_{i=1}^n 0.9^i = 5000 \left(\frac{1 - 0.9^{n+1}}{1 - 0.9} \right) = 50000(1 - 0.9^{n+1}).$$

b) Le niveau de stabilisation du marché pour ces cerfs-volants est de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 50000(1 - 0.9^n) = 50000$$

unités.

Question 2.5

b) Puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n + \left(\frac{1}{6} \right)^n \right)$$

est la somme de deux séries géométriques convergente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{6}{5},$$

la série converge et sa somme est $\frac{3}{2} + \frac{6}{5} = \frac{27}{10}$.

c) Nous avons que

$$\frac{2^n - 3^{n+2}}{5^{n+1}} = \frac{2^n}{5^{n+1}} - \frac{3^{n+2}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^n - \frac{3^2}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^n.$$

De plus, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n$ sont deux séries géométriques convergentes. La première série est de raison $r = \frac{2}{5}$ et converge vers $\frac{1}{1 - 2/5} = \frac{5}{3}$. La seconde série est de raison $r = \frac{3}{5}$ et converge vers $\frac{1}{1 - 3/5} = \frac{5}{2}$. Nous avons donc que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n+2}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n - \frac{3^2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n = \frac{1}{5} \left(\frac{5}{3} \right) - \frac{3^2}{5} \left(\frac{5}{2} \right) = -\frac{25}{6}.$$

e) Puisque $5^n 2^{-2n} = \left(\frac{5}{4} \right)^n$ ne converge pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini, la série diverge.

f) Nous avons que

$$\frac{30}{n^2 + 3n + 2} = \frac{30}{(n+2)(n+1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + B(n+2)}{(n+2)(n+1)}.$$

Pour que l'égalité soit satisfaite, nous devons avoir $30 = A(n+1) + B(n+2)$. Si $n = -1$, nous obtenons $30 = B$. Si $n = -2$, nous obtenons $30 = -A$. Donc

$$\frac{30}{(n+2)(n+1)} = \frac{-30}{n+2} + \frac{30}{n+1}.$$

Nous avons la série télescopique

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{30}{(n+2)(n+1)} &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{-30}{n+2} + \frac{30}{n+1} \right) \\ &= \left(-\frac{30}{2} + 30 \right) + \left(\frac{-30}{3} + \frac{30}{2} \right) + \left(\frac{-30}{4} + \frac{30}{3} \right) + \left(\frac{-30}{5} + \frac{30}{4} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{-30}{N+2} + \frac{30}{N+1} \right) = 30 - \frac{30}{N+2}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{30}{N+2} = 0$, nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{30}{(n+2)(n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(30 - \frac{30}{N+2} \right) = 30.$$

g) Nous avons que

$$\frac{1}{n(n+5)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+5} = \frac{A(n+5) + Bn}{n(n+5)}.$$

Pour que l'égalité soit satisfaite, nous devons avoir $1 = A(n+5) + Bn$. Donc, $5A = 1$ et $A + B = 0$. Nous obtenons $A = -B = 1/5$.

$$\frac{1}{n(n+5)} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5(n+1)}.$$

Nous avons la série télescopique

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+5)} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{5n} - \frac{1}{5(n+1)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15} \right) + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{20} \right) + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{25} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{5N} - \frac{1}{5(N+1)} \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5(N+1)}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{5(N+1)} = 0$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5(N+1)} \right) = \frac{1}{5}.$$

18.2.3 Tests de convergence

Question 2.6

b) Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n/2} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n/2} \right)^2 = e^2 \neq 0,$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ diverge.

f) Nous utilisons le test du quotient avec $a_n = \frac{(n+1)^2}{n!}$. Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 n!}{(n+1)^2 (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \frac{1}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2/n}{1+1/n}\right)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 \times 0 = 0 < 1, \end{aligned}$$

la série converge.

g) Il y a plusieurs façons de démontrer que cette série converge.

Nous pouvons comparer avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qui converge car c'est une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ avec $p > 1$ (proposition 2.2.16). Notons que

$$\frac{1}{n(n^3+5)^{1/3}} \leq \frac{1}{n(n^3)^{1/3}} = \frac{1}{n^2}$$

pour tout n . Nous obtenons donc que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^3+5)^{1/3}}$ converge grâce au Test de comparaison.

Nous aurions aussi pu utiliser le Test de comparaison à la limite (théorème 2.2.29) avec la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pour obtenir la même conclusion car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n(n^3+5)^{1/3})}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n^3+5)^{1/3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^3+5}\right)^{1/3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+5/n^3}\right)^{1/3} = 1$$

un nombre réel positif.

i) Nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ avec $a_n = \frac{n}{5^n}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)5^n}{n5^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5} < 1,$$

la série converge grâce au théorème 2.2.32.

m) Puisque $-3 \leq 3 \sin(n) \leq 3$ pour tout n , nous avons $2 \leq 5 + 3 \sin(n) \leq 8$ pour tout n . Puisque $3n^3 < 3n^3 + n + 4$ pour tout $n > 0$, nous avons $\frac{1}{3n^3} > \frac{1}{3n^3 + n + 4}$ pour tout $n > 0$. Ainsi

$$0 < \frac{5 + 3 \sin(n)}{3n^3 + n + 4} \leq \frac{8}{3n^3}.$$

Or la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{3n^3} = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge grâce à la proposition 2.2.16 avec $p = 3 > 1$. Donc, nous obtenons du Test de comparaison que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3 \sin(n)}{3n^3 + n + 4}$ converge.

18.2.4 Convergence absolue et séries alternées

Question 2.7

b) La série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est une série alternée de la forme $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\ln(n)}$. Nous avons $a_n > 0$ et $a_{n+1} < a_n$ pour tout n , et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Donc, grâce au théorème 2.2.42, la série converge.

Par contre, $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$ pour tout $n > 1$ et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (la série harmonique). Donc, par le test de comparaison, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

En conclusion, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge seulement conditionnellement.

c) Nous pouvons montrer à l'aide du Test de d'Alembert que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$ converge absolument. En effet, avec $a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(2n+3)!} \right| \left| \frac{(2n+1)!}{(-1)^n n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1.$$

d) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$ est une série alternée de la forme $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$. Nous avons $a_n > 0$, $a_{n+1} < a_n$ pour tout n , et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Donc, grâce au théorème 2.2.42, la série converge.

Par contre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/\sqrt{n(n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} = \sqrt{1} = 1$$

et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Donc, par le test de comparaison à la limite,

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ diverge.

En conclusion, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$ converge seulement conditionnellement.

e) Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (proposition 2.2.16 avec $p = 3/2$ et $p = 2$ respectivement), nous avons que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2} \right)$ converge (théorème 2.2.11). Donc

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^2} \right)$ converge absolument.

f) la suite $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(2n+1)(2n+3)}$ ne converge pas absolument car

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n+1)(2n+3)} = 1/4 \neq 0$. Elle ne converge même pas simplement car

$\left\{ (-1)^n \frac{n^2}{(2n+1)(2n+3)} \right\}_1^{\infty}$ ne converge pas vers 0.

Question 2.8

Nous avons une série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n = \frac{1}{3^n}$. Vérifions les conditions du test des séries alternées. Nous avons $a_n > 0$ sans aucun doute. De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ grâce à la proposition 2.1.17. Finalement, $a_n = \frac{1}{3^n} > \frac{1}{3^{n+1}} = a_{n+1}$. Donc la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ converge.

Il faut trouver N tel que $|S_n - S| < 10^{-3}$ pour tout $n \geq N$. Or, pour une série alternée, nous avons que $|S_n - S| < a_{n+1}$. Il suffit donc de trouver n tel que $\frac{1}{3^{n+1}} \leq 0.001$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^{n+1}} \leq 0.001 &\Rightarrow 1000 \leq 3^{n+1} \Rightarrow \ln(1000) = 3 \ln(10) \leq (n+1) \ln(3) \\ &\Rightarrow \frac{3 \ln(10)}{\ln(3)} - 1 \leq n \Rightarrow 5.2877 \dots \leq n. \end{aligned}$$

Donc six termes ($N = 6$) est suffisant.

Question 2.9

Nous avons une série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ avec $a_n = n/4^n$. Vérifions les conditions du test des séries alternées. Nous avons évidemment $a_n > 0$. Puisque

$$2^n > n \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{2^n}{4^n} > \frac{n}{4^n} \geq 0$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$ (proposition 2.1.17), nous avons grâce au Théorème des gendarmes (théorème 2.1.10) que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Finalement,

$$\frac{3n}{4} > \frac{1}{4} \Rightarrow n > \frac{n+1}{4} \Rightarrow \frac{n}{4^n} > \frac{n+1}{4^{n+1}} \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

pour $n > 0$. Donc la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}$ converge.

Pour déterminer N tel que $|S_n - S| < 10^{-3}$ pour tout $n \geq N$, il suffit de trouver n tel que $|S_n - S| < a_{n+1} < 10^{-3}$. Pour simplifier les calculs, nous choisissons n tel que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{4^{n+1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-3}.$$

Si nous résolvons pour n , nous trouvons

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-3} &\Rightarrow 10^3 < 2^{n+1} \Rightarrow \log_{10}(10^3) < \log_{10}(2^{n+1}) = (n+1) \log_{10}(2) \\ &\Rightarrow 3 - \log_{10}(2) < n \log_{10}(2) \Rightarrow n > \frac{3 - \log_{10}(2)}{\log_{10}(2)} \approx 8.966. \end{aligned}$$

Donc $N = 9$ est un choix acceptable et nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} \approx \sum_{n=1}^9 \frac{(-1)^n n}{4^n} \approx -0.1600075$$

avec une erreur d'au plus 10^{-3} .

Note : Nous pouvons vérifier en calculant directement a_{n+1} que $n = 6$ est la plus petite valeur qui donne $a_{n+1} < 10^{-3}$. Donc, nous avons surestimé la valeur de n .

18.3 Limites et fonctions continues

18.3.1 Limites

Question 3.1

Posons $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$. Si nous choisissons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = 1/n$, nous obtenons une suite qui tend vers 0. Les données du tableau suivant suggèrent que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 2$.

n	$x_n = 1/n$	$f(x_n)$
1	1	6.389056...
2	1/2	3.43656...
3	1/3	2.8432...
⋮	⋮	⋮
100	1/100	2.020134...
⋮	⋮	⋮
1000	1/1000	2.002001
⋮	⋮	⋮
↓	↓	↓
∞	0	2

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 2$ quelle que soit la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0, nous pouvons écrire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

Question 3.2

Nous pouvons facilement déduire du graphe de la fonction p que $\lim_{t \rightarrow 1^-} p(t) = 0$ car $p(t) = 0$ pour tous $t < 1$. De même, nous avons que $\lim_{t \rightarrow 1^+} p(t) = 2$. Ainsi, la limite $\lim_{t \rightarrow 1} p(t)$ n'existe pas car $\lim_{t \rightarrow 1^-} p(t) \neq \lim_{t \rightarrow 1^+} p(t)$.

Question 3.3

a) Puisque

$$\frac{1 - \cos(0.1)}{0.1} \approx 0.04995834, \quad \frac{1 - \cos(0.01)}{0.01} \approx 0.00499995,$$

$$\frac{1 - \cos(0.001)}{0.001} \approx 4.9999995 \times 10^{-4}, \quad \frac{1 - \cos(0.0001)}{0.0001} \approx 4.9999999 \times 10^{-5}, \dots \rightarrow 0,$$

nous pouvons assumer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$.

b) Puisque

$$\frac{\ln(1 - 0.1)}{0.1} \approx -1.05360515, \quad \frac{\ln(1 - 0.01)}{0.01} \approx -1.00503358,$$

$$\frac{\ln(1 - 0.001)}{0.001} \approx -1.00050033, \quad \frac{\ln(1 - 0.0001)}{0.0001} \approx -1.0000500, \dots \rightarrow -1,$$

nous pouvons assumer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(x)}{x} = -1$.

Question 3.4

Nous avons $\sqrt{x} < 0.1$ si $0 \leq x < 0.01$. Nous avons $\sqrt{x} < 0.01$ si $0 \leq x < 0.0001$. La convergence n'est certainement pas rapide. Il faut que x soit très petit pour que \sqrt{x} soit petit.

Question 3.5

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1.5$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0.5$. Comme la limite à droite est différente de la limite à gauche la limite, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$. Comme la limite à droite est différente de la limite à gauche la limite, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ n'existe pas.

Question 3.6

Puisque v est une fonction continue, $\lim_{t \rightarrow 0} v(t) = v(0) = 1$.

1. Nous cherchons t tel que $|v(t) - 1| < 1$.

$$|v(t) - 1| < 1 \Rightarrow t^2 < 1 \Rightarrow -1 < t < 1.$$

2. Nous cherchons t tel que $|v(t) - 1| < 0.5$.

$$|v(t) - 1| < 0.5 \Rightarrow t^2 < 0.5 \Rightarrow -\sqrt{0.5} < t < \sqrt{0.5} .$$

3. Nous cherchons t tel que $|v(t) - 1| < 0.01$.

$$|v(t) - 1| < 0.01 \Rightarrow t^2 < 0.01 \Rightarrow -0.1 < t < 0.1 .$$

Question 3.8

Nous avons $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1$ car $H(x_n) = 1$ pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0 avec $x_n \geq 0$.

Nous avons $\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0$ car $H(x_n) = 0$ pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 0 avec $x_n < 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} H(x)$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ n'existe pas.

18.3.2 Fonctions continues

Question 3.9

a) Puisque $f(t) = \frac{1+t+t^2}{1+t}$ est une fonction continue à $t = 0$, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t+t^2}{1+t} = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = 1 .$$

b) Puisque $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ est une fonction continue à $x = 1$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{e^0}{1+0} = 1 .$$

c) Puisque $f(x) = \frac{(x-2)}{2+\sqrt{2x^2-4}}$ est une fonction continue à $x = 2$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{2+\sqrt{2x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{(2-2)}{2+\sqrt{2 \times 2^2-4}} = \frac{0}{4} = 0 .$$

d) Puisque $f(z) = \frac{3z}{1+\ln(1+z)}$ est une fonction continue à $z = 0$, nous avons

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z}{1+\ln(1+z)} = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = \frac{0}{1+0} = 0 .$$

e) Puisque $f(x) = \frac{\cos(\pi/x)}{x^2-5}$ est une fonction continue à $x = 3$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(\pi/x)}{x^2-5} = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = \frac{\cos(\pi/3)}{3^2-5} = \frac{1/2}{4} = \frac{1}{8} .$$

Question 3.10

a) La fonction $f(x) = \frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}}$ n'est pas définie à $x = 3$ car le dénominateur est nul à $x = 3$. La fonction n'est donc pas continue à $x = 3$. Le numérateur est aussi nul à $x = 3$ donc il y a une possibilité que la limite existe à $x = 3$. Nous éliminons la racine carrée au dénominateur en multipliant la fonction f par l'expression $\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}}$. Comme cette expression est égale à 1, nous ne changeons pas la valeur de $f(x)$ pour $x \neq 3$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}} &= \left(\frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}} \right) \left(\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}} \right) = \frac{(x-3)(2+\sqrt{x^2-5})}{4-(x^2-5)} \\ &= \frac{(x-3)(2+\sqrt{x^2-5})}{9-x^2} = \frac{(x-3)(2+\sqrt{x^2-5})}{(3-x)(3+x)} = -\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{3+x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{2-\sqrt{x^2-5}} = \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{3+x} = -\frac{2+\sqrt{3^2-5}}{3+3} = -\frac{2}{3}$$

où nous avons utilisé le fait que $h(x) = -\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{3+x}$ est une fonction continue à $x = 3$ pour calculer la dernière limite.

b) Pour déterminer si $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x^2-25}$ existe, nous devons considérer les cas $x < 5$ et $x > 5$.

Pour $x < 5$, $|x-5| = 5-x$ et nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x-5|}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{5-x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-1}{x+5} = -\frac{1}{10}.$$

Pour $x > 5$, $|x-5| = x-5$ et nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x-5|}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x-5|}{x^2-25} \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x-5|}{x^2-25}$, nous devons conclure que $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x^2-25}$ n'existe pas.

c) La fonction $f(x) = \frac{3-\sqrt{9-3x}}{8x}$ n'est pas définie à $x = 0$ car le dénominateur est nul à $x = 0$. La fonction n'est donc pas continue en $x = 0$. Puisque le numérateur est aussi nul à $x = 0$, il y a une possibilité que la limite existe à $x = 0$. Nous éliminons la racine carrée au numérateur en multipliant la fonction f par l'expression $\frac{3+\sqrt{9-3x}}{3+\sqrt{9-3x}}$. Comme cette expression est égale à 1, nous ne changeons pas la valeur de $f(x)$. Nous obtenons

$$\frac{3-\sqrt{9-3x}}{8x} = \left(\frac{3-\sqrt{9-3x}}{8x} \right) \left(\frac{3+\sqrt{9-3x}}{3+\sqrt{9-3x}} \right) = \frac{9-(9-3x)}{8x(3+\sqrt{9-3x})} = \frac{3}{8(3+\sqrt{9-3x})}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - 3x}}{8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{8(3 + \sqrt{9 - 3x})} = \frac{3}{8(3 + \sqrt{9})} = -\frac{1}{16}$$

où nous avons utilisé le fait que $h(x) = \frac{3}{8(3 + \sqrt{9 - 3x})}$ est une fonction continue à $x = 0$ pour calculer la dernière limite.

d) Il faut noter que pour x près de 1 (e.g. entre 0 et 2) nous avons $|x - 2| = 2 - x$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 2| - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - x) - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

où nous avons utilisé le fait que $h(x) = \frac{-1}{x + 1}$ est une fonction continue à $x = 1$ pour calculer la dernière limite.

e) Pour $x < -3$, nous avons que $|x + 3| = -(x + 3)$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{|x + 3|(5 + x)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-(x + 3)(5 + x)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} -(5 + x) = -(5 - 3) = -2.$$

Pour $x > -3$, nous avons que $|x + 3| = x + 3$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x + 3|(5 + x)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x + 3)(5 + x)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} (5 + x) = (5 - 3) = 2.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{|x + 3|(5 + x)}{x + 3} \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x + 3|(5 + x)}{x + 3}$, nous devons conclure que

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x + 3|(5 + x)}{x + 3}$ n'existe pas.

f) Puisque le numérateur et le dénominateur de $\frac{5x^4 + 3x^2 - 8}{12x^2 - 11x - 1}$ sont nuls lorsque $x = 1$, nous savons qu'ils ont au moins un facteur $x - 1$ en commun. Si nous divisons le numérateur et le dénominateur par $x - 1$, nous trouvons que $5x^4 + 3x^2 - 8 = (x - 1)(5x^3 + 5x^2 + 8x + 8)$ et $12x^2 - 11x - 1 = (x - 1)(12x + 1)$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 + 3x^2 - 8}{12x^2 - 11x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(5x^3 + 5x^2 + 8x + 8)}{(x - 1)(12x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 + 5x^2 + 8x + 8}{12x + 1} = 2$$

où nous avons utilisé le fait que $h(x) = \frac{5x^3 + 5x^2 + 8x + 8}{12x + 1}$ est une fonction continue à $x = 1$ pour calculer la dernière limite.

Question 3.11

Nous avons $V(t) = e^{\alpha t}$ car $V_0 = 1$ par hypothèses. Pour déterminer α , nous utilisons $V(1000) = 2.71828$. Nous avons

$$\begin{aligned} e^{1000\alpha} = 2.71828 &\Rightarrow \ln(e^{1000\alpha}) = \ln(2.71828) \Rightarrow 1000\alpha = \ln(2.71828) \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{\ln(2.71828)}{1000} = 9.999993273472820 \dots \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Donc, si nous supposons que les données du problème sont approximatives, nous pouvons dire que $\alpha = 10^{-3}$.

Pour répondre à la deuxième partie de la question, nous devons trouver t tel que

$$2.71828 - 0.1 = 2.61828 < V(t) < 2.81828 = 2.71828 + 0.1 .$$

Nous avons

$$\begin{aligned} 2.61828 < e^{0.001 t} < 2.81828 &\Rightarrow \ln(2.61828) < 0.001 t < \ln(2.81828) \\ &\Rightarrow 10^3 \ln(2.61828) < t < 10^3 \ln(2.81828) \\ &\Rightarrow 962.51761 \dots < t < 1036.126769 \dots \end{aligned}$$

Question 3.12

L'équation de la droite qui joint les points $(-0.1, -1)$ et $(0.1, 1)$ est $y = 10x$. Donc

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -0.1 \\ 10x & \text{si } -0.1 \leq x < 0.1 \\ 1 & \text{si } x \geq 0.1 \end{cases}$$

Question 3.13

Soit $W(V)$ l'impulsion électrique produite par le neurone après qu'il est reçu une impulsion électrique de V volts. On nous dit dans la question que

$$W(V) = \begin{cases} V_1 & \text{si } V < V_0 \\ 2V & \text{si } V > V_0 \end{cases}$$

De plus, on nous dit dans la question que W est continue. Donc W doit aussi être définie à $V = V_0$ et

$$W(V_0) = \lim_{V \rightarrow V_0^-} W(V) = \lim_{V \rightarrow V_0^+} W(V) .$$

Puisque

$$\lim_{V \rightarrow V_0^-} W(V) = V_1 \quad \text{et} \quad \lim_{V \rightarrow V_0^+} W(V) = 2V_0 ,$$

nous avons donc $W(V_0) = V_1 = 2V_0$. La fonction W est naturellement continue pour $V \neq V_0$. Finalement, la définition de W est

$$W(V) = \begin{cases} 2V_0 & \text{si } V < V_0 \\ 2V & \text{si } V \geq V_0 \end{cases}$$

Question 3.14

Comme f est défini par un polynôme pour $x > 3$ et un fonction sinusoidale pour $x < 3$,

nous avons que f est continue partout sauf possiblement à $x = 3$. Pour que f soit continue en $x = 3$, nous devons avoir

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) .$$

C'est-à-dire,

$$a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3^2}{2} - 4 \Rightarrow -a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} .$$

Question 3.15

Comme f est défini par des polynômes pour $x \neq 3$, nous avons que f est continue partout sauf possiblement à $x = 3$. Pour que f soit continue à $x = 3$, nous devons avoir

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) .$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax^2 + 4x) = 9a + 12$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 + ax = 9 + 3a$ et $f(3) = 9 + 3a$, nous devons donc avoir $9a + 12 = 9 + 3a$. Si nous résolvons, nous trouvons $a = -1/2$.

Question 3.16

Puisque f est définie par une fonction rationnelle sans division par 0 pour $x < 3$ et par des sommes de termes en x^α pour $x > 3$, nous avons que f est continue partout sauf possiblement en $x = 3$ et $x = 4$.

Pour que f soit continue en $x = 3$, nous devons avoir

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) .$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x + 1)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 1) = 4 ,$$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} ax^2 + x + b = 9a + 3 + b$ et $f(3) = 9a + 3 + b$, nous devons donc avoir $4 = 9a + 3 + b$. Ce qui donne l'équation $9a + b = 1$.

Pour que f soit continue en $x = 4$, nous devons avoir

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) .$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} ax^2 + x + b = 16a + 4 + b$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} b\sqrt{x} + \frac{5ax}{2} = 2b + 10a$ et $f(4) = 2b + 10a$, nous devons donc avoir $16a + 4 + b = 2b + 10a$. Ce qui donne l'équation $6a - b = -4$.

Il faut résoudre le système d'équations linéaires

$$9a + b = 1$$

$$6a - b = -4$$

pour trouver a et b . Si nous additionnons les deux équations, nous trouvons $15a = -3$. Donc $a = -1/5$. Si nous substituons cette valeur de a dans l'équation $6a - b = -4$, nous obtenons $-6/5 - b = -4$. Donc $b = 14/5$

Question 3.17

Posons $f(x) = e^x + x^2 - x - 2$. f est une fonction continue sur la droite réelle. De plus, $f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ et $f(1) = e - 2 \approx 0.7182818 > 0$. Grâce au Théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc c entre 0 et 1 tel que $f(c) = 0$; c'est-à-dire, $e^c + c^2 - 2 = c$.

Question 3.18

a) Posons $f(x) = \tan(x) + 4x - x^2 - e^x$. Nous avons que f est une fonction continue sur l'intervalle $[0, \pi/4]$ telle que $f(0) = -1 < 0$ et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - e^{\pi/4} \\ &= 1 + \pi - \pi^2/16 - e^{\pi/4} \approx 1.33146232777 \dots > 0. \end{aligned}$$

Grâce au Théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc c entre 0 et $\pi/4$ tel que $f(c) = 0$.

b) Posons $f(x) = e^{\cos(x/2)} - 2\sin(x/2)$. Nous avons que f est une fonction continue sur l'intervalle $[0, \pi]$ avec $f(0) = e - 0 = e > 0$ et $f(\pi) = e^{\cos(\pi/2)} - 2\sin(\pi/2) = e^0 - 2 = -1 < 0$. Grâce au Théorème des valeurs intermédiaire, il existe donc c entre 0 et π tel que $f(c) = 0$. C'est-à-dire, $e^{\cos(c/2)} = 2\sin(c/2)$.

Question 3.19

Si nous supposons que le prix de l'essence varie de façon continue en fonction du temps, alors nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs intermédiaires pour conclure que le prix a été de \$2.25 à un certain moment au cours de la semaine. Mais, est-ce vraiment réaliste de croire que le prix de l'essence a varié de façon continue ?

18.3.3 Limites à l'infini et limites infinies

Question 3.20

Pour une précision de 0.1%, nous avons que 0.1% de 440 est 0.44 et le coût du diapason sera de $\frac{5}{0.44} \approx 11.36$ dollars. Pour une précision de 0.01%, nous avons que 0.01% de 440 est 0.044 et le coût du diapason sera de $\frac{5}{0.044} \approx 113.64$ dollars.

Nous avons que $\lim_{x \rightarrow 440} \frac{5}{|x - 440|} = +\infty$. Le coût du diapason va devenir exorbitant si nous exigeons la perfection. En fait, nous n'atteindrons jamais la perfection.

Question 3.21

Nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{x}} > 10 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \frac{1}{10} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{100}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{x}} > 100 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \frac{1}{100} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{10^4}.$$

La croissance n'est pas rapide. Il faut que x soit très petit pour que $1/\sqrt{x}$ soit grand.

Question 3.22

Soit $h(t) = (1-t)^{-4}$. Comme la fonction h n'est pas définie en $t = 1$, elle n'est certainement pas continue. Nous devons donc utiliser les suites pour estimer la limite.

n	$t_n = 1 + 1/n^2$	$f(t_n)$
1.000000	2.000000	1
2.000000	1.250000	256
3.000000	1.111111	6561
4.000000	1.062500	65536
5.000000	1.040000	390625
6.000000	1.027778	1679616
7.000000	1.020408	5764801
8.000000	1.015625	16777216
9.000000	1.012346	43046721
10.000000	1.010000	10^8
\vdots	\vdots	\vdots
98.000000	1.000104	$\approx 8.50763 \times 10^{15}$
99.000000	1.000102	$\approx 9.22744 \times 10^{15}$
100.000000	1.000100	$\approx 10^{16}$
	\downarrow	\downarrow
	1	$+\infty$

Pour toute autre suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers 1, nous avons toujours $(1-t_n)^{-4} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} (1-t)^{-4} = +\infty$.

Nous aurions pu raisonner à partir de la définition de la fonction h . Soit $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite qui tend vers 0. C'est le cas pour $t_n = 1/n^2$ que nous avons utilisé dans le tableau ci-dessus. Si nous substituons $t = 1+t_n$ dans $h(t)$, nous obtenons $h(1+t_n) = t_n^{-4} = \frac{1}{t_n^4}$. Puisque $t_n^4 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, nous avons que $1/t_n^4 \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Plus $t_n^4 > 0$ est petit, plus $1/t_n^4$ est grand.

Question 3.23

Posons $f(y) = y^2 \ln(y-1)$. Avant de répondre à la question, notons que $f(y)$ n'est pas défini pour $y < 1$. Il est donc impossible de considérer $\lim_{y \rightarrow 1^-} f(y)$ et $\lim_{y \rightarrow 1} f(y)$.

Si nous choisissons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où $x_n = 1 + 1/n$, nous obtenons une suite de termes

plus grand que 1 qui tend vers 1. Nous avons les résultats suivants.

n	$x_n = 1/n$	$f(x_n)$
1	2	0
2	3/2	-1.55958...
\vdots	\vdots	\vdots
10,000	1.0001	-9.212182...
\vdots	\vdots	\vdots
10^9	$1 + 10^{-9}$	-20.723265...
\vdots	\vdots	\vdots
10^{15}	$1 + 10^{-15}$	-34.4342154...
\downarrow	\downarrow	\downarrow
∞	1	?

Il semble que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$ car $f(x_n)$ semble décroître sans borne inférieure lorsque n augmente. Malheureusement, ce n'est pas convaincant. $f(1 + 10^{-15}) = -34.4342154 \dots$ n'est pas une très petite valeur négative même si $1 + 10^{-15}$ est très près de 1. Peut-être que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -35$.

C'est ici qu'il est important d'utiliser notre connaissance de la fonction \ln et de mettre notre calculatrice de côté. Nous savons que $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x > 0$ tend vers 0 (pensez au graphe de \ln). Donc $\ln(y - 1)$ tend vers $-\infty$ lorsque $y > 1$ tend vers 1. Puisque y^2 tend vers 1 lorsque y tend vers 1, alors $y^2 \ln(y - 1)$ tend vers $-\infty$ lorsque $y > 1$ tend vers 1. C'est-à-dire,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y^2 \ln(y - 1) = -\infty .$$

Le fait que f ne soit pas défini en $y = 1$ n'empêche pas l'existence de la limite $\lim_{y \rightarrow 1^+} f(y)$ car la limite d'une fonction à un point est indépendante du comportement de la fonction à ce point.

Question 3.24

a) Si nous divisons le numérateur et dénominateur par x^2 , nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 4}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + (5/x) - (4/x^2)}{3 + (1/x^2)} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (5/x) - \lim_{x \rightarrow \infty} (4/x^2)}{3 + \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2)} = \frac{1}{3}$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$ pour $r > 0$.

b) Si nous factorisons x^3 à l'extérieur de la racine cubique, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - (8x^3 + 3)^{1/3}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x(8 + (3/x^3))^{1/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - (8 + (3/x^3))^{1/3} \right) \\ &= \left(1 - \left(8 + \lim_{x \rightarrow \infty} (3/x^3) \right)^{1/3} \right) = 1 - 8^{1/3} = -1 . \end{aligned}$$

c) Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

d) Puisque

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 7x} &= (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 7x}) \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 7x}}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 7x}} \right) \\ &= \frac{(x^2 + 3x) - (x^2 + 7x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 7x}} = \frac{-4x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 7x}} \\ &= \frac{-4x}{x\sqrt{1 + (3/x)} + x\sqrt{1 + (7/x)}} = \frac{-4}{\sqrt{1 + (3/x)} + \sqrt{1 + (7/x)}} , \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 7x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{1 + (3/x)} + \sqrt{1 + (7/x)}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (3/x)} + \sqrt{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} (7/x)}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -2 . \end{aligned}$$

e) Puisque

$$\frac{2e^{2x} - e^{-3x}}{3e^{2x} - 4e^{-5x}} = \frac{e^{2x}(2 - e^{-5x})}{e^{2x}(3 - 4e^{-7x})} = \frac{2 - e^{-5x}}{3 - 4e^{-7x}} ,$$

Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x} - e^{-3x}}{3e^{2x} - 4e^{-5x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - e^{-5x}}{3 - 4e^{-7x}} = \frac{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-5x}}{3 - 4 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-7x}} = \frac{2}{3}$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{rx} = 0$ pour $r < 0$.

Question 3.25

Puisque

$$0 \leq \left| \frac{\sin^2(x)}{1 + x^2} \right| \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$, nous avons grâce au Théorème des gendarmes, théorème 3.1.11, que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin^2(x)}{1 + x^2} \right| = 0. \text{ Il s'en suit que } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(x)}{1 + x^2} = 0.$$

18.4 Dérivée

18.4.1 Taux de variation

Question 4.1

a)

$$\text{i) } \frac{f(1+1) - f(1)}{1} = \frac{2 \times 2^2 - 2}{1} = 6, \quad \frac{f(1+0.5) - f(1)}{0.5} = \frac{2 \times (1.5)^2 - 2}{0.5} = 5,$$

$$\frac{f(1+0.1) - f(1)}{0.1} = \frac{2 \times (1.1)^2 - 2}{0.1} = 4.2 \text{ et}$$

$$\frac{f(1+0.01) - f(1)}{0.01} = \frac{2 \times (1.01)^2 - 2}{0.01} = 4.02 \text{ respectivement.}$$

ii) $y - 2 = 6(t - 1)$, $y - 2 = 5(t - 1)$, $y - 2 = 4.2(t - 1)$ et $y - 2 = 4.02(t - 1)$ respectivement.

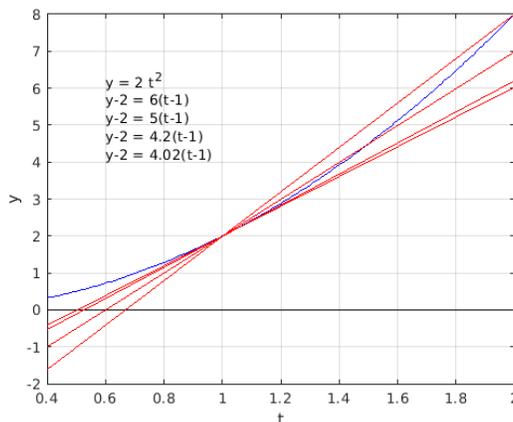
iii) Voir la figure ci-dessous.

iv) La pente de la tangente est la limite des pentes

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

des sécantes qui passent par les points $(t_0, f(t_0)) = (1, 2)$ et $(t_0 + \Delta t, f(t_0 + \Delta t)) = (1 + \Delta t, f(1 + \Delta t))$ lorsque Δt tend vers 0. Ainsi, nous pouvons conclure à partir des calculs faits en (i) que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(1, 2)$ est possiblement 4.

v) $y - 2 = 4(t - 1)$



b)

$$\text{i) } \frac{f(0+1) - f(0)}{1} = \frac{e^{2(1)} - 1}{1} \approx 6.3891, \quad \frac{f(0+0.5) - f(0)}{0.5} = \frac{e^{2(0.5)} - 1}{0.5} \approx 3.4366,$$

$$\frac{f(0+0.1) - f(0)}{0.1} = \frac{e^{2(0.1)} - 1}{0.1} \approx 2.2140 \text{ et}$$

$$\frac{f(0+0.01) - f(0)}{0.01} = \frac{e^{2(0.01)} - 1}{0.01} \approx 2.0201 \text{ respectivement.}$$

ii) $y - 1 \approx 6.3891(t - 0) = 6.3891t$, $y - 1 \approx 3.4366t$, $y - 1 \approx 2.2140t$ et $y - 1 \approx 2.0201t$ respectivement.

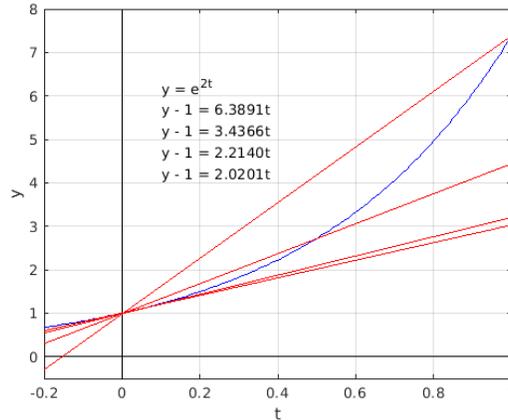
iii) Voir la figure ci-dessous.

iv) La pente de la tangente est la limite des pentes

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t}$$

des sécantes qui passent par les points $(t_0, f(t_0)) = (0, 1)$ et $(t_0 + \Delta t, f(t_0 + \Delta t)) = (\Delta t, f(\Delta t))$ lorsque Δt tend vers 0. Ainsi, nous pouvons conclure à partir des calculs faits en (i) que la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(0, 1)$ est possiblement 2.

v) $y - 1 = 2t$



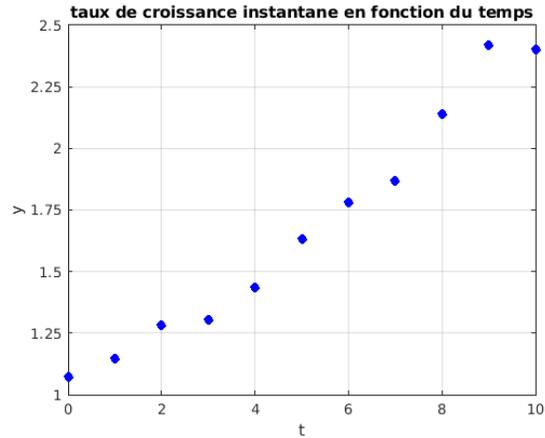
Question 4.2

- a) $\frac{p(1) - p(0)}{1} = \frac{1.5^1 - 1}{1} = 0.5$
- b) $\frac{p(0.1) - p(0)}{0.1} = \frac{1.5^{0.1} - 1}{0.1} \approx 0.4138$
- c) $\frac{p(0.01) - p(0)}{0.01} = \frac{1.5^{0.01} - 1}{0.01} \approx 0.4063$
- d) $\frac{p(0.001) - p(0)}{0.001} = \frac{1.5^{0.001} - 1}{0.001} \approx 0.4055$
- e) $\ln(1.5) \approx 0.40546510$
- f) $y - 1 \approx 0.40546510 t$

Question 4.3

- a) À $t = 0$, $H'(0) \approx \frac{H(1) - H(0)}{1 - 0} = 1.07$. À $t = 1$, puisque que $\frac{H(0) - H(1)}{0 - 1} = 1.07$ et $\frac{H(2) - H(1)}{2 - 1} = 1.22$, nous estimons $H'(1)$ par la moyenne $H'(1) \approx \frac{1.22 + 1.07}{2} = 1.145$. À $t = 2$, puisque que $\frac{H(1) - H(2)}{1 - 2} = 1.22$ et $\frac{H(3) - H(2)}{3 - 2} = 1.34$, nous estimons $H'(2)$ par la moyenne $H'(2) \approx \frac{1.22 + 1.34}{2} = 1.28$. Nous procédons de la même façon pour trouver $H'(3) \approx 1.305$, $H'(4) \approx 1.435$, $H'(5) \approx 1.63$, $H'(6) \approx 1.78$, $H'(7) \approx 1.87$, $H'(8) \approx 2.14$ et $H'(9) \approx 2.42$. Finalement, $H'(10) \approx \frac{H(10) - H(9)}{10 - 9} = 2.4$.

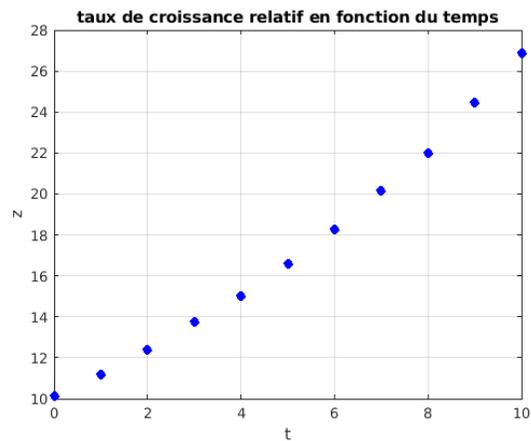
b)



c)

t	0	1	2	3	4	5
$H'(t)/H(t) \approx$	0.105835	0.102415	0.103225	0.094978	0.095602	0.098133
	6	7	8	9	10	
	0.097427	0.092711	0.097228	0.098977	0.089385	

d)



f) Le taux de croissance relatif n'est pas constant mais augmente. Alors qu'il ne semble pas y avoir de relation entre les différents taux de croissance instantanés que nous avons calculés, nous pouvons facilement imaginer en regardant le graphe des taux de croissance relatifs en fonction du temps qu'ils semblent tracer une courbe convexe.

Question 4.4

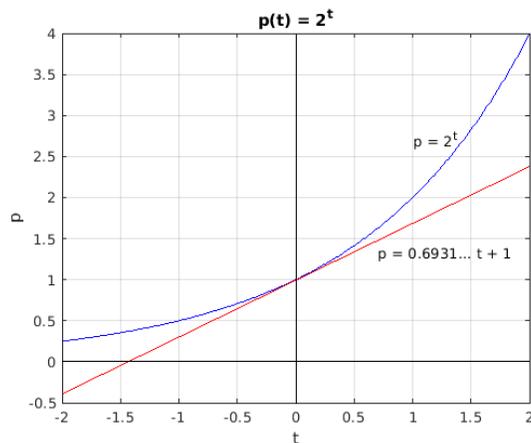
a	b	Taux de croissance moyen entre a et b heures (individus/heure)
0	1	$\frac{2^1 - 2^0}{1 - 0} = 1$
0	0.1	$\frac{2^{0.1} - 2^0}{0.1 - 0} = 0.7177 \dots$
0	0.01	$\frac{2^{0.01} - 2^0}{0.01 - 0} = 0.6956 \dots$
0	0.001	$\frac{2^{0.001} - 2^0}{0.001 - 0} = 0.6956 \dots$
\vdots	\vdots	\vdots
0	10^{-5}	$\frac{2^{10^{-5}} - 2^0}{10^{-5} - 0} = 0.6931 \dots$
0	10^{-6}	$\frac{2^{10^{-6}} - 2^0}{10^{-6} - 0} = 0.6931 \dots$
\vdots	\vdots	\vdots
	\downarrow	\downarrow
	0	0.6931 ...

Nous en déduisons que

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{2^b - 2^0}{b - 0} \approx 0.6931 \dots$$

C'est le taux de variation instantané de 2^t à $t = 0$.

Nous retrouvons dans la figure ci-dessous les graphes de p et de la droite tangente au graphe de p au point $(0, 1)$.



La pente m de la droite tangente est le taux de variation instantané de 2^t à $t = 0$; c'est-à-dire, $m \approx 0.6931$. L'équation de cette droite tangente dans la forme point-pente est

$$(p - 1) = m(t - 0) \Rightarrow p = 0.6931t + 1 .$$

Question 4.5

a)

a	b	Taux de croissance moyen de la a^e à la b^e heure (visites/heure)
2	3	$\frac{87 - 57}{3 - 2} = 30$
3	4	$\frac{151 - 87}{4 - 3} = 64$
3	5	$\frac{246 - 87}{5 - 3} = \frac{159}{2} = 79.5$

b) Nous pouvons estimer le taux de croissance instantané après trois heures en calculant la moyenne du taux de croissance moyen de la 2^e à la 3^e heure et du taux de croissance moyen de la 3^e à la 4^e heure. Nous obtenons $(30 + 64)/2 = 47$ visites/heure. Nous utilisons les taux de croissance moyens calculés sur les plus petits intervalles de temps possibles.

c) Ce n'est pas réaliste de demander d'estimer le taux de croissance instantané après trois heures sur la base des données que nous possédons. Il faudrait calculer le nombre de visites sur des intervalles de temps beaucoup plus petits qu'une heure.

18.4.2 Dérivée d'une fonction

Question 4.6

a) La fonction f n'est pas continue en $x = 4$.

b) La fonction f n'est pas différentiable en $x = 4$ car elle n'est pas continue à ce point. De plus, la fonction f n'est pas différentiable en $x = 5.5$ car

$$\lim_{x \rightarrow 5.5^-} \frac{f(x) - f(5.5)}{x - 5.5} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 5.5^+} \frac{f(x) - f(5.5)}{x - 5.5} = -2 \neq 2$$

impliquent que

$$\lim_{x \rightarrow 5.5} \frac{f(x) - f(5.5)}{x - 5.5}$$

n'existe pas. Le graphe de la fonction a un « coin » au point $(5.5, f(5.5))$. Finalement, La fonction f n'est pas différentiable en $x = 6.5$ car

$$\lim_{x \rightarrow 6.5} \frac{f(x) - f(6.5)}{x - 6.5} = -\infty .$$

La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(6.5, f(6.5))$ est verticale.

c) La dérivée de la fonction est nulle aux points où la tangente à la courbe est horizontale. Nous trouvons donc $x = 0.5, 2$ et 3.5 .

Question 4.7

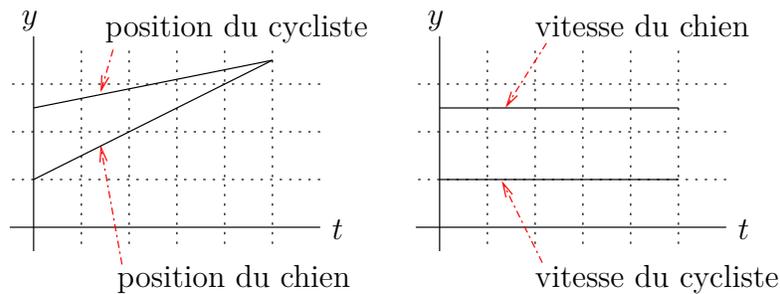
La valeur de la dérivée de f en un point est donné par la pente de la droite tangente à la courbe en ce point.

a) La dérivée est positive sur les intervalles $]0.5, 2[$, $]3, 4[$ et $]5.5, 7[$.

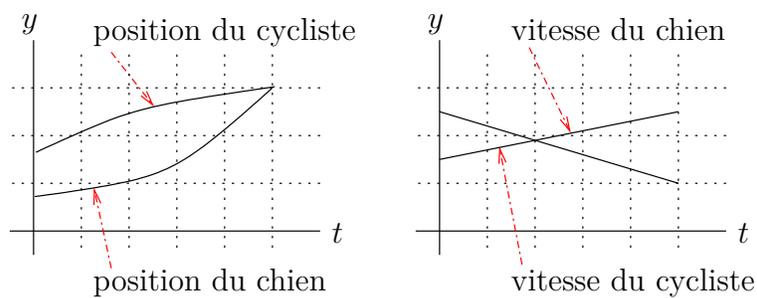
- b) La dérivée est négative sur les intervalles $]0, 0.5[$, $]1, 3[$ et $]4, 5.5[$.
 c) La dérivée est nulle aux points $x = 0.5, 2, 3$ et 5.5 .

Question 4.8

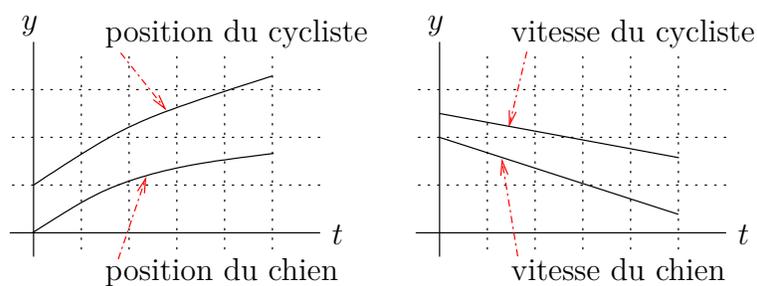
a)



b)

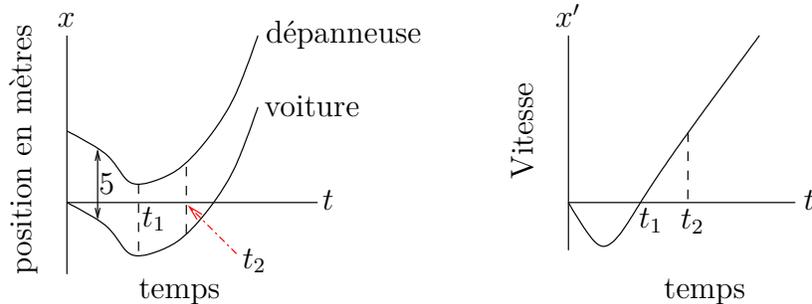


c)

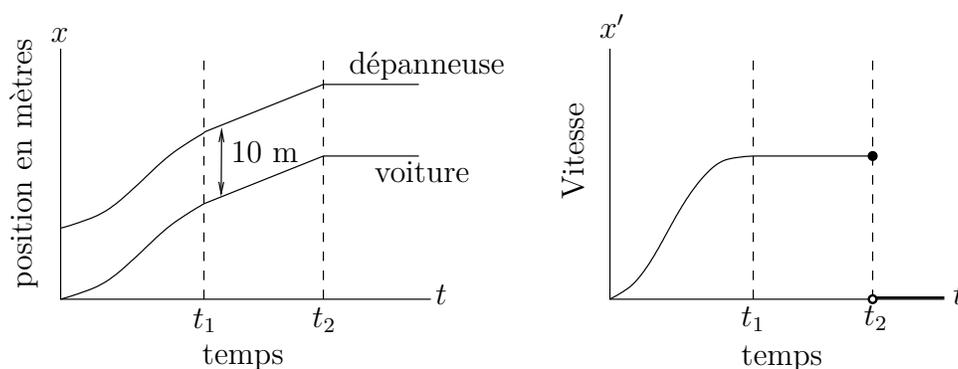


Question 4.9

- a) La figure ci-dessous contient des graphes possibles pour la position et la vitesse de la voiture et de la dépanneuse en fonction du temps répondant aux conditions de la question. La voiture et la dépanneuse ont la même vitesse en tout temps.



b) La voiture et de la dépanneuse ont la même vitesse. Pour $0 \leq t < t_1$, la voiture et la dépanneuse accélèrent. Pour $t_1 \leq t \leq t_2$, ils gardent une vitesse constante. Finalement, pour $t > t_2$, ils sont au repos. Disons que le freinage a été plutôt brusque.



Question 4.10

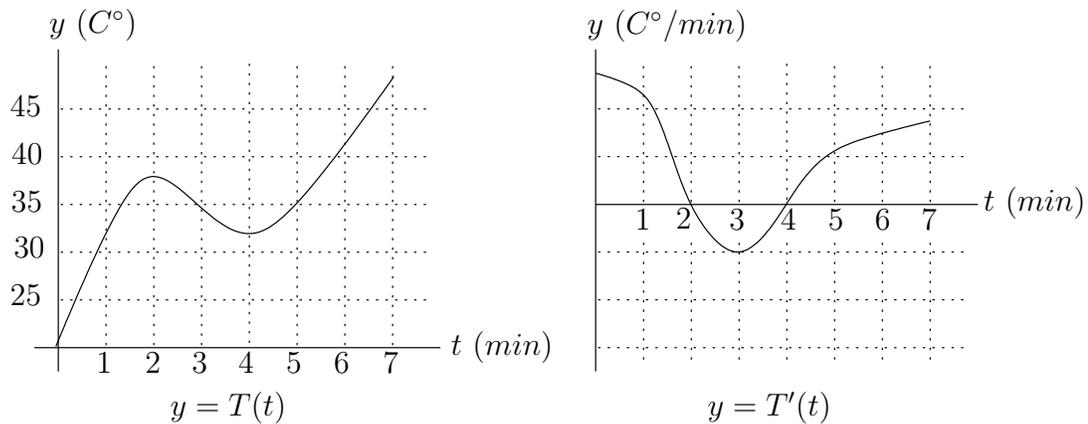
La fonction g ne peut pas être la dérivée de f car, entre 0 et 3.7, f est une fonction strictement décroissante. Donc g devrait être négatif entre 0 et 3.7.

Nous avons que f est la dérivée de g . Nous avons que f est positif quand g est strictement croissante, f est négatif quand g est strictement décroissante, et f est zéro aux points où g à un extremum.

Question 4.11

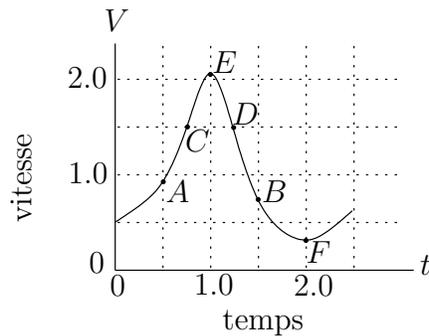
Nous avons que f est la dérivée de g . Nous avons que f est positif quand g est strictement croissante, f est négatif quand g est strictement décroissante, et f est zéro aux points où g à un extremum.

Question 4.13



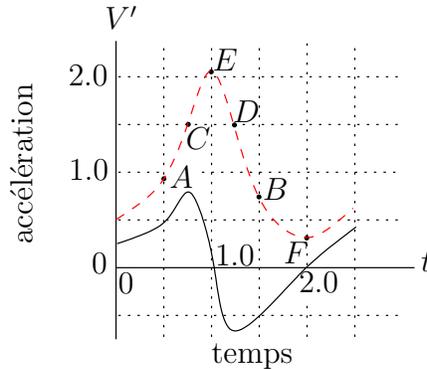
La température augmente lorsque $T'(t) > 0$ et diminue lorsque $T'(t) < 0$.

Question 4.14



Les réponses ci-dessous font références au graphe ci-dessus.

- Il suffit de choisir une valeur de t pour laquelle la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ est positive. Nous avons choisie $t = A = 0.5$.
- Il suffit de choisir une valeur de t pour laquelle la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ est négative. Nous avons choisie $t = B = 1.25$.
- La valeur de t pour laquelle la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ semble maximale est $t = C = 0.75$.
- La valeur de t pour laquelle la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ semble minimale est $t = D = 1.25$.
- Finalement, les valeurs de t pour lesquelles la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ au point $(t, V(t))$ est nulle sont $t = E = 1$ et $t = F = 2$.
- Le graphe de la dérivée V' de V est donné ci-dessous.



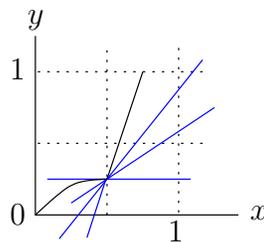
Ce graphe de la dérivée V' de la fonction V est naturellement une approximation du graphe de V' car il faudrait calculer la pente de la droite tangente à la courbe $y = V(t)$ à tous les points $(t, V(t))$ pour pouvoir tracer exactement le graphe de V' .

Question 4.15

a) La fonction f n'est pas continue au point $x = 1$ car

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \approx \frac{11}{6} \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

b) La fonction f n'est pas différentiable aux points $x = 0.5$ et $x = 1$. Puisque nous venons de montrer que la fonction f n'est pas continue au point $x = 1$, elle n'est donc pas différentiable à ce point. Que la dérivée de f n'existe pas au point $x = 0.5$ est justifié par la figure suivante.



La fonction f est continue au point $x = 0.5$ mais ne possède pas de droite tangente au point $(0.5, f(0.5))$. Nous pouvons voir que

$$\lim_{x \rightarrow 0.5^-} \frac{f(x) - f(0.5)}{x - 0.5} = 0 \neq \frac{19}{6} \approx \lim_{x \rightarrow 0.5^+} \frac{f(x) - f(0.5)}{x - 0.5}$$

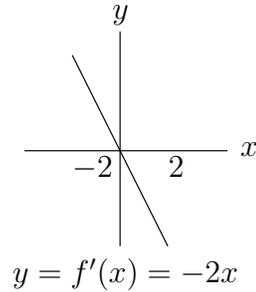
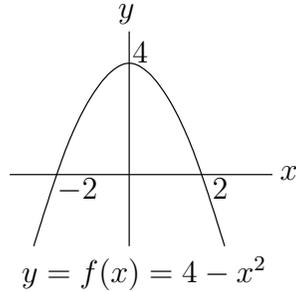
La limite à gauche est 0 alors que celle à droite est beaucoup plus grande. La fonction f n'est donc pas différentiable au point $x = 0.5$.

c) La dérivée de f est nulle aux points x tels que la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$ est horizontale (i.e. de pente nulle). Ainsi, la fonction f possède une dérivée nulle au point $x = 1.5$ seulement.

Question 4.16

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 - (x+h)^2) - (4 - x^2)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-x^2 - 2xh - h^2 + 4) - (4 - x^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h) = -2x .
 \end{aligned}$$



Le seul point x pour lequel $f'(x) = 0$ est $x = 0$ car $f'(x) = -2x$. Puisque $f'(x) = -2x > 0$ pour $x < 0$, la fonction f est strictement croissante pour $x < 0$. Puisque $f'(x) = -2x < 0$ pour $x > 0$, la fonction f est strictement décroissante pour $x > 0$.

Question 4.17

la pente de la sécante à la courbe $y = g(x)$ entre les points x et $x + h$ est

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{(x+h) + 2(x+h)^2 - x - 2x^2}{h} = \frac{h + 4hx + 2h^2}{h} = 1 + 4x + 2h .$$

La pente de la tangente à la courbe $y = g(x)$ au point x est

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + 4x + 2h) = 1 + 4x + \lim_{h \rightarrow 0} 2h = 1 + 4x .$$

Question 4.18

a) Puisque

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h+1)^2 - (x+1)^2}{h} \\
 &= \frac{(x^2 + 2xh + 2x + h^2 + 2h + 1) - (x^2 + 2x + 1)}{h} \\
 &= \frac{2xh + 2h + h^2}{h} = 2x + 2 + h ,
 \end{aligned}$$

nous avons que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + 2 + h) = 2x + 2 .$$

b)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/(2(x+h)+5) - 1/(2x+5)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x+5) - (2(x+h)+5)}{h(2x+5)(2x+5+2h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(2x+5)(2x+5+2h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(2x+5)(2x+5+2h)} = \frac{-2}{(2x+5)^2}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^2 + (x+h)) - (x^2 + x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1) = 2x + 1.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/((x+h)(x+1+h)) - 1/(x(x+1))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(x+1) - (x+h)(x+1+h)}{hx(x+1)(x+h)(x+1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h - h^2}{hx(x+1)(x+h)(x+1+h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x - 1 - h}{x(x+1)(x+h)(x+1+h)} = \frac{-2x - 1}{x^2(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Question 4.19

Il est évident qu'il n'existe pas de valeur c telle que $H(c) = 0.5$ car 0.5 n'est pas dans l'image de H .

La pente de la sécante entre les points $(-1, H(-1))$ et $(1, H(1))$ est $\frac{H(1) - H(-1)}{2} = \frac{1}{2}$. Puisque $H'(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ et $H'(x)$ n'est pas défini à $x = 0$, il est alors clair que nous ne pouvons pas trouver une valeur c telle que $H'(c) = 1/2$.

Le problème avec la fonction de Heaviside est qu'elle n'est pas continue à l'origine.

18.4.3 Calcul des dérivées**Question 4.21**

Puisque $g'(y) = -3 < 0$ pour tout y , la fonction est strictement décroissante sur \mathbb{R} . Ce n'est pas surprenant car $z = g(y) = -3y + 5$ est l'équation d'une droite de pente -3 . L'intervalle où la fonction est strictement croissante est l'intervalle vide.

Question 4.22

a) $T(t) = p(t)M(t) = (2 \times 10^6 + 10^3 t^2)(80 - 0.5t)$.

b)

$$\begin{aligned}
T'(t) &= \left(\frac{d}{dt}(2 \times 10^6 + 10^3 t^2) \right) (80 - 0.5t) + (2 \times 10^6 + 10^3 t^2) \left(\frac{d}{dt}(80 - 0.5t) \right) \\
&= 2 \times 10^3 t(80 - 0.5t) - 0.5(2 \times 10^6 + 10^3 t^2)
\end{aligned}$$

$$= -1.5 \times 10^3 t^2 + 1.6 \times 10^5 t - 10^6 .$$

c) Nous avons que

$$T'(t) = -1.5 \times 10^3 t^2 + 1.6 \times 10^5 t - 10^6 = -1.5 \times 10^3 (t^2 - 106.\bar{6}t + 666.\bar{6}) = 0$$

pour

$$t = t_1 = \frac{106.\bar{6} - \sqrt{106.\bar{6}^2 - 4 \times 666.\bar{6}}}{2} = 6.\bar{6}$$

et

$$t = t_2 = \frac{106.\bar{6} + \sqrt{106.\bar{6}^2 - 4 \times 666.\bar{6}}}{2} = 100$$

À $t = t_1$, $T(t_1) = 153674074.\bar{074}$, $M(t_1) = 76.\bar{6}$ et $p(t_1) = 2004444.\bar{4} \approx 2004445$. À $t = t_2$, $T(t_2) = 3.6 \times 10^8$, $M(t_2) = 30$ et $p(t_2) = 1.2 \times 10^7$.

Question 4.23

Si $v(t)$ est la vitesse du train au temps t et $u(t)$ est la vitesse du passager par rapport au train au temps t , alors $w(t) = v(t) + u(t)$ est la vitesse du passager par rapport au sol au temps t . Nous avons $v(t) = 110$ km/h et $u(t) = -3$ km/h au temps t . Alors la vitesse du passager est $w(t) = 110 - 3 = 107$ km/h au temps t . Notez que $u(t) < 0$ car le passager se déplace dans la direction opposée au mouvement du train.

Question 4.24

c) Nous avons $H(G) = P(M(G))$ où $M(G) = 5G + 2$ et $P(M) = 0.5M$. Puisque $M'(G) = 5$ et $P'(M) = 0.5$, nous obtenons

$$\frac{dH}{dG} = P'(M(G))M'(G) = 0.5 \times 5 = 2.5 .$$

d) Nous avons $H(I) = F(V(I))$ où $F(V) = 37 + 0.4V$ et $V(I) = 5I^2$. Puisque $F'(V) = 0.4$ et $V'(I) = 10I$, nous obtenons

$$\frac{dH}{dI} = F'(V(I))V'(I) = 0.4 \times 10I = 4I .$$

Question 4.25

Nous avons comme information que $L'(t)$ est constant et donc égale au taux de variation moyen $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{5}{10} = 0.5$.

Utilisons

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{dB}{dW}(W(L(t))) \frac{dW}{dL}(L(t)) \frac{dL}{dt}(t) \\ &= \left(\frac{2}{3} \times 0.007 W^{-1/3}\right) \left(2.53 \times 0.12 L^{1.53}\right) (0.5) \end{aligned}$$

pour calculer $\frac{dH}{dt}$ lorsque $L = 18$. Puisque $W = 0.007(18)^{2/3} = 0.04807799619\dots$ lorsque $L = 18$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \left(\frac{2}{3} \times 0.007(0.04807799619\dots)^{-1/3}\right) (2.53 \times 0.12 \times 18^{1.53}) \quad (0.5) \\ &= 0.1622544808\end{aligned}$$

lorsque $L = 18$.

Question 4.26

a) $f'(x) = \frac{1}{5}x^{1/5-1} = \frac{1}{5}x^{-4/5}$

b) $h'(t) = \frac{1}{e}x^{1/e-1} = \frac{1}{e}x^{(1-e)/e}$

c) $g'(z) = 3(3z^{3-1}) + 2(2z^{2-1}) = 9z^2 + 4z$

e) Nous avons la fonction composée $f(x) = f_1(f_2(x))$ où $f_2(x) = 2x + 1$ et $f_1(y) = y^3$. Puisque $f_1'(y) = 3y^2$ et $f_2'(x) = 2$, nous obtenons

$$f'(x) = f_1'(f_2(x)) f_2'(x) = 3(2x + 1)^2 (2) = 6(2x + 1)^2 .$$

f) $h'(x) = 135x(x^2 - 5)^{133/2}$

g) Si nous dérivons l'expression

$$\ln |G(x)| = \ln \left(\frac{|1+x||2+x|}{|3+x|} \right) = \ln |1+x| + \ln |2+x| - \ln |3+x| ,$$

nous obtenons

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} .$$

Donc

$$G'(x) = \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} \right) G(x) = \frac{2+x}{3+x} + \frac{1+x}{3+x} - \frac{(1+x)(2+x)}{(3+x)^2} .$$

h) $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$

i) $f'(x) = \frac{3}{(3x-1)\ln(2)}$

j) Si nous complétons la factorisation, nous avons $f(y) = (5y-3)^7(y-1)(y+1)$. Donc

$$\ln |f(y)| = \ln (|5y-3|^7 |y-1| |y+1|) = 7 \ln |5y-3| + \ln |y-1| + \ln |y+1| .$$

Si nous dérivons des deux côtés de cette équation, nous obtenons

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{35}{5y-3} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1} .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(\frac{35}{5y-3} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1} \right) f(y) \\ &= 35(5y-3)^6(y^2-1) + (5y-3)^7(y+1) + (5y-3)^7(y-1) \\ &= (5y-3)^6 \left(35(y^2-1) + 2y(5y-3) \right) = (5y-3)^6(45y^2 - 6y - 35) . \end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\left(\frac{d}{dt}(1+t) \right) (2-t) - (1+t) \left(\frac{d}{dt}(2-t) \right)}{(2-t)^2} \\ &= \frac{(2-t) + (1+t)}{(2-t)^2} = \frac{3}{(2-t)^2} \end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{\left(\frac{d}{dz}(1+z^2) \right) (1+2z^3) - (1+z^2) \left(\frac{d}{dz}(1+2z^3) \right)}{(1+2z^3)^2} \\ &= \frac{2z(1+2z^3) - 6z^2(1+z^2)}{(1+2z^3)^2} = \frac{-2z^4 - 6z^2 + 2z}{(1+2z^3)^2} \end{aligned}$$

m) Nous avons $f(x) = g(x)/h(x)$, où $g(x) = \ln(2x+e^x)$ et $h(x) = 2x+e^x$. Nous allons utiliser la règle pour la dérivée d'un quotient. Notons que $g(x)$ est une composition de fonctions et que

$$g'(x) = \left(\frac{d}{dy} \ln(y) \Big|_{y=2x+e^x} \right) \frac{d}{dx}(2x+e^x) = \frac{1}{y} \Big|_{y=2x+e^x} (2+e^x) = \frac{2+e^x}{2x+e^x} .$$

Nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)} = \frac{\left((2+e^x)/(2x+e^x) \right) (2x+e^x) - (2+e^x) \ln(2x+e^x)}{(2x+e^x)^2} \\ &= \frac{(2+e^x) - (2+e^x) \ln(2x+e^x)}{(2x+e^x)^2} = (2+e^x) \left(\frac{1 - \ln(2x+e^x)}{(2x+e^x)^2} \right) . \end{aligned}$$

n) Si nous dérivons des deux côtés de l'équation

$$\ln |h(x)| = \ln \left(\frac{|1+3x|^2}{|1+2x|^3} \right) = 2 \ln |1+3x| - 3 \ln |1+2x| ,$$

nous obtenons

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{6}{1+3x} - \frac{6}{1+2x} .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{6}{1+3x} - \frac{6}{1+2x} \right) h(x) = \left(\frac{6}{1+3x} - \frac{6}{1+2x} \right) \left(\frac{(1+3x)^2}{(1+2x)^3} \right) \\ &= 6((1+2x) - (1+3x)) \left(\frac{(1+3x)}{(1+2x)^4} \right) = \frac{-6x(1+3x)}{(1+2x)^4}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé $\ln|1+3x| = g_2(g_1(x))$ où $g_1(x) = 1+3x$ et $g_2(z) = \ln|z|$ pour obtenir

$$\frac{d}{dx} \ln|1+3x| = g_2'(g_1(x))g_1'(x) = \left(\frac{1}{z} \Big|_{z=1+3x} \right) \times 3 = \frac{3}{1+3x}.$$

La dérivée de $\ln|1+2x|$ est calculée de façon semblable.

o) Nous avons $f(x) = e^{-7x} = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = e^y$ et $f_2(x) = -7x$. Puisque $f_1'(y) = e^y$ et $f_2'(x) = -7$, nous obtenons

$$f'(x) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) = e^{-7x}(-7) = -7e^{-7x}.$$

p) Puisque

$$g(z) = \left(1 + \frac{2}{1+z} \right)^7 = \left(\frac{3+z}{1+z} \right)^7 = (3+z)^7(1+z)^{-7},$$

nous avons

$$\ln|g(z)| = \ln\left(|3+z|^7|1+z|^{-7}\right) = 7\ln|3+z| - 7\ln|1+z|.$$

Si nous dérivons des deux côtés de cette équation, nous obtenons

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{7}{3+z} - \frac{7}{1+z}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(z) &= \left(\frac{7}{3+z} - \frac{7}{1+z} \right) g(z) = \left(\frac{7}{3+z} - \frac{7}{1+z} \right) \left(\frac{(3+z)^7}{(1+z)^7} \right) \\ &= 7((1+z) - (3+z)) \left(\frac{(3+z)^6}{(1+z)^8} \right) = \frac{-14(3+z)^6}{(1+z)^8}. \end{aligned}$$

q) Puisque $f(t) = f_1(f_2(t))$ où $f_1(y) = y^{33}$ et $f_2(t) = 1+3t$, nous obtenons

$$f'(t) = f_1'(f_2(t))f_2'(t) = 33(1+3t)^{32}(3) = 99(1+3t)^{32}.$$

r) Nous avons $h(x) = \ln|\ln(x)| = h_1(h_2(x))$ où $h_1(y) = \ln|y|$ et $h_2(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$. Puisque $h_1'(y) = y^{-1}$ et $h_2'(x) = x^{-1}$, nous obtenons

$$h'(x) = h_1'(h_2(x))h_2'(x) = \frac{1}{y} \Big|_{y=\ln(x)} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{\ln(x)} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

pour $0 < x < 1$ et $x > 1$.

s) Puisque

$$g(t) = \ln\left(\frac{t^2}{(t-2)^3}\right) = 2 \ln(t) - 3 \ln(t-2),$$

nous avons

$$g'(t) = \frac{2}{t} - \frac{3}{t-2}.$$

t) Puisque

$$f(x) = x^{\ln(x)} = e^{\ln(x^{\ln(x)})} = e^{(\ln(x))^2},$$

nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} e^{(\ln(x))^2} = \left(\frac{d}{dy} e^y \Big|_{y=(\ln(x))^2} \right) \left(\frac{d}{dx} (\ln(x))^2 \right) \\ &= e^{(\ln(x))^2} \frac{d}{dx} (\ln(x))^2 = 2 e^{(\ln(x))^2} \ln(x) \frac{d}{dx} \ln(x) \\ &= 2 e^{(\ln(x))^2} \ln(x) \left(\frac{1}{x} \right) = 2 x^{\ln(x)} \ln(x) \left(\frac{1}{x} \right) = 2 x^{\ln(x)-1} \ln(x). \end{aligned}$$

u) Puisque

$$g(x) = x^{x^2} = e^{\ln(x^{x^2})} = e^{x^2 \ln(x)},$$

nous avons

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} e^{x^2 \ln(x)} = \left(\frac{d}{dy} e^y \Big|_{y=x^2 \ln(x)} \right) \left(\frac{d}{dx} x^2 \ln(x) \right) \\ &= e^{x^2 \ln(x)} \frac{d}{dx} (x^2 \ln(x)) = e^{x^2 \ln(x)} \left(2x \ln(x) + x^2 \frac{1}{x} \right) \\ &= x e^{x^2 \ln(x)} (2 \ln(x) + 1) = x x^{x^2} (2 \ln(x) + 1) = x^{x^2+1} (2 \ln(x) + 1). \end{aligned}$$

v) Grâce aux propriétés du logarithme, nous avons

$$g(t) = 7 \ln(t) + 8 \ln(t^2 - 5) - 5 \ln(t - 2).$$

Donc

$$g'(t) = \frac{7}{t} + \frac{16t}{t^2 - 5} - \frac{5}{t - 2}.$$

La règle de dérivation des fonctions composées a été utilisée pour calculer la dérivée de $\ln(t^2 - 5)$.

Question 4.27

a) $h'(\theta) = \sec(\theta)(\sec^2(\theta) + \tan^2(\theta))$

c) $f'(t) = \frac{\cos(x)}{4 + \sin(x)}$

$$\text{d)} \quad g(\theta) = \frac{\sin(\theta) + \theta \cos(\theta)}{\sqrt{2\theta \sin(\theta)}}$$

e) Nous avons $F(\theta) = f_1(f_2(f_3(\theta)))$ où $f_1(z) = z^2$, $f_2(y) = \tan(y)$ et $f_3(\theta) = \sin(\theta)$. Ainsi,

$$F'(\theta) = f_1'(f_2(f_3(\theta))) f_2'(f_3(\theta)) f_3'(\theta) .$$

Or, $f_1'(z) = 2z$, $f_2'(y) = \sec^2(y)$ et $f_3'(\theta) = \cos(\theta)$. Nous obtenons donc

$$F'(\theta) = 2 \tan(\sin(\theta)) \sec^2(\sin(\theta)) \cos(\theta) .$$

f) Nous avons $g(x) = f(x)h(x)$ où $f(x) = x$ et $h(x) = \arctan(x^2)$. Nous allons utiliser la règle pour la dérivée d'un produit. Notons que $h(x)$ est une composition de fonctions et que

$$h'(x) = \left(\frac{d}{dy} \arctan(y) \Big|_{y=x^2} \right) \frac{d}{dx} x^2 = \frac{1}{1+y^2} \Big|_{y=x^2} (2x) = \frac{2x}{1+x^4} .$$

Nous obtenons

$$g'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x) = \arctan(x^2) + x \left(\frac{2x}{1+x^4} \right) = \arctan(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4} .$$

g)

$$h'(\theta) = \left(\frac{d}{d\theta} \sin(\theta) \right) \cos(\theta) + \sin(\theta) \left(\frac{d}{d\theta} \cos(\theta) \right) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

h) Nous avons $\cos(2x-1) = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = \cos(y)$ et $f_2(x) = 2x-1$. Donc

$$\frac{d}{dx} \cos(2x-1) = f_1'(f_2(x)) f_2'(x) = -\sin(2x-1) (2) = -2 \sin(2x-1)$$

et ainsi

$$h'(x) = \frac{d}{dx} (3 + \cos(2x-1)) = \frac{d}{dx} \cos(2x-1) = -2 \sin(2x-1) .$$

i) Nous avons $e^{\cos(z)} = f_1(f_2(z))$ où $f_1(y) = e^y$ et $f_2(z) = \cos(z)$. Puisque $f_1'(y) = e^y$ et $f_2'(z) = -\sin(z)$, nous obtenons

$$g'(z) = \frac{d}{dz} (e^{\cos(z)}) = f_1'(f_2(z)) f_2'(z) = e^{\cos(z)} (-\sin(z)) = -e^{\cos(z)} \sin(z) .$$

j) Si nous n'utilisons pas la formule pour calculer la dérivée de la sécante, nous pouvons procéder comme suit. Nous avons

$$f(\theta) = \sec(\theta) = (\cos(\theta))^{-1} = f_1(f_2(\theta)) .$$

où $f_1(y) = y^{-1}$ et $f_2(\theta) = \cos(\theta)$. Puisque $f_1'(y) = -y^{-2}$ et $f_2'(\theta) = -\sin(\theta)$, nous trouvons

$$f'(\theta) = f_1'(f_2(\theta)) f_2'(\theta) = -(\cos(\theta))^{-2} (-\sin(\theta)) = \frac{\sin(\theta)}{(\cos(\theta))^2}$$

$$= \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right) \left(\frac{1}{\cos(\theta)} \right) = \tan(\theta) \sec(\theta) .$$

k) Nous avons $f(x) = g(h(k(x)))$ où $k(x) = x^{100} + 1$, $h(y) = \sin(y)$ et $g(z) = e^z$. Donc $f'(x) = g'(h(k(x)))h'(k(x))k'(x)$. Or $g'(z) = e^z$, $h'(y) = \cos(y)$ et $k'(x) = 100x^{99}$. Donc

$$f'(x) = 100x^{99} \cos(x^{100} + 1) e^{\sin(x^{100} + 1)} .$$

m) Puisque $f(t) = \ln(2t - \cos(6t)) - \ln(t)$, nous trouvons

$$f'(t) = \frac{2 + 6 \sin(6t)}{2t - \cos(6t)} - \frac{1}{t} .$$

Question 4.28

i: Avec la règle de la dérivée d'un quotient, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + e^x} \right) &= \frac{\left(\frac{d}{dx} 1 \right) (1 + e^x) - (1) \left(\frac{d}{dx} (1 + e^x) \right)}{(1 + e^x)^2} \\ &= \frac{0 \times (1 + e^x) - e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{-e^x}{(1 + e^x)^2} . \end{aligned}$$

ii: Pour utiliser la règle de la dérivée de fonctions composées, notons que

$$\frac{1}{1 + e^x} = (1 + e^x)^{-1} = f_1(f_2(x))$$

où $f_1(y) = y^{-1}$ et $f_2(x) = 1 + e^x$. Puisque $f_1'(y) = -y^{-2}$ et $f_2'(x) = e^x$, nous obtenons

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + e^x} \right) = \frac{d}{dx} \left((1 + e^x)^{-1} \right) = f_1'(f_2(x)) f_2'(x) = -(1 + e^x)^{-2} e^x = \frac{-e^x}{(1 + e^x)^2} .$$

Question 4.29

i: Avec les identités pour les fonctions logarithmiques, nous avons $f(x) = \ln(7x) = \ln(7) + \ln(x)$. Donc $f'(x) = 1/x$.

ii: Pour utiliser la règle des fonctions composées, notons que $\ln(7x) = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = \ln(y)$ et $f_2(x) = 7x$. Donc

$$\frac{d}{dx} (\ln(7y)) = f_1'(f_2(x)) f_2'(x) = \frac{1}{y} \Big|_{y=7x} \times 7 = \frac{1}{7x} \times 7 = \frac{1}{x} .$$

Question 4.30

i: Nous avons la règle $\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln(a)$ pour $a > 0$. Donc $\frac{d}{dx} (7^x) = 7^x \ln(7)$.

ii: Pour utiliser la règle des fonctions composées, notons que $7^x = e^{\ln(7^x)} = e^{x \ln(7)} = f_1(f_2(x))$ où $f_1(y) = e^y$ et $f_2(x) = x \ln(7)$. Donc

$$\frac{d}{dx} (7^x) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) = e^y \Big|_{y=x \ln(7)} \ln(7) = e^{x \ln(7)} \ln(7) = e^{\ln(7^x)} \ln(7) = 7^x \ln(7) .$$

Question 4.31

i: Puisque $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (\cos(2\theta)) &= \frac{d}{d\theta} (\cos^2(\theta)) - \frac{d}{d\theta} (\sin^2(\theta)) = -2 \cos(\theta) \sin(\theta) - 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &= -4 \cos(\theta) \sin(\theta) = -2 \sin(2\theta) . \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la règle de la dérivée d'un produit pour calculer

$$\frac{d}{d\theta} (\cos^2(\theta)) = 2 \cos(\theta) \frac{d}{d\theta} \cos(\theta) = -2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

et

$$\frac{d}{d\theta} (\sin^2(\theta)) = 2 \sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \sin(\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta) .$$

Nous aurions pu calculer la dérivée de $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$ à l'aide de la règle de la dérivée de fonctions composées.

ii: Puisque $\cos(2\theta) = f_1(f_2(\theta))$ où $f_2(y) = \cos(y)$ et $f_1(\theta) = 2\theta$, nous avons

$$f'(\theta) = f_2'(f_1(z))f_1'(z) = -\sin(y) \Big|_{y=2\theta} (2) = -\sin(2\theta) (2) = -2 \sin(2\theta) .$$

Question 4.32

a) Puisque $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$, nous avons $h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(2) \times 6 = 5 \times 6 = 30$.

b) Puisque $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$, nous avons $h'(1) = g'(f(1))f'(1) = g'(3) \times 4 = 9 \times 4 = 36$.

c) Puisque $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, nous avons

$$h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)} = \frac{4 \times 2 - 3 \times 6}{2^2} = -\frac{5}{2} .$$

d) Puisque $f(h(x)) = x$, nous avons que $f'(h(x))h'(x) = 1$. Ainsi, $h'(1) = \frac{1}{f'(h(1))}$. Or $h(1) = f^{-1}(1)$ est la valeur qu'il faut donner à f pour obtenir 1. Donc, $h(1) = 2$. Nous avons que $h'(1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$.

Question 4.33

Nous avons $f'(x) > 0$ pour tout x car f est une fonction strictement croissante. Ainsi,

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} < 0 \text{ pour tout } x \text{ car } f(x) > 0 \text{ pour tout } x \text{ par hypothèse.}$$

Question 4.34

a)

i: Puisque

$$y = 2 + x^3 \Leftrightarrow x^3 = y - 2 \Leftrightarrow x = (y - 2)^{1/3},$$

l'inverse de f est $f^{-1}(x) = (x - 2)^{1/3}$. Ainsi, la règle des fonctions composées donne

$$\frac{d}{dx} (f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} (x - 2)^{1/3} = \frac{1}{3}(x - 2)^{-2/3}.$$

ii: Puisque $f(f^{-1}(x)) = x$ pour tout x , nous avons que

$$1 = \frac{d}{dx} (x) = \frac{d}{dx} (f(f^{-1}(x))) = f'(f^{-1}(x)) \frac{d}{dx} (f^{-1}(x)).$$

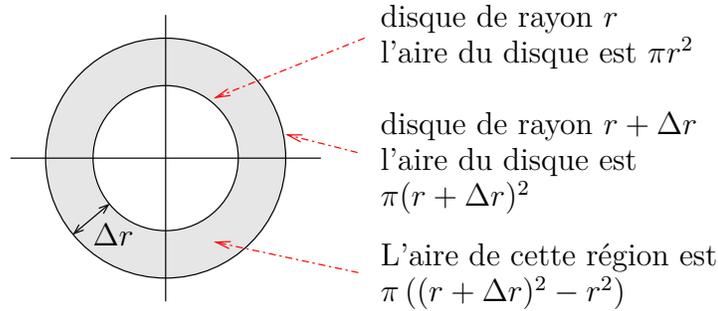
Donc

$$\frac{d}{dx} (f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

où $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Puisque $f'(x) = 3x^2$, nous obtenons

$$\frac{d}{dx} (f^{-1}(x)) = \frac{1}{3((x - 2)^{1/3})^2} = \frac{1}{3(x - 2)^{2/3}} = \frac{1}{3}(x - 2)^{-2/3}.$$

Question 4.35a) Puisque $y' = \frac{3x^2}{x^3 - 7}$, nous avons que $y'(2) = 12$. L'équation de la droite tangente dans la forme point-pente est $y - 0 = 12(x - 2)$. Donc $y = 12x - 24$.b) Puisque $y' = \cos(\sin(x)) \cos(x)$, nous avons que $y'(\pi) = -1$. L'équation de la droite tangente dans la forme point-pente est $y - 0 = -1(x - \pi)$. Donc $y = -x + \pi$.**Question 4.36**a) La courbe coupe l'axe des x au point $x = -2$. La pente est donnée par $f'(-2) = 3(-2)^2 = 12$.b) La droite tangente passe par le point $(-2, 0)$ et a une pente de $f'(-2) = 12$. L'équation de la droite tangente est donnée par $(y - 0) = f'(-2)(x - (-2))$; c'est-à-dire, $y = 12x + 24$.c) La droite perpendiculaire a une pente m telle que $m \times f'(-2) = -1$. Donc $m = -1/12$. La droite doit passer par le point $(-2, 0)$. L'équation de cette droite est donc $(y - 0) = (-1/12)(x - (-2))$; c'est-à-dire, $y = -x/12 - 1/6$.**Question 4.37**Puisque $f'(x) = \sqrt{3} + 2 \cos(x)$, nous avons que $f'(x) = 0$ lorsque $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$.**Question 4.38**Nous avons $A'(r) = 2\pi r$.



Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} A'(r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{A(r + \Delta r) - A(r)}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{2\pi r \Delta r + \pi (\Delta r)^2}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} (2\pi r + \pi \Delta r) = 2\pi r. \end{aligned}$$

Puisque nous divisons une aire en m^2 (i.e. $\pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2$) par une longueur en m (i.e. Δr), nous obtenons que $A'(r)$ est en m. Ce sont les unités de $2\pi r$.

Notez que lorsque $\Delta r \rightarrow 0$, l'anneau « tend » vers un cercle de rayon r qui a une circonférence de $2\pi r$.

Question 4.39

Nous cherchons $c \in [0, 2]$ tel que

$$2c = f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2.$$

Donc $c = 1$. C'est la valeur c qui est prédite par le Théorème de la moyenne.

18.5 Applications de la dérivée

18.5.1 Dérivées d'ordres supérieures

Question 5.1

a) $h'(y) = 10y^9 - 9y^8$ et $h''(y) = 90y^8 - 72y^7$.

b) Puisque $f(x) = \frac{3+x}{2x} = \frac{3}{2}x^{-1} + \frac{1}{2}$, nous avons $f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-2}$ et $f''(x) = 3x^{-3}$.

c) Si nous utilisons la règle de la dérivée d'un produit, nous obtenons

$$f'(x) = \left(\frac{d}{dx} x^2 \right) e^x + x^2 \left(\frac{d}{dx} e^x \right) = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$$

et

$$f''(x) = \left(\frac{d}{dx} (2x + x^2) \right) e^x + (2x + x^2) \left(\frac{d}{dx} e^x \right)$$

$$= (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (2 + 4x + x^2)e^x .$$

d) Si nous utilisons seulement la règle de la dérivée d'un quotient, nous obtenons

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{d}{dx}(1+x)\right)e^x - (1+x)\left(\frac{d}{dx}e^x\right)}{(e^x)^2} = \frac{e^x - (1+x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$$

et

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{d}{dx}(-x)\right)e^x + x\left(\frac{d}{dx}e^x\right)}{e^{2x}} = \frac{-e^x + xe^x}{e^{2x}} = \frac{x-1}{e^x} .$$

e) Si nous utilisons la règle de la dérivée d'un produit, nous obtenons

$$g'(z) = \left(\frac{d}{dz}(z+4)\right)\ln(z) + (z+4)\left(\frac{d}{dz}\ln(z)\right) = \ln(z) + (z+4)\left(\frac{1}{z}\right) = \ln(z) + 1 + \frac{4}{z}$$

et

$$g''(z) = \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2} .$$

f) Si nous utilisons la règle de la dérivée d'un produit, nous obtenons

$$F'(w) = \left(\frac{d}{dw}e^w\right)\ln(w) + e^w\left(\frac{d}{dw}\ln(w)\right) = e^w\ln(w) + e^w\left(\frac{1}{w}\right) = e^w\left(\ln(w) + \frac{1}{w}\right)$$

et

$$\begin{aligned} F''(w) &= \left(\frac{d}{dw}e^w\right)\left(\ln(w) + \frac{1}{w}\right) + e^w\left(\frac{d}{dw}\left(\ln(w) + \frac{1}{w}\right)\right) \\ &= e^w\left(\ln(w) + \frac{1}{w}\right) + e^w\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w^2}\right) = e^w\left(\ln(w) + \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}\right) . \end{aligned}$$

g) Puisque $f(x) = \ln(x^7) = 7\ln(x)$, nous avons $f'(x) = \frac{7}{x}$ et $f''(x) = -\frac{7}{x^2}$.

h) Il faut premièrement remarquer que $e^{-z} = g_1(g_2(z))$ où $g_1(w) = e^w$ et $g_2(z) = -z$. Puisque $g_1'(w) = e^w$ et $g_2'(z) = -1$, nous obtenons

$$\frac{d}{dz}(e^{-z}) = g_1'(g_2(z))g_2'(z) = e^{-z} \times (-1) = -e^{-z} .$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\left(\frac{d}{dz}(1+e^{-z})\right)(1+e^z) - (1+e^{-z})\left(\frac{d}{dz}(1+e^z)\right)}{(1+e^z)^2} \\ &= \frac{-e^{-z}(1+e^z) - (1+e^{-z})e^z}{(1+e^z)^2} = -\frac{e^{-z} + 2 + e^z}{1 + 2e^z + e^{2z}} . \end{aligned}$$

Nous avons que $e^{2z} = g_1(g_2(z))$ où $g_1(w) = e^w$ et $g_2(z) = 2z$. Puisque $g_1'(w) = e^w$ et $g_2'(z) = 2$, nous obtenons

$$\frac{d}{dz}(e^{2z}) = g_1'(g_2(z))g_2'(z) = e^{2z} \times (2) = 2e^{2z}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(z) &= -\frac{\left(\frac{d}{dz}(e^{-z} + 2 + e^z)\right)(1 + 2e^z + e^{2z}) - (e^{-z} + 2 + e^z)\left(\frac{d}{dz}(1 + 2e^z + e^{2z})\right)}{(1 + 2e^z + e^{2z})^2} \\ &= -\frac{(-e^{-z} + e^z)(1 + 2e^z + e^{2z}) - (e^{-z} + 2 + e^z)(2e^z + 2e^{2z})}{(1 + 2e^z + e^{2z})^2} \\ &= \frac{e^{-z} + 4 + 6e^z + 4e^{2z} + e^{3z}}{(1 + 2e^z + e^{2z})^2}. \end{aligned}$$

k) Grâce à la règle de la dérivée d'un quotient, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{d}{dx}(2 + x^3)\right)(1 + x^2) - (2 + x^3)\left(\frac{d}{dx}(1 + x^2)\right)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{(3x^2)(1 + x^2) - (2 + x^3)(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 - 4x}{1 + 2x^2 + x^4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(\frac{d}{dx}(x^4 + 3x^2 - 4x)\right)(1 + 2x^2 + x^4) - (x^4 + 3x^2 - 4x)\left(\frac{d}{dx}(1 + 2x^2 + x^4)\right)}{(1 + 2x^2 + x^4)^2} \\ &= \frac{(4x^3 + 6x - 4)(1 + 2x^2 + x^4) - (x^4 + 3x^2 - 4x)(4x + 4x^3)}{(1 + 2x^2 + x^4)^2} \\ &= \frac{-2x^5 + 12x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 22x - 4}{(1 + 2x^2 + x^4)^2}. \end{aligned}$$

Question 5.2

$H'(\theta) = \theta \cos(\theta) + \sin(\theta)$ et $H''(\theta) = 2 \cos(\theta) - \theta \sin(\theta)$.

Question 5.3

Assumons que la distance positive est vers le haut. Si $d(t)$ est la distance entre le sol et l'objet au temps t , alors $d''(t) = -22.88$. Le signe négatif devant 22.88 provient du fait que la direction positive est vers le haut. Donc $d'(t) = -22.88t + C_1$ et $d(t) = -11.44t^2 + C_1t + C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes qui sont déterminées par les conditions initiales. Nous laissons tomber un objet d'une hauteur de 100 m. Donc $d(0) = 100$ et $d'(0) = 0$. $d'(0) = 0$ donne $C_1 = 0$ et $d(0) = 100$ donne $C_2 = 100$. Nous obtenons $d(t) = -11.44t^2 + 100$.

Nous cherchons t tel que $d(t) = 0$; c'est-à-dire, tel que $-11.44t^2 + 100 = 0$. La solution positive de cet équation est $t \approx 2.9566$ s. La vitesse à ce moment est $d'(2.9566) \approx$

-67.6461 m/s. Comme la direction positive est vers le haut, cela veut dire que l'objet frappe le sol à une vitesse de 67.6461 m/s.

Question 5.4

Assumons que la distance positive est vers le haut. Si $d(t)$ est la distance entre le sol et l'objet au temps t , alors $d''(t) = -22.88$. Le signe négatif devant 22.88 provient du fait que la direction positive est vers le haut. Donc $d'(t) = -22.88t + C_1$ et $d(t) = -11.44t^2 + C_1t + C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes qui sont déterminées par les conditions initiales. Nous avons que $d'(0) = 10$ m/s car nous lançons l'objet vers le haut. Donc $C_1 = 10$. De plus, $d(0) = 100$. Donc $C_2 = 100$. Ainsi,

$$d(t) = 100 + 10t - 11.44t^2 \text{ m,}$$

où le temps t est en secondes.

Au moment où l'objet atteint sa hauteur maximale, la vitesse est nulle. C'est-à-dire, $d'(t) = -22.88t + 10 = 0$. Donc $t \approx 0.43703$ s. Il s'écoule 0.43703 s avant que l'objet atteigne sa hauteur maximale. À ce moment, l'objet est à $d(0.43703) \approx 102.1853$ m.

L'objet frappe le sol lorsque $d(t) = 0$. Les deux racines du polynôme $100 + 10t - 11.44t^2$ sont

$$t_1 = \frac{-10 - \sqrt{10^2 + 4 \times 100 \times 11.44}}{-2 \times 11.44} \approx 3.425755$$

et

$$t_2 = \frac{-10 + \sqrt{10^2 + 4 \times 100 \times 11.44}}{-2 \times 11.44} \approx -2.551629 .$$

Naturellement, la seule réponse plausible est $t = 3.425755$ s. À ce moment, l'objet a une vitesse de $d'(3.425755) \approx -68.3813$ m/s. Comme la direction positive est vers le haut, cela veut dire que l'objet frappe le sol à une vitesse de 68.3813 m/s.

18.5.2 Graphes de fonctions

Question 5.5

Nous savons que la valeur de f' en un point est donné par la pente de la droite tangente à la courbe en ce point. En particulier, $f' > 0$ sur un intervalle si et seulement si f est croissante sur cet intervalle, et $f' < 0$ sur un intervalle si et seulement si f est décroissante sur cet intervalle. De plus, $f'' < 0$ sur un intervalle si et seulement si f est concave sur cet intervalle, et $f'' > 0$ sur un intervalle si et seulement si f est convexe sur cette intervalle. Avec cette information, nous obtenons les résultats suivants.

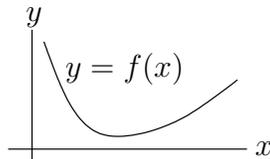
- a) Les points critiques sont -3 , -2 , -1 , -0.5 , 1 , 2 , 4 et 5 .
- b) $f' > 0$ (la fonction est strictement croissante) sur les intervalles $] -\infty, -3[$, $] -2, -1[$, $] -0.5, 1[$, $] 2, 4[$ et $] 5, \infty[$.
- c) $f' < 0$ (la fonction est strictement décroissante) sur les intervalles $] -3, -2[$, $] -1, -0.5[$, $] 1, 2[$ et $] 4, 5[$.

d) $f'' > 0$ (la fonction est convexe) sur les intervalles $] - 2.5, -1.5[$, $] - 0.8, 0.2[$, $]1.5, 3[$ et $]4.5, \infty[$.

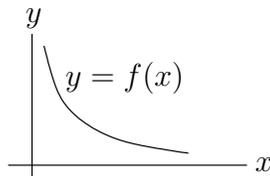
e) $f'' < 0$ (la fonction est concave) sur les intervalles $] - \infty, -2.5[$, $] - 1.5, -0.8[$, $]0.2, 1.5[$ et $]3, 4.5[$.

Question 5.6

a) Si la dérivée f' est strictement croissante alors $f'' > 0$ et donc la fonction est convexe.



b) Si $f' < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante. Si la dérivée f' est strictement croissante alors $f'' > 0$ et la fonction est convexe.



Question 5.7

La voiture se déplace le plus rapidement lorsque $t \approx 15$ s et $t \approx 45$ s. C'est lorsque la pente de la tangente à la courbe est la plus grande (i.e. $x'(t)$ a sa plus grande valeur).

La voiture accélère le plus rapidement au voisinage de $t = 6$ s et $t = 42$ s. C'est lorsque la pente de la tangente à la courbe augmente le plus rapidement tout en étant positive (i.e. $x''(t) > 0$ a sa plus grande valeur et $x'(t) > 0$).

La voiture décélère le plus rapidement au voisinage de $t = 22$ s. C'est lorsque la pente de la tangente à la courbe diminue le plus rapidement tout en étant positive (i.e. $x''(t) < 0$ a sa plus petite valeur et $x'(t) > 0$).

Question 5.8

a) La vitesse au temps t est $p'(t) = -10.4t - 2$ m/s et l'accélération au temps t est $p''(t) = -10.4$ m/s².

b) $p(t)$ est un simple polynôme de degré deux. Nous pourrions facilement tracer le graphe de p sans faire appel aux dérivées de p . Mais, comme nous voulons nous pratiquer à tracer des graphes à l'aide de l'information fournie par les dérivées d'ordre un et deux, nous ignorerons le fait que $p(t)$ est un simple polynôme.

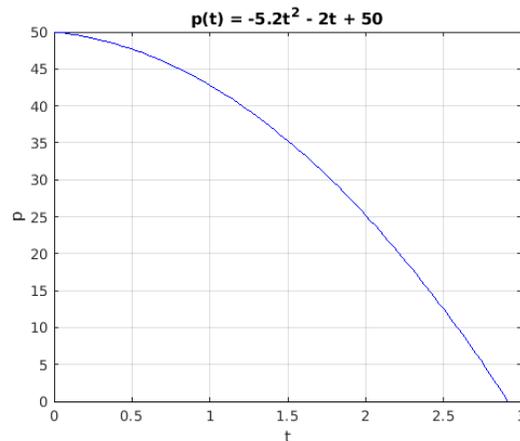
Les solutions de $p(t) = 0$ sont $t = t_1 = 2.91451\dots$ et $t = t_2 = -3.299133\dots$. Nous pouvons ignorer t_2 puisque nous sommes simplement intéressés aux valeurs positives de t .

Il n'y a qu'un seul point critique; c'est $t = -0.1923\dots$ s. Comme le point critique est négatif, nous pouvons nous douter que l'objet a été lancé vers le sol. Nous pouvons ignorer

ce point critique puisqu'il est négatif. Pour $t \geq 0$, nous aurons toujours $p'(t) < 0$. Donc la fonction est strictement décroissante.

Puisque $p''(t) = -10.4 < 0$ pour tout t , la fonction sera concave sur toute la droite réelle.

Le graphe de p est



c) La hauteur de la tour est $p(0) = 50$ m. Puisque $p'(0) = -2$ m/s, l'objet est lancé vers le bas à une vitesse de 2 m/s. Puisque $p''(t) = -10.4$ m/s², l'accélération dû à la gravité sur cette planète est 10.4 m/s².

Question 5.9

Pour cette question, assumons que la direction positive est vers le haut. a) Soit $d(t)$ la distance entre le sol et l'objet au temps t . Nous avons que $d''(t) = -2.15 \times 10^{-3}$. l'accélération est négative car nous assumons que la direction positive est vers le haut. Donc $d'(t) = -2.15 \times 10^{-3}t + C_1$ et $d(t) = -1.075 \times 10^{-3}t^2 + C_1t + C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes qui sont déterminées par les conditions initiales.

L'objet a été lancé vers le haut à une vitesse de 5 m/s. Donc $d'(0) = 5$ m/s. Ce qui donne $C_1 = 5$. L'objet est lancé d'une hauteur de 100 m. Donc $d(0) = 100$ m. Ce qui donne $C_2 = 100$.

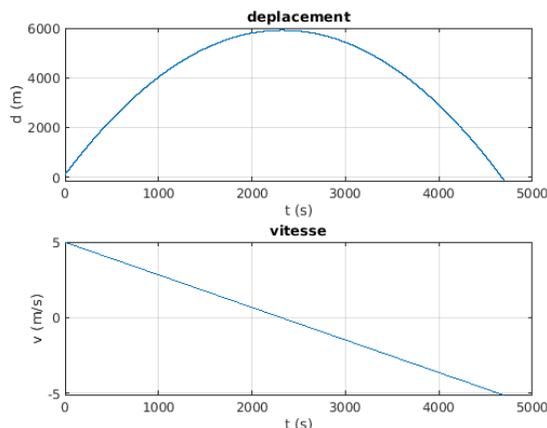
La vitesse de l'objet en fonction du temps est $v(t) = d'(t) = -2.15 \times 10^{-3}t + 5$ m/s et le déplacement en fonction du temps est $d(t) = -1.075 \times 10^{-3}t^2 + 5t + 100$ m.

b) Pour déterminer la hauteur maximale, il faut trouver les points critiques de d ; c'est-à-dire, les valeurs de t telles que $v(t) = -2.15 \times 10^{-3}t + 5 = 0$. Donc $t = 5 / (2.15 \times 10^{-3}) \approx 2,325.581$ s. Puisque $d''(t) < 0$ pour tout t , la fonction d atteint son maximum absolu à $t = t_1 \approx 2,325.581$ qui est $d(t_1) \approx 5,913.95$ m.

c) Nous cherchons $t > 0$ tel que $d(t) = -1.075 \times 10^{-3}t^2 + 5t + 100 = 100$ où, si vous préférez, $-1.075 \times 10^{-3}t^2 + 5t = 0$. La seule solution positive est $t = t_2 \approx 4,651.16$ s. À ce moment, la vitesse est $v(t_2) = -5$ m/s. Ceci n'est pas surprenant car le déplacement de l'objet est décrit par une parabole. À cause de la symétrie de la parabole par rapport à son axe, la pente de la tangente à la parabole au point $(0, 100)$ est l'inverse additif de la pente à la parabole au point $(t_2, 100)$.

d) Nous cherchons $t > 0$ tel que $d(t) = -1.075 \times 10^{-3}t^2 + 5t + 100 = 0$. La seule solution positive est $t_3 \approx 4,671.0775$ s. La vitesse lorsque l'objet frappe le sol est donc $v(t_3) \approx -5.0428$ m/s

e)



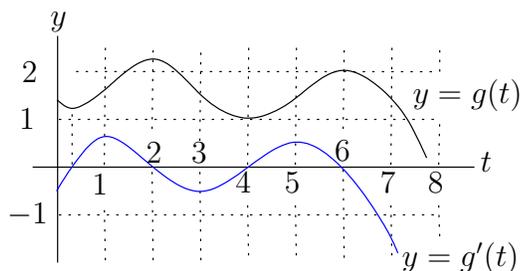
Question 5.10

Nous avons l'information suivante pour la fonction g .

t	$0 < t < 0.5$	0.5	$0.5 < t < 1$	1	$1 < t < 2$...
$g'(t)$	-	0	+	+	+	...
	décroît et convexe	min. local et convexe	croît et convexe	point d'inflexion	croît et concave	...
...	2	$2 < t < 3$	3	$3 < t < 4$	4	$4 < t < 5$
	0	-	-	-	0	+
	max. local et concave	décroît et concave	point d'inflexion	décroît et convexe	min. local et convexe	croît et convexe
...	5	$5 < t < 6$	6	$t > 6$		
	+	+	0	-		
	point d'inflexion	croît et concave	max. local et concave	décroît et concave		

Ne pas oublier que g est convexe lorsque g' est croissante et g est concave lorsque g' est décroissante.

Nous obtenons le graphe de g suivant.



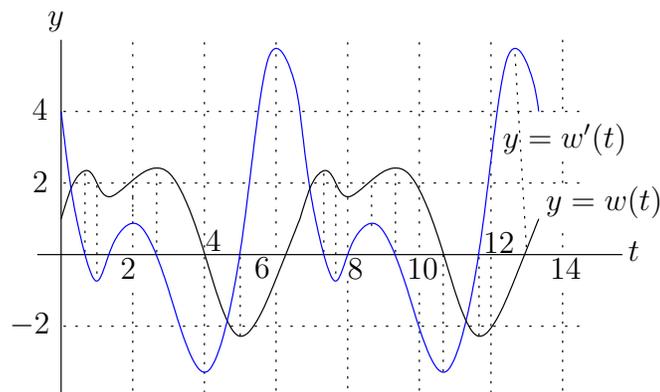
Question 5.11

Nous avons l'information suivante pour la fonction w .

t	$0 < t < 0.5$	0.5	$0.5 < t < 1$	1	\dots
$w'(t)$	$+$	0	$-$	$-$	\dots
	croît et concave	max. local et concave	décroît et concave	plus petite pente	\dots

Ne pas oublier que w est convexe lorsque w' est croissante et w est concave lorsque w' est décroissante.

Nous obtenons le graphe suivant.

**Question 5.12**

a) Le volume total des déchets au temps t est $V(t) = V_a(t) + V_b(t) = t^2 + 36 \text{ m}^3$. La masse du produit toxique au temps t sera $M(t) = V(t)\rho(t) = (t^2 + 36)(1.2 - 0.1t) \text{ g}$.

b) le taux de variation de la masse en fonction du temps est

$$\begin{aligned} M'(t) &= V'(t)\rho(t) + V(t)\rho'(t) = (2t)(1.2 - 0.1t) - 0.1(t^2 + 36) \\ &= -0.3t^2 + 2.4t - 3.6 \text{ g/année.} \end{aligned}$$

c) La seule solution de $M'(t) = 0$ est $t = 12$. Les points critiques de M sont les points où

$$M'(x) = -0.3x^2 + 2.4x - 3.6 = -0.3(x^2 - 8x + 12) = -0.3(x - 2)(x - 6) = 0.$$

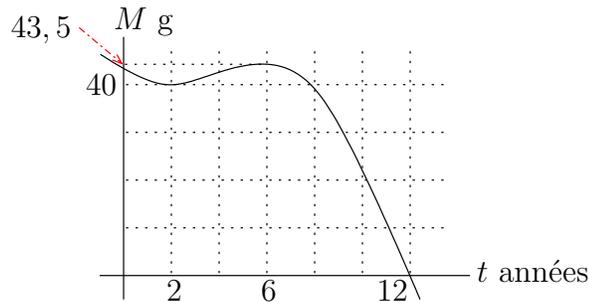
Nous trouvons $x = 2$ et 6 . De plus, $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = -\infty$.

Nous avons l'information suivante pour la fonction M .

t	0	$0 < t < 2$	2	$2 < t < 6$	6	$6 < x < 12$	\dots
$M(t)$	43.2	$+$	40	$+$	43.2	$+$	
$M'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	
	décroît	décroît	min. loc.	croît	max. loc.	décroît	

\dots	12	$12 < x$	$+\infty$
	0	$-$	$-\infty$
	$-$	$-$	
	décroît	décroît	

Le graphe de M a l'allure suivante.



Les efforts ne sont pas encourageants au début mais le produit toxique sera complètement éliminé des déchets après 12 ans.

Question 5.13

a) La densité au temps t est $\rho(t) = \frac{M(t)}{V(t)} = \frac{1+t^2}{1+t}$ g/cm³.

b)

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= \frac{\left(\frac{d}{dt}(1+t^2)\right)(1+t) - (1+t^2)\left(\frac{d}{dt}(1+t)\right)}{(1+t)^2} = \frac{2t(1+t) - (1+t^2)}{(1+t)^2} \\ &= \frac{t^2 + 2t - 1}{(1+t)^2} \end{aligned}$$

c) Nous cherchons les valeurs de t pour lesquelles $\rho'(t) > 0$. Puisque $(1+t)^2 > 0$ pour tous $t \neq -1$, il suffit de trouver les valeurs de t pour lesquelles $t^2 + 2t - 1 > 0$.

Les racines du polynôme $t^2 + 2t - 1$ sont $t_1 = -1 + \sqrt{2} = 0.41421356\dots$ et $t_2 = -1 - \sqrt{2} = -2.41421356\dots$. Puisque le coefficient de t^2 dans le polynôme $t^2 + 2t - 1$ est positif, nous avons que $t^2 + 2t - 1 > 0$ pour $t < t_2$ et $t > t_1$.

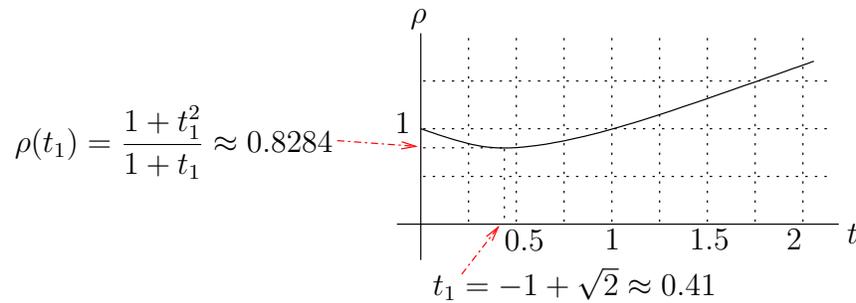
Si nous considérons seulement les valeurs de $t \geq 0$, nous avons que $\rho'(t) > 0$ pour $t > t_1$. La densité ρ est donc strictement croissante sur l'intervalle $]t_1, +\infty[$.

d) Nous traçons le graphe de ρ seulement pour $t \geq 0$. C'est l'intervalle où $\rho(t) > 0$. Nous avons calculé les points critiques de ρ en (c); c'est-à-dire, les points t tels que $\rho'(t) = 0$. Le seul point critique positif est $t = t_1$. De plus, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1+t^2}{1+t} = +\infty$.

Nous obtenons les données suivantes.

t	0	$0 < t < t_1$	t_1	$t_1 \approx 0.4142 < t$	∞
$\rho(t)$	1	+	≈ 0.828	+	∞
$\rho'(t)$	-	-	0	+	
	décroît	décroît	min. loc.	croît	

Le graphe de ρ a l'allure suivante.

**Question 5.14**

a) La taille de la population après un an est la somme de la population initiale et de la production annuelle pour l'ensemble de la population. Donc

$$T(p) = p + pf(p) = p + 2p \left(1 - \frac{p}{1000}\right) = 3p - \frac{p^2}{500}.$$

b) $T'(p) = 3 - \frac{p}{250}.$

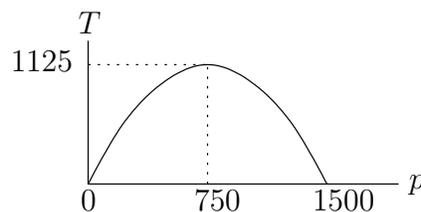
c) $T(p)$ est un simple polynomial de degré deux. Nous pourrions facilement tracer le graphe de T sans faire appel à la dérivée de T . Mais, comme nous voulons nous pratiquer à tracer des graphes à l'aide de la dérivée, nous ignorerons le fait que $T(p)$ est un simple polynomial.

Les solutions de $T(p) = 0$ sont $p = 0$ et $p = 1500$. Il n'y a qu'un seul point critique pour T (lorsque $T'(p) = 0$) et c'est $p = 750$. De plus, p et $T(p)$ doivent être positifs car p est le nombre d'individus dans la population initialement et $T(p)$ est la taille de la population après un an. Nous devons donc assumer que $0 \leq p \leq 1500$.

Nous obtenons le tableau suivant.

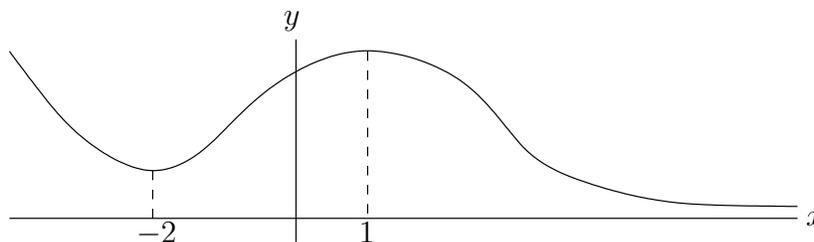
p	0	$0 < p < 750$	750	$750 < p < 1500$	1500
$T(p)$	0	+	1125	+	0
$T'(p)$	+	+	0	-	-
	croît	croît	max. loc.	décroît	décroît

Le graphe de T a l'allure suivante.

**Question 5.15**

$f'(x) > 0$ si $-2 < x < 1$ veut dire que f est (strictement) croissante pour x entre -2 et 1 .
 $f'(x) < 0$ si $x < -2$ ou si $x > 1$ veut dire que f est (strictement) décroissante pour $x < -2$ et $x > 1$.

Nous obtenons le graphe suivant.

**Question 5.16**

Nous avons

$$f'(x) = \frac{4x^2 e^{x^2} - e^{x^2}}{x^2} = \frac{4e^{x^2}(x^2 - 1/4)}{x^2}.$$

Nous résumons dans le tableau suivant l'information que nous pouvons déduire de f et de sa dérivée.

x	$x < -1/2$	$-1/2$	$-1/2 < x < 0$	0	$0 < x < 1/2$	$x > 1/2$	
$f(x)$	-	-	-	N.D.	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	N.D.	-	0	+
		max. local		asymptote vertical		min. local	

Question 5.17

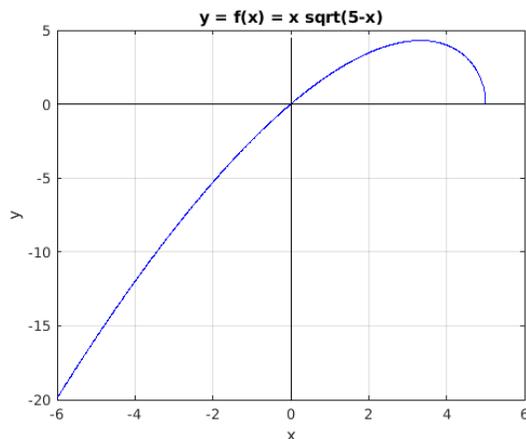
Pour répondre à cette question, il faut savoir que

$$f'(x) = \frac{10 - 3x}{2\sqrt{5-x}} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{3x - 20}{4(5-x)^{3/2}}.$$

Nous résumons dans le tableau suivant l'information que nous pouvons déduire de f , f' et f'' .

x	$x < 0$	0	$0 < x < 10/3$	$10/3$	$10/5 < x < 5$
$f(x)$	-	0	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-	-	-
	croît et concave			max. local	décroît et concave

- La fonction est strictement croissante sur $] -\infty, 10/3[$ et strictement décroissante sur $]10/3, 5[$.
- Le seul maximum local est $f(10/3) = 10\sqrt{15}/9$.
- La fonction est concave sur $] -\infty, 5[$.
-

**Question 5.18**

Pour répondre à cette question, il faut utiliser

$$f'(x) = 1 - 2 \cos(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = 2 \sin(x)$$

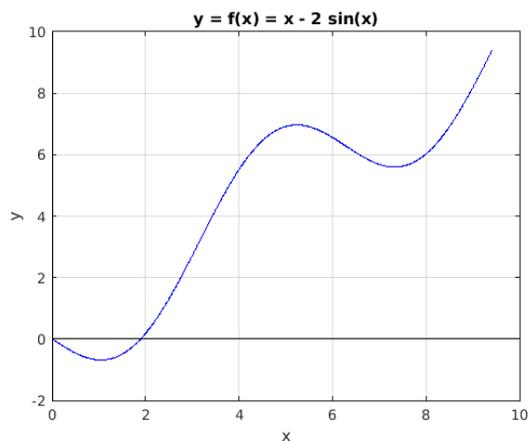
pour produire un tableau contenant l'information sur la croissance, la concavité, les points critiques, ... de f . Nous laissons aux lecteurs le soin de produire ce tableau.

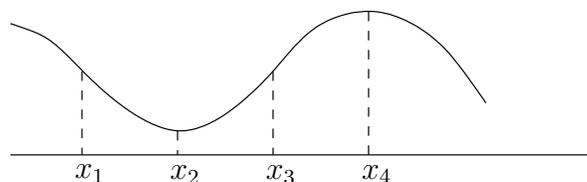
a) La fonction est strictement croissante sur $]\pi/3, 5\pi/3[$ et $]7\pi/3, 3\pi[$ et strictement décroissante sur $]0, \pi/3[$ et $]5\pi/3, 7\pi/3[$.

b) Le seul maximum local est $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Il y a deux minimums locaux : $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ et $f(7\pi/3) = 7\pi/3 + \sqrt{3}$.

c) La fonction est convexe sur $]0, \pi[$ et $]2\pi, 3\pi[$ et concave sur $]\pi, 2\pi[$. Les points (π, π) et $(2\pi, 2\pi)$ sont des points d'inflexion.

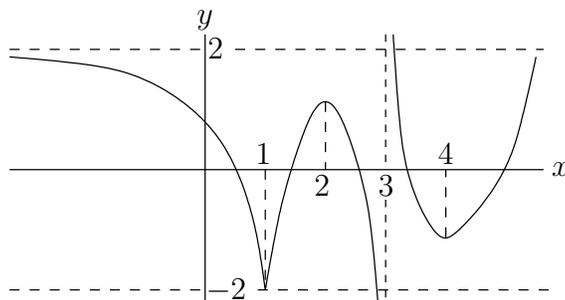
d)

**Question 5.19**



Question 5.20

d)



Question 5.21

a) Les solutions de $h(x) = x^3 - 3x + 3 = 0$ sont les points où h coupe l'axe des x . Malheureusement, nous n'avons pas de formule pour les calculer comme c'est le cas pour les équations quadratiques. Les points critiques de h sont les points où $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0$. nous trouvons $x = 1$ et -1 .

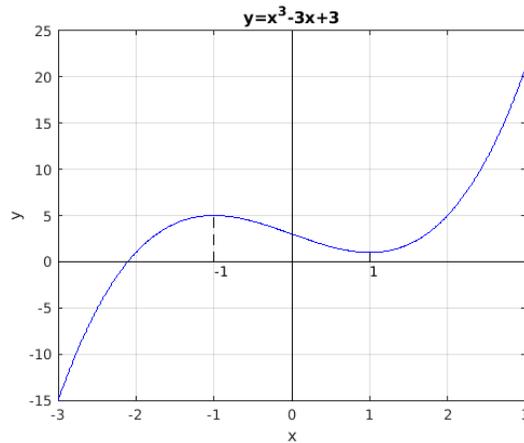
Les points critiques de $h'(x)$ sont les solutions de $h''(x) = 6x = 0$. Donc $x = 0$ est un candidat pour un point d'inflexion. Finalement, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

Nous avons de plus que $h(-3) = -15 < 0$ et $h(-2) = 1 > 0$. Comme la fonction h change de signe entre -3 et -2 , il doit donc y avoir un point c entre -3 et -2 où $h(c) = 0$ selon le Théorème des valeurs intermédiaires. Comme nous pouvons voir dans le tableau ci-dessous, le seul minimum local pour $x > c$ est positif. Donc h coupe l'axe des x en un seul point.

Nous résumons dans le tableau suivant l'information que nous pouvons déduire de h , h' et h'' .

x	$-\infty$	$x < c$	c	$c < x - 1$	-1	$-1 < x < 0$	
$h(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	5	$+$	
$h'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$h''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$...
		croît et concave			max. loc. et concave	décroît et concave	
		0	$0 < x < 1$	1	$1 < x$	$+\infty$	
		0	$-$	1	$-$	$+\infty$	
		$-$	$-$	0	$+$		
...		0	$+$	$+$	$+$		
		point d'inflexion	décroît et convexe	min. loc. et convexe	croît et convexe		

Le graphe de h est



b) Nous avons $h'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x - 5)(x + 1)$ et $h''(x) = 6x - 12$.

$h'(x)$ est définie pour tout x et $h'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 5$. Les points critiques sont $x = -1$ et $x = 5$. $h''(x) = 0$ pour $x = 2$. Donc $x = 2$ est un candidat pour un point d'inflexion. Finalement, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$.

Nous résumons l'information que nous avons obtenues dans le tableau suivant.

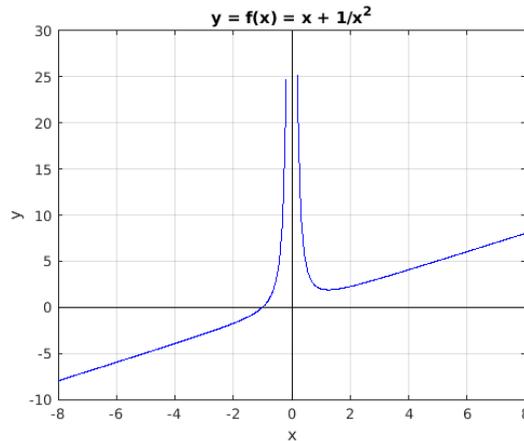
x	$-\infty$	$x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	
$f(x)$	$-\infty$	$- +$	11	$+ -$	-43	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	\dots
		croît et concave	max. local et concave	décroît et concave	point d'inflexion	

	$2 < x < 5$	5	$5 < x$	$+\infty$
	$-$	-97	$- +$	$+\infty$
\dots	$-$	0	$+$	
	$+$	$+$	$+$	
	décroît et convexe	min. loc. et convexe	croît convexe	

La fonction f change de signe dans les intervalles où nous retrouvons un des symboles $+|-$ ou $-|+$. Comme f est continue, il existe un point dans un tel intervalle où la fonction f est nulle.

Le graphe de f est

Le graphe de f est donné ci-dessous.



d) Nous avons $f'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$ et $f''(x) = -e^x - xe^x = -(1 + x)e^x$.

La fonction $f(x)$ est nulle pour $x = 1$, positive pour $x < 1$ et négative pour $x > 1$.

La fonction f' est définie sur toute la droite réelle et $f'(x) = 0$ seulement pour $x = 0$. Donc $x = 0$ est le seul point critique de f . Nous avons $f'(x) < 0$ pour $x > 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x < 0$.

La fonction f'' est définie sur toute la droite réelle et $f''(x) = 0$ seulement pour $x = -1$. Donc $x = -1$ est un candidat pour un point d'inflexion. Nous avons que $f''(x) < 0$ pour $x > -1$ et $f''(x) > 0$ pour $x < -1$.

Finalement,

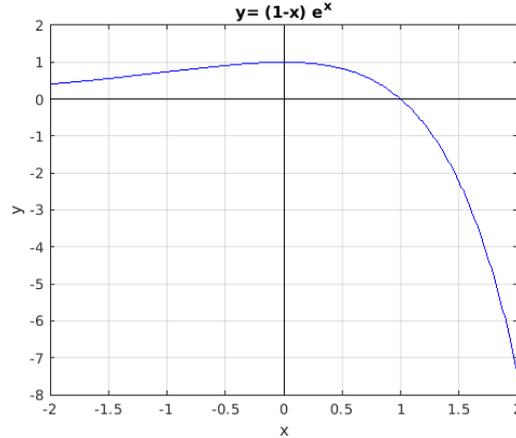
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x)e^x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)e^x = 0 .$$

Nous pouvons vérifier numériquement ces limites à l'aide de suites $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui tendent vers plus ou moins l'infini selon le cas.

Nous résumons l'information que nous avons obtenues dans le tableau suivant.

	x	$-\infty$	$x < -1$	-1		
$f(x)$		0	+	$2e^{-1}$		
$f'(x)$			+	+		
$f''(x)$			+	0		...
		asymptote horizontale	croît et convexe	point d'inflexion		
	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x$	$+\infty$
		+	1	+	0	-
		+	0	-	-	-
		-	-	-	-	-
		croît et concave	max. local et concave		décroît et concave	

Le graphe de f est ci-dessous.



e) Nous avons $g(z) = \frac{e^z}{z^2} = z^{-2}e^z$. Ainsi,

$$g'(z) = -2z^{-3}e^z + z^{-2}e^z = (z^{-2} - 2z^{-3})e^z = (z - 2)z^{-3}e^z$$

et

$$\begin{aligned} g''(z) &= (-2z^{-3} + 6z^{-4})e^z + (z^{-2} - 2z^{-3})e^z = (z^{-2} - 4z^{-3} + 6z^{-4})e^z \\ &= (z^2 - 4z + 6)z^{-4}e^z. \end{aligned}$$

La fonction g est définie sur toute la droite réelle sauf à l'origine. De plus, $g(z) > 0$ pour tout $z \neq 0$.

La fonction g' est aussi définie sur toute la droite réelle sauf à l'origine. De plus $g'(z) = 0$ si $z = 2$. Nous avons donc un point critique à $x = 2$.

Comme g et g' , la fonction g'' est aussi définie sur toute la droite réelle sauf à l'origine. De plus, $g''(z) \neq 0$ pour tout $z \neq 0$ car $z^2 - 4z + 6$ n'a pas de racines réelles. Comme $g''(z)$ est positif pour $z = 0$, nous avons donc que $g''(z) > 0$ pour toutes valeurs de z .

À l'aide de suites de nombres, nous pouvons vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0.$$

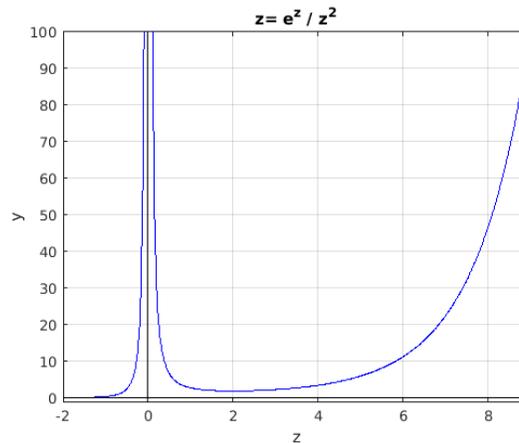
De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2} = \infty.$$

Nous résumons l'information que nous avons obtenues dans le tableau suivant.

z	$-\infty$	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x$	∞
$g(z)$	0	+	N.D.	+	$e^2/4$	+	$+\infty$
$g'(z)$		+	N.D.	-	0	+	
$g''(z)$		+	N.D.	+	+	+	
	asymptote horizontale	croît et convexe	asymptote verticale	décroît et convexe	min. loc. convexe	croît et convexe	

Le graphe de g est ci-dessous.



g) Nous avons

$$T'(t) = -2te^t + (1 - t^2)e^t = (1 - 2t - t^2)e^t$$

et

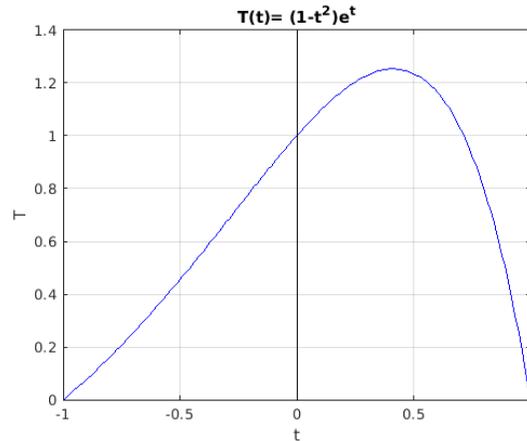
$$T''(t) = (-2 - 2t)e^t + (1 - 2t - t^2)e^t = (-1 - 4t - t^2)e^t.$$

La fonction T ainsi que ses dérivées sont définies sur toute la droite réelle. Nous avons que $T'(t) = 0$ pour $t_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0.41421$ et $t_2 = -1 - \sqrt{2}$. Puisque $t_2 < -1$, le point t_1 est le seul point critique dans l'intervalle $[-1, 1]$. Nous avons que $T''(t) = 0$ pour $s_1 = -2 + \sqrt{3} \approx -0.267949$ et $s_2 = -2 - \sqrt{3}$. Puisque $s_2 < -1$, le point s_1 est le seul point dans l'intervalle $[-1, 1]$ où $T''(s_1) = 0$. C'est un candidat pour être un point d'inflexion.

Nous résumons l'information que nous avons obtenues dans le tableau suivant.

t	-1	$-1 < t < s_1$	s_1	$s_1 < t < t_1$	t_1	$t_1 < t < 1$	1
$T(t)$	0	+	$(1 - s_1^2)e^{s_1}$	+	$(1 - t_1^2)e^{t_1}$	+	0
$T'(t)$	+	+	+	+	0	+	+
$T''(t)$	+	+	0	-	-	-	-
		croît et convexe	croît et point d'inflexion	croît et concave	max. local et concave	décroît et concave	

Le graphe de T est ci-dessous.



h) Puisque $G(x) = \sqrt{x} e^{-x} = x^{1/2} e^{-x}$, nous obtenons

$$G'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} e^{-x} - x^{1/2} e^{-x} = \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} - x^{1/2} \right) e^{-x} = \left(\frac{1}{2} - x \right) x^{-1/2} e^{-x}$$

et

$$G''(x) = \left(-\frac{1}{4} x^{-3/2} - \frac{1}{2} x^{-1/2} \right) e^{-x} - \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} - x^{1/2} \right) e^{-x} = \frac{1}{4} (-1 - 4x + 4x^2) x^{-3/2} e^{-x} .$$

La fonction G est définie sur l'intervalle $[0, \infty[$ alors que les fonctions G' et G'' sont définies sur $]0, \infty[$. Nous allons tracer le graphe de G pour $x \geq 0$.

Nous avons que $G(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

$G'(x) = 0$ pour $x = 1/2$ et G' n'est pas définie à l'origine. Le seul point critique est $x = 1/2$. De plus, $G''(x) = 0$ pour $x = x_1 = (1 + \sqrt{2})/2 \approx 1.20711$ (la racine positive du polynôme $4x^2 - 4x - 1$). C'est un candidat pour être un point d'inflexion.

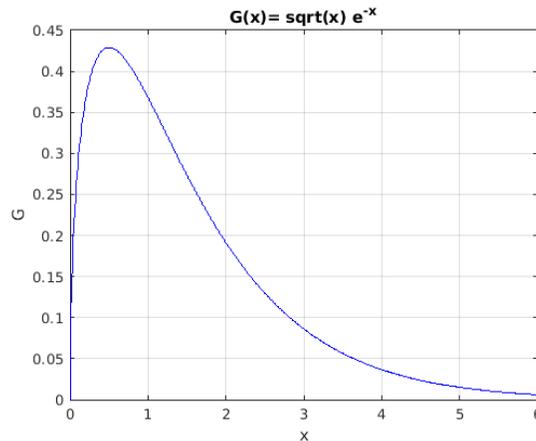
À l'aide de suites de nombres, nous pouvons vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} e^{-x} = 0 .$$

Nous résumons l'information que nous avons obtenues dans le tableau suivant.

x	0	$0 < x < 1/2$	$1/2$	$1/2 < x < x_1$	x_1	$x_1 < x$	$+\infty$
$G(x)$	0	+	$e^{-1/2}/\sqrt{2}$	+	$\sqrt{x_1} e^{-x_1}$	+	0
$G'(x)$	N.D.	+	0	-	-	-	
$G''(x)$	N.D.	-	-	-	0	+	
		croît et concave	max. local et concave	décroît et concave	décroît et point d'inflexion	décroît et convexe	

Le graphe de G est ci-dessous.



i) Nous avons $f'(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$ et $f''(x) = \frac{6x(1-2x^3)}{(1+x^3)^3}$.

La fonction f est définie sur toute la droite réelle sauf à -1 . $f(x) > 0$ pour $x > 0$ et $x < -1$, $f(x) < 0$ pour $-1 < x < 0$ et $f(x) = 0$ seulement pour $x = 0$.

La fonction f' est aussi définie sur toute la droite réelle sauf à -1 . $f'(x) = 0$ à $x = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout x différent de -1 et 0 .

La fonction f'' est définie sur toute la droite réelle sauf à -1 . $f''(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 2^{-1/3}$. $f''(x) > 0$ pour $x < -1$ et $0 < x < 2^{-1/3}$. $f''(x) < 0$ pour $-1 < x < 0$ et $x > 2^{-1/3}$.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(1/x^3) + 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1/x^3) + 1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty.$$

Nous ne pouvons pas utiliser la Règle de l'Hospital pour évaluer les limites $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$. Pourquoi ?

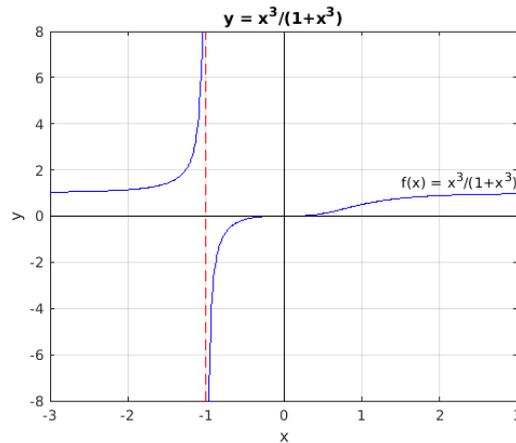
Nous résumons l'information que nous avons obtenues dans le tableau suivant.

x	$-\infty$	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0
$f(x)$	1	+	N.D.	-	0
$f'(x)$		+	N.D.	+	0
$f''(x)$		+	N.D.	-	0
	asymptote horizontale	croît et convexe	asymptote verticale	croît et concave	point critique et d'inflexion

...

	$0 < x < 2^{-1/3}$	$2^{-1/3}$	$2^{-1/3} < x$	$+\infty$
	+	$1/3$	+	1
...	+	+	+	
	+	0	-	
	croît et convexe	point d'inflexion	croît et concave	asymptote horizontale

Le graphe de f est ci-dessous.



j) Le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^3} = 0.$$

L'axe des x est une asymptote horizontale lorsque $x \rightarrow \infty$ et $x \rightarrow -\infty$. De plus, à l'aide d'un tableau de valeurs, nous pouvons vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x-3}{x^3} \right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x-3}{x^3} \right) = +\infty.$$

La partie positive de la droite $x = 0$ est donc une asymptote verticale lorsque x converge vers 0 par la gauche et la partie négative de la droite $x = 0$ est une asymptote verticale lorsque x converge vers 0 par la droite.

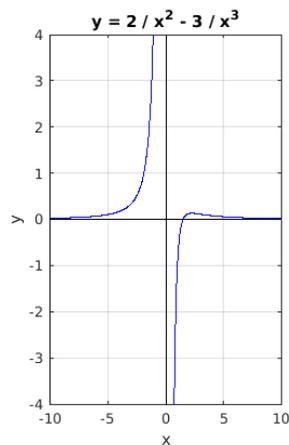
Nous avons que $f(x) = \frac{2x-3}{x^3} = 0$ pour $x = 3/2$. Il découle de

$$f'(x) = -4x^{-3} + 9x^{-4} = -\frac{4x-9}{x^4} \quad \text{et} \quad f''(x) = 12x^{-4} - 36x^{-5} = 12 \left(\frac{x-3}{x^5} \right)$$

que le point $x = 9/4$ où $f'(x) = 0$ est le seul point critique pour f et le point $x = 3$ où $f''(x) = 0$ est le seul point critique pour f' . Ce dernier point est possiblement un point d'inflexion.

Nous résumons dans les tableaux suivants l'information que nous avons pu déduire de f , f' et f'' .

x	$-\infty$	$x < 0$	0	$0 < x < 3/2$	$3/2$	$3/2 < x < 9/4$...
$f(x)$	0	$+$	N.D.	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	N.D.	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	N.D.	$-$	$-$	$-$	
	asymptote horizontale	croît et convexe	asymptote verticale	croît et concave			
...							
	$9/4$	$9/4 < x < 3$	3	$3 < x < \infty$	∞		
	$+$	$+$	$+$	$+$	0		
	0	$-$	$-$	$-$			
	$-$	$-$	0	$+$			
	max. local et concave	décroît et concave	point d'inflexion	décroît et convexe	asymptote horizontale		



k) Le domaine de la fonction est \mathbb{R} au complet. Nous avons que $f(x) = 0$ seulement à $x = -4$ et $f(0) = 4$.

Il découle de

$$f'(x) = e^{-x} - (x+4)e^{-x} = -(x+3)e^{-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -e^{-x} + (x+3)e^{-x} = (x+2)e^{-x}$$

que la fonction f a un seul point critique à $x = -3$ et la fonction f' a un seul point critique à $x = -2$. Ce dernier point est un candidat possible pour un point d'inflexion.

Grâce à la Règle de l'Hospital, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{x+4}{e^x}}_{\text{type } \infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+4)e^{-x} = -\infty$$

La partie positive de l'axe des y est donc une asymptote verticale lorsque x converge vers 0 par la droite et la partie négative de l'axe des y est une asymptote verticale lorsque x converge vers 0 par la gauche.

Nous avons que $f(x) = \frac{2(x^2 - 3)}{x^3} = 0$ à $x = \pm\sqrt{3}$. Il découle de

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^4} = -\frac{2(x^2 - 9)}{x^4} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{72}{x^5} = \frac{4(x^2 - 18)}{x^5}$$

que les points $x = \pm 3$ où $f'(x) = 0$ sont les seuls points critiques de f et les points $x = \pm 3\sqrt{2}$ où $f''(x) = 0$ sont les seuls points critiques de f' . C'est deux derniers points sont possiblement des points d'inflexion.

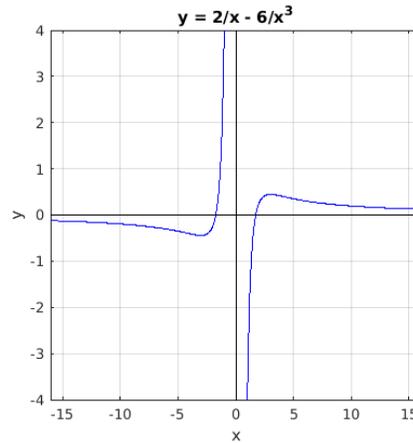
Nous résumons dans les tableaux suivants l'information que nous avons pu déduire de f , f' et f'' . Notons que la fonction f est impaire $f(-x) = -f(x)$. Il suffit donc de tracer le graphe de $f(x)$ pour $x > 0$. Le graphe de $f(x)$ pour $x < 0$ est la réflexion par rapport à l'origine du graphe de $f(x)$ pour $x > 0$.

	x	$-\infty$	$x < -3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2} < x < -3$	-3		
	$f(x)$	0	-	0	-	-		
	$f'(x)$		-	-	-	0		
	$f''(x)$		-	0	+	+		...
		asymptote horizontale	décroît et concave	point d'inflexion	décroît et convexe	min. local et convexe		

	$-3 < x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x < 0$	0	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x < 3$	
	-	0	+	N.D.	-	0	+	
	+	+	+	N.D.	+	+	+	
...	+	+	+	N.D.	-	-	-	...
	croît et convexe			asymptote verticale	croît et concave			

	3	$3 < x < 3\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2} < x$	$+\infty$
	+	+	+	+	0
	0	-	-	-	
...	-	-	0	+	
	max. local et concave	décroît et concave	point d'inflexion	décroît et convexe	asymptote horizontale

Le graphe de la fonction est donné ci-dessous.



m) Le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. À l'aide de la Règle de l'Hospital, nous avons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{e^x}{x-1}}_{\text{type } \infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = +\infty .$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \right) = 0 \times 0 = 0 .$$

L'axe des x est une asymptote horizontale lorsque $x \rightarrow -\infty$.

À l'aide d'un tableau de valeurs, nous pouvons vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty .$$

La partie positive de la droite $x = 1$ est donc une asymptote verticale lorsque x converge vers 1 par la droite et la partie négative de la droite $x = 1$ est une asymptote verticale lorsque x converge vers 0 par la gauche.

Nous avons que $f(x) = \frac{e^x}{x-1} \neq 0$ pour tout x . Il découle de

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

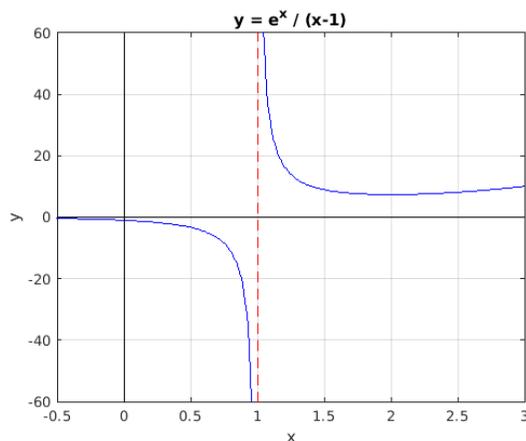
et

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^x + (x-2)e^x)(x-1)^2 - 2(x-2)(x-1)e^x}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)^3 e^x - 2(x-2)(x-1)e^x}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^2 e^x - 2(x-2)e^x}{(x-1)^3} = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

que $x = 2$ est le seul point critique pour f et que f' a aucun point critique.

Nous résumons dans le tableau suivant l'information que nous avons pu déduire de f , f' et f'' .

x	$-\infty$	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x$	$+\infty$
$f(x)$	0	–	N.D.	+	+	+	$+\infty$
$f'(x)$		–	N.D.	–	0	+	
$f''(x)$		–	N.D.	+	+	+	
	asymptote horizontale	décroît et concave	asymptote verticale	décroît et convexe	min. local et convexe	croît et convexe	



n) Le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2}{1 + 1/x^3} = 0$$

car $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^r = 0$ pour $r > 0$, nous avons que l'axe des x est une asymptote horizontale pour $x > 0$. De même, nous avons que l'axe des x est aussi une asymptote horizontale pour $x < 0$.

De plus, à l'aide de suites numériques, nous pouvons voir que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^3 + 1} = +\infty$ car x approche -1 et $x^3 + 1 < 0$ approche 0 lorsque $x \rightarrow -1^-$. De même, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^3 + 1} = -\infty$ car x approche -1 et $x^3 + 1 > 0$ approche 0 lorsque $x \rightarrow -1^+$. La droite $x = 1$ est donc une asymptote verticale.

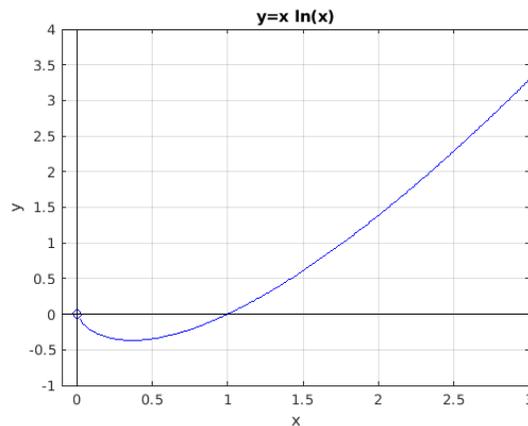
Il découle de $f'(x) = \frac{-2x^3 + 1}{(x^3 + 1)^2}$ et $f''(x) = \frac{6x^2(x^3 - 2)}{(x^3 + 1)^3}$ que $x = 2^{-1/3}$ est le seul point critique pour f et que $x = 0$ et $x = 2^{1/3}$ sont les seuls points critiques pour f' . C'est deux derniers points sont des candidats possibles pour être des points d'inflexion.

Nous résumons dans le tableau suivant l'information que nous avons pu déduire de f , f'

Nous résumons dans le tableau suivante l'information que nous avons pu obtenir de f' et f'' .

x	0	$x < 1/e$	$1/e$	$1/e < x < 1$	1	$1 < x$	$+\infty$
$f(x)$	0	-	-	-	0	+	∞
$f'(x)$		-	0	+	+	+	
$f''(x)$		+	+	+	+	+	
		décroît et convexe	min local. et convexe	croît et convexe			

Le graphe de f est donné ci-dessous.



Le point $(0,0)$ ne fait pas parti du graphe de f .

Question 5.22

a) Puisque $f(x) = \sin^2(x) - 2 \cos(x)$ est une fonction de période 2π , il suffit d'étudier la fonction entre 0 et 2π .

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) + 2 \sin(x) = 2 \sin(x)(\cos(x) + 1)$$

et

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x) + 2 \cos(x) = 2 \cos^2(x) - 2(1 - \cos^2(x)) + 2 \cos(x) \\ &= 4 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - 2. \end{aligned}$$

Nous avons que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -1 \Rightarrow x = 0, \pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}.$$

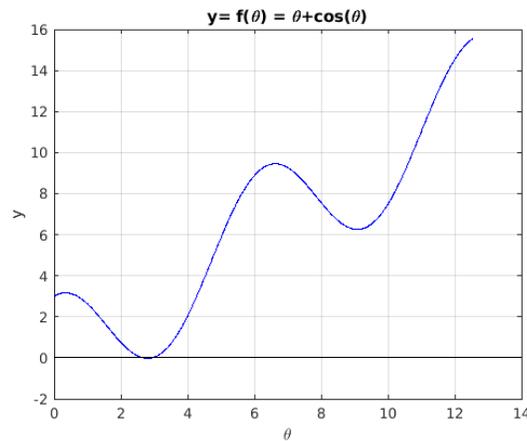
Il y a trois points critiques dans l'intervalle $[0, 2\pi[$: 0 , π et $3\pi/2$. Nous avons que $f'(x) > 0$ pour $0 < x < \pi$ et $f'(x) < 0$ pour $\pi < x < 3\pi/2$ et $3\pi/2 < x < 2\pi$. Donc f a un maximum local à $x = \pi$ et un minimum local à $x = 2\pi$, alors que $x = 3\pi/2$ n'est ni un maximum ou un minimum local.

Les points critiques de f' sont les solutions de $z = \cos(x)$ pour x dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ où z est une racine de $2z^2 + z - 1$. Les racines de ce polynôme sont $z = -1$ ou $1/2$. Ainsi,

	$\frac{5\pi}{2} < \theta < \theta_4$	θ_4	$\theta_4 < \theta < \frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2} < \theta < 4\pi$	4π
	+	+	+	+	+	+
	-	0	+	+	+	+
...	+	+	+	0	-	-
	décroît et convexe	min. local et convexe	croît et convexe	croît et point d'inflexion	croît et concave	

La fonction f change de signe dans les intervalles où nous retrouvons un des symboles $+|-$ ou $-|+$. Comme f est continue, il existe un point dans un tel intervalle où la fonction f est nulle.

Le graphe de f est



c) Nous avons $h'(t) = (\cos(t) - \sin(t))e^{-t}$ et $h''(t) = -2\cos(t)e^{-t}$. La fonction h et ses dérivées sont définies sur toute la droite réelle.

Les valeurs de $t \in [0, 4\pi]$ pour lesquelles $h(t) = 0$ sont les valeurs de t telles que $\sin(t) = 0$; c'est-à-dire, $n\pi$ pour $n = 0, 1, 2, 3$ et 4 .

Les valeurs de $t \in [0, 4\pi]$ pour lesquelles $h'(t) = 0$ sont les valeurs de t telles que $\tan(t) = 1$ puisque $\cos(t) - \sin(t) \neq 0$ pour $t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ et $7\pi/2$. Les points critiques de h sur l'intervalle $[0, 4\pi]$ sont donc $\pi/4, 5\pi/4, 9\pi/4$ et $13\pi/4$. Les valeurs de $t \in [0, 4\pi]$ pour lesquelles $h''(t) = 0$ sont $(2n+1)\pi/2$ pour $n = 0, 1, 2$ et 3 . Ce sont donc nos candidats pour être des points d'inflexion.

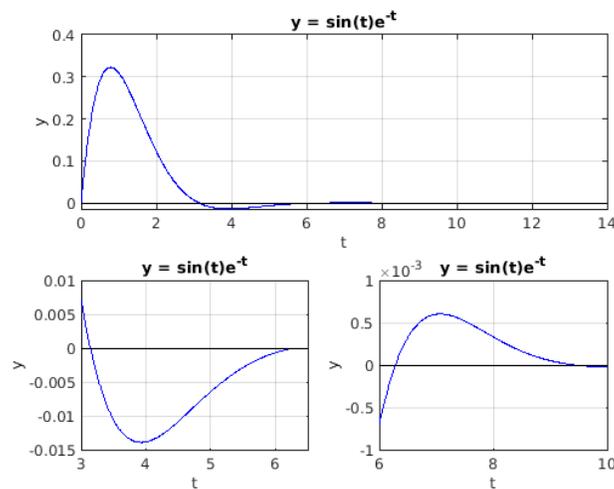
Nous résumons l'information que nous venons de déduire dans le tableau suivant.

t	0	$0 < t < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < t < \pi$	π	
$h(t)$	0	+	+	+	+	+	0	
$h'(t)$	1	+	0	-	-	-	-	
$h''(t)$	-2	-	-	-	0	+	+	...
		croît et concave	max. local et concave	décroît et concave	décroît et point d'inflexion	décroît et concave		

	$\pi < t < \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	2π	
...	-	-	-	-	-	0	...
	-	0	+	+	+	+	
	+	+	+	0	-	-	
	décroît et convexe	min. local convexe	croît et convexe	croît et point d'inflexion	croît et concave		
	$2\pi < t < \frac{9\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2} < t < 3\pi$	3π	
...	+	+	+	+	+	0	...
	+	0	-	-	-	-	
	-	-	-	0	+	+	
	croît et concave	max. local concave	décroît et concave	décroît et point d'inflexion	décroît convexe		
	$3\pi < t < \frac{13\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4} < t < \frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2} < t < 4\pi$	4π	
...	-	-	-	-	-	0	...
	-	0	+	+	+	+	
	+	+	+	0	-	-	
	décroît et convexe	min. local convexe	croît et convexe	croît et point d'inflexion	croît concave	concave	

La fonction f change de signe dans les intervalles où nous retrouvons un des symboles $+|-$ ou $-|+$. Comme f est continue, il existe un point dans un tel intervalle où la fonction f est nulle.

Le graphe de f est donné ci-dessous. Puisque e^{-t} tend très rapidement vers 0 lorsque t tend vers plus l'infini, nous avons aussi tracé le graphe de f sur des intervalles de plus en plus éloigné de l'origine. Portez attention à l'amplitude de f dans chacun des graphes ci-dessous.



18.5.3 Optimisation

Question 5.24

x (nombre d'oeufs pondus)	5	10	20
$S(x) = xP(x)$ (nombre de poussins qui survivent)	$0.\overline{370}$	0.196...	0.0995...

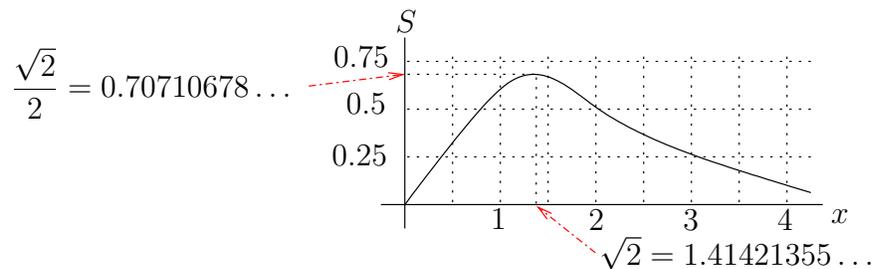
Nous avons $S(x) = \frac{x}{1+0.5x^2}$ et $S'(x) = \frac{1-0.5x^2}{(1+0.5x^2)^2}$. La seule solution de $S'(x) = 0$ est $x = \sqrt{2}$. En fait, $S(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Le seul point critique (positif) de S est $x = \sqrt{2}$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+0.5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/x)}{(1/x^2)+0.5} = \frac{(\lim_{x \rightarrow \infty}(1/x))}{(\lim_{x \rightarrow \infty}(1/x^2))+0.5} = \frac{0}{0+0.5} = 0.$$

Nous obtenons le tableau suivant.

x	0	$0 < x < \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} < x$	∞
$S(x)$	0	+	$\sqrt{2}/2$	+	0
$S'(x)$	+	+	0	-	
	croît	croît	max. loc.	décroît	

Le graphe de S a l'allure suivante.



La meilleure stratégie est de pondre $\sqrt{2}$ oeufs en moyenne car cela donne la valeur maximale de S .

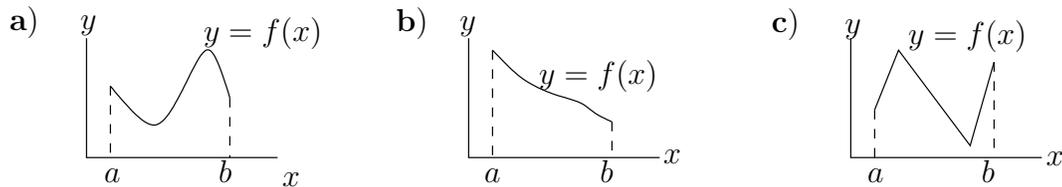
Question 5.25

Le nombre N de pommiers vendus est une fonction linéaire du prix x de vente d'un pommier. Nous avons $N(50) = 100$, $N(49) = 104$ et $N(51) = 96$. C'est plus d'information que nécessaire pour trouver l'équation de la droite représentant le graphe de $N(x)$. Donc $N(x) = mx + b$ où $m = \frac{104 - 100}{49 - 50} = -4$ et $b = 300$ (pour avoir $N(50) = 100$).

Ainsi, le revenu est donné par la formule $R(x) = xN(x) = -4x^2 + 300x$ où x est le prix de vente d'un pommier. Le coût de production pour les $N(x)$ pommiers vendus est $C(x) = 9N(x) = -36x + 2700$. Le profit est donc donné par $P(x) = R(x) - C(x) = -4x^2 + 336x - 2700$.

Il y a un seul point critique qui est donné par $P'(x) = -8x + 336 = -8(x - 42) = 0$. Donc $x = 42$. Puisque $P''(x) = -8 < 0$, la fonction est concave pour tout x . Ce n'est pas surprenant car $P(x)$ est un polynôme de degré 2 avec le coefficient de x^2 négatif. Donc $P(x)$ a un maximum absolu lorsque le jardinier vent ses pommiers à \$42.00 l'unité.

Question 5.26



La fonction en (b) est strictement décroissante.

Question 5.27

a) Puisque f est une belle fonction continue sur un intervalle fermé et borné, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes.

Le seul point critique de f , lorsque $f'(x) = (1-x)e^{-x} = 0$, est $x = 1$. C'est un point dans l'intervalle $[0.5, 2]$. Nous devons donc le considérer.

Nous comparons les valeurs de $f(x)$ au points $x = 0.5$, $x = 1$ et $x = 2$. Puisque $f(0.5) = 2.303265330$, $f(1) = 2.367879441$ et $f(2) = 2.270670566$, le maximum absolue est 2.367879441 et le minimum absolue est 2.270670566.

b) Comme f est une fonction continue sur l'intervalle borné et fermé $[-2, 2]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu et le minimum absolu de f sur $[-2, 2]$.

Les points critiques de f , lorsque $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0$, sont $x = \pm 1$. Ces points critiques sont bien dans l'intervalle $[-2, 2]$. Nous avons $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$ et $f(2) = 2$. Ainsi, le maximum absolu est 2 que f atteint à $x = -1$ et $x = 2$. Le minimum absolu est -2 que f atteint à $x = -1$ et $x = 2$.

c) Comme f est une fonction continue sur l'intervalle borné et fermé $[-2, 0]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu et le minimum absolu de f sur $[-2, 0]$.

Les points critiques de f , lorsque $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} = 0$, sont $x = \pm 1$. Le point 1 n'est pas dans l'intervalle $[-2, 0]$, Nous considérons seulement $x = -1$. Nous avons $f(-2) = -2/3$, $f(-1) = -1$ et $f(0) = 0$. Ainsi, le maximum absolu est $f(0) = 0$. Le minimum absolu est $f(-1) = -1$. C'est aussi un minimum local.

d) Puisque f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes pour conclure qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $d \in [0, 1]$ tel que $f(d) \leq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. $f(c)$ est le maximum absolu de f sur l'intervalle $[0, 1]$ et $f(d)$ est le minimum absolu.

Nous avons $f'(x) = 15x^2 - 30x + 10$. Les points critiques de f sont $x = 1 \pm 1/\sqrt{3}$. Le point $1 + 1/\sqrt{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[0, 1]$, Par contre $1 - 1/\sqrt{3} \approx 0.42265$ est dans l'intervalle $[0, 1]$. Nous avons $f(0) = -1$, $f(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.9245$ et $f(1) = -1$. Ainsi, le maximum absolu est $f(1 - 1/\sqrt{3})$. Le minimum absolu est $f(0) = f(1) = -1$.

e) Puisque f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes. Il découle de

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} x^{-1/2}(x-4)^2 + 2x^{1/2}(x-4) = \frac{1}{2} x^{-1/2}(x-4)((x-4) + 4x) \\ &= \frac{1}{2} x^{-1/2}(x-4)(5x-4) . \end{aligned}$$

que les points critiques de f sur l'intervalle $[0, 6]$ sont $4/5$ et 4 .

Puisque $f(0.5) = 8.662\dots$, $f(0.8) = 9.1589\dots$, $f(4) = 0$ et $f(6) = 9.7979\dots$, le maximum global est 9.7979 et le minimum global est 0 .

Question 5.30

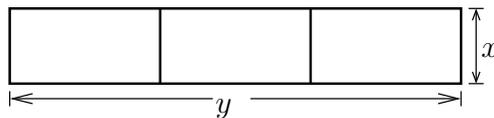
Il faut minimiser la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ lorsque $y = 4x + 7$. Comme le point (x, y) où $\sqrt{x^2 + y^2}$ atteint son minimum est aussi le point où $x^2 + y^2$ atteint son minimum (car la racine carrée est une fonction strictement croissante), nous allons minimiser $D(x) = x^2 + y^2$ lorsque $y = 4x + 7$. Donc $D(x) = x^2 + (4x + 7)^2 = 17x^2 + 56x + 49$, $D'(x) = 34x + 56$ et $D''(x) = 34$. Nous avons un seul point critique lorsque $x = -28/17$. Puisque $D''(x) > 0$ pour tout x , la fonction est convexe pour tout x et le point critique est un minimum absolu.

La distance minimum est donc atteinte au point

$$(x, y) = (-28/17, 4(-28/17) + 7) = (-28/17, 7/17) .$$

La distance minimal est $\sqrt{(-28/17)^2 + (7/17)^2} = 7/\sqrt{17}$.

Question 5.32



L'aire A de l'enclos est donné par $A = xy$. Nous avons la contrainte que $4x + 2y = 3600$. Donc $y = 1800 - 2x$ avec $0 \leq x \leq 900$ car x et y doivent être non négatifs.

Ainsi, $A(x) = x(1800 - 2x) = 1800x - 2x^2$. Puisque A est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0, 900]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes. Le seul point critique est donné par $A'(x) = 1800 - 4x = 0$. Donc $x = 450$.

Puisque $A(0) = A(900) = 0$ et $A(450) = 405\,000 \text{ m}^2$. L'aire maximale est $405\,000 \text{ m}^2$ lorsque $x = 450 \text{ m}$ et $y = 900 \text{ m}$, et chaque section est d'aire $135\,000 \text{ m}^2$.

Question 5.36

Soit $f(q) = \frac{q}{P(q)} = \frac{q}{1 + q^2}$. Nous avons $q \geq 0$. Nous ne pouvons pas utiliser le théorème des

valeurs extrême car l'intervalle n'est pas borné. Nous devons donc étudier le graphe de f sur l'intervalle $[0, \infty[$.

Nous avons $f'(q) = \frac{1 - q^2}{(1 + q^2)^2}$. La fonction f a un seul point critique positif, c'est $q = 1$. De plus, $\lim_{q \rightarrow \infty} f(q) = 0$. Nous obtenons le tableau suivant.

q	0	$0 < q < 1$	1	$1 < q$	∞
$f(q)$	0	+	1/2	+	0
$f'(q)$	+	+	0	-	
	croît	croît	max. local	décroît	

Puisqu'il n'y a pas de points critiques autres que 1, le maximum local est aussi le maximum absolu (tracez le graphe de f pour vous en convaincre).

Question 5.37

Si un cylindre a une hauteur de H unités et un rayon de R unités, l'aire de sa surface est la somme de l'aire du dessus, l'aire du dessous et l'aire du côté circulaire du cylindre. C'est-à-dire, $S(H) = 2\pi R^2 + 2\pi RH$ où $0 \leq H \leq 2r$ car le cylindre est à l'intérieur de la sphère de rayon r .

Or, si nous regardons une coupe transversal de la sphère passant par l'axe du cylindre, nous voyons (encore et toujours par le théorème de Pythagore) que $(H/2)^2 + R^2 = r^2$ où, si vous préférez, $R^2 = r^2 - (H/2)^2$. Donc

$$\begin{aligned} S(H) &= 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi \left(r^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right) + 2\pi H \sqrt{r^2 - \left(\frac{H}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\pi(4r^2 - H^2) + \pi H \sqrt{4r^2 - H^2} . \end{aligned}$$

Il faut trouver la valeur de H dans l'intervalle fermé $0 \leq H \leq 2r$ où $S(H)$ est maximal. Les points critiques de $S(H)$ sont donnés par

$$S'(H) = -\pi H - \frac{\pi H^2}{\sqrt{4r^2 - H^2}} + \pi \sqrt{4r^2 - H^2} = -\pi H + \frac{\pi(4r^2 - 2H^2)}{\sqrt{4r^2 - H^2}} = 0 .$$

Donc

$$\begin{aligned} \pi H &= \frac{\pi(4r^2 - 2H^2)}{\sqrt{4r^2 - H^2}} \Rightarrow H^2 = \frac{(4r^2 - 2H^2)^2}{4r^2 - H^2} \Rightarrow (4r^2 - H^2)H^2 = (4r^2 - 2H^2)^2 \\ &\Rightarrow 0 = 5(H^2)^2 - 20r^2(H^2) + 16r^4 . \end{aligned}$$

C'est une équation quadratique en H^2 . Les racines sont

$$H^2 = \frac{20r^2 \pm \sqrt{(-20r^2)^2 - 4 \times 5 \times 16r^4}}{10} = \left(2 \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \right) r^2 .$$

Nous trouvons deux points critiques : $H_1 = r \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = 1.7013 \dots r$ et $H_2 = r \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}} = 1.05146 \dots r$.

Puisque $S(0) = 2\pi r^2$, $S(H_1) \approx 7.35648r^2$, $S(H_2) \approx 10.16640r^2$ et $S(2r) = 0$, la surface maximal est de $10.16640 \dots r^2$ lorsque la hauteur du cylindre est de $r\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$ unités.

Question 5.38

L'illumination totale sur l'objet au point x est

$$I(x) = \frac{kP}{x^2} + \frac{3kP}{(3-x)^2}$$

où k est la constance de proportionnalité. Les points critiques sont donnés par

$$I'(x) = 2kP \left(\frac{-1}{x^3} + \frac{3}{(3-x)^3} \right) = 0.$$

Donc $\frac{1}{x^3} = \frac{3}{(3-x)^3}$. Si nous prenons la racine cubique des deux côtés de l'égalité, nous trouvons $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt[3]{3}}{(3-x)}$ et ainsi $x = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{3}}$.

Grâce aux données du tableau suivant, nous pouvons conclure que I atteint un maximum absolu à $x = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{3}}$.

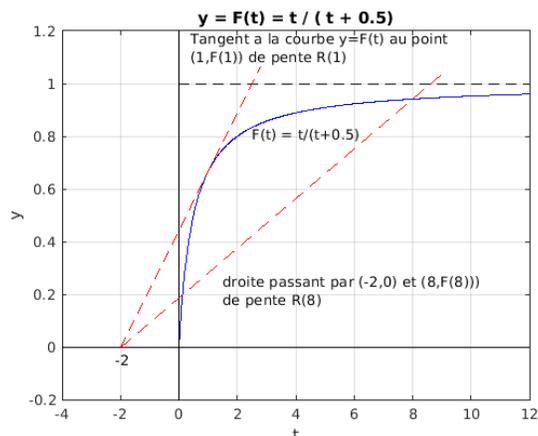
x	$x < \frac{3}{1 + \sqrt[3]{3}}$	$x = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{3}}$	$\frac{3}{1 + \sqrt[3]{3}} < x < 3$
$I'(x)$	-	0	+

L'illumination maximale est lorsque $x = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{3}} = 1.228375690$ et la valeur de l'illumination

est $I\left(\frac{3}{1 + \sqrt[3]{3}}\right) = 1.618555576 kP$.

Question 5.39

Nous avons $F(t) = \frac{\beta t}{t + \alpha}$ avec $\beta = 1$ et $\alpha = 0.5$. De plus, nous avons montré dans le manuel que $T = \sqrt{\alpha\tau}$ où τ est le temps en minutes que prend une abeille pour se rendre d'une fleur à un autre fleur. Comme $T = 1$, nous obtenons $1 = \sqrt{0.5\tau}$ et donc $\tau = 2$ minutes.



Question 5.40

La quantité de nectar récoltée par une abeille après t minutes sur une même fleur est $F(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$. La vitesse moyenne à laquelle l'abeille aspire le nectar d'une fleur sur laquelle elle

demeure pendant t minutes est $R(t) = \frac{F(t)}{t+1}$. Puisque

$$R(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)(t+1)},$$

nous obtenons

$$R'(t) = \frac{-t(t^3 - t - 2)}{(1+t^2)^2(1+t)^2}.$$

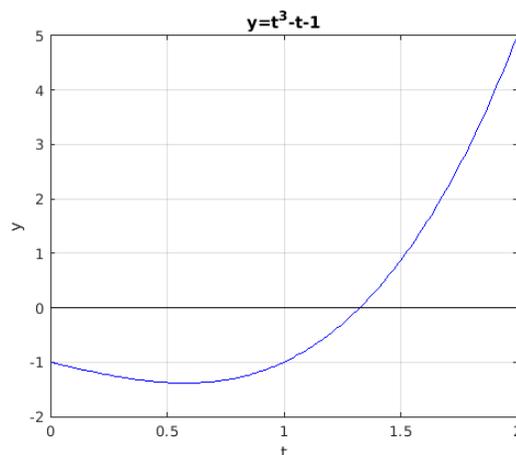
Les points critiques positifs de R sont les racines du polynôme $p(t) = t^3 - t - 2$. Comme nous n'avons pas de formule exacte pour trouver ces racines, il faut utiliser la méthode de Newton pour les estimer. Puisque $p(1) = -2 < 0$ et $p(2) = 4 > 0$, il y a une racine entre 1 et 2. Avec $t_0 = 1.5$, nous obtenons

n	t_n	$t_{n+1} \approx t_n - \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}$
0	1.5	1.5217391304
1	1.5217391304	1.5213798060
2	1.5213798060	1.5213797068
3	1.5213797068	1.5213797068

Un point critique de p est $T \approx 1.5213797068$. Ils n'existent pas d'autres racines positives de $p(t)$ et donc d'autres points critiques positifs de R car $p'(t) = 3t^2 - 1$ nous donne le tableau suivant.

t	0	$0 < t < 1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3} < t < T$	T	$T < t$	∞
$p(t)$	-1	-	-	-	0	+	$+\infty$
$p'(t)$	-	-	0	+	+	+	
		décroît	min. local	croît			

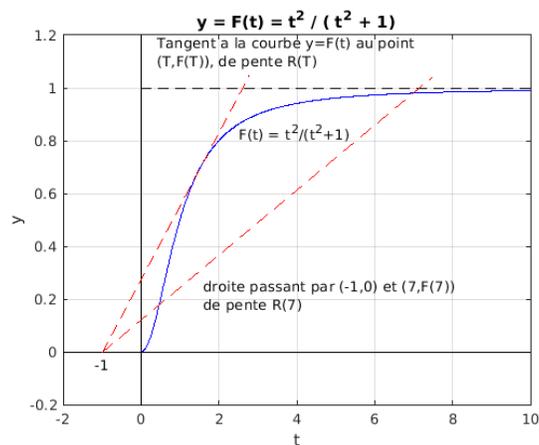
Nous obtenons le graphe de p qui suit.



Montrons que R a un maximum absolu à $t = T$. Nous avons le tableau suivant.

t	0	$0 < t < T$	T	$T < t < +\infty$	$+\infty$
$R(t)$	0	+	$T^2(1 + T^2)^{-1}(1 + T)^{-1}$	+	0
$R'(t)$	0	+	0	-	
	point critique	croît	max. local	décroît	asymptote horizontale

Donc $t = T$ est le temps optimal pour maximiser la récolte de nectar.

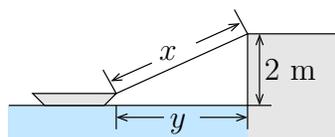


Comme il est prédit par la règle des valeurs marginales, nous avons que $R(T) = F'(T)$.

18.5.4 Taux liées

Question 5.41

La question peut se résumer en une figure.



D'après le théorème de Pythagore, nous avons $y^2 + 2^2 = x^2$ où x et y sont des fonctions de t . Si nous dérivons cette dernière équation par rapport à t , nous obtenons

$$2y \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} .$$

Ainsi,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \frac{dx}{dt} .$$

Au temps $t = \tau$ où $y(\tau) = 6$ m, nous avons $x(\tau) = \sqrt{y^2(\tau) + 2^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ m. Puisque $\frac{dx}{dt}(t) = 0.5$ m/s pour tout t , nous avons

$$\frac{dy}{dt}(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)} \frac{dx}{dt}(\tau) = \frac{2\sqrt{10}}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10}}{6} \approx 0.527 \text{ m/s} .$$

La vitesse d'approche du bateau n'est pas constante car

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\sqrt{y^2(t) + 2^2}}{y(t)}$$

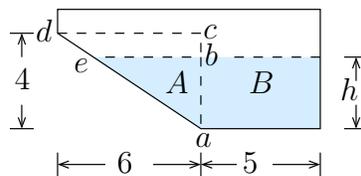
n'est pas constant. Par exemple, lorsque $y(\tau) = 10$ m, nous obtenons $x(\tau) = \sqrt{y^2(\tau) + 2^2} = \sqrt{10^2 + 2^2} = 2\sqrt{26}$ m et

$$\frac{dy}{dt}(\tau) = \frac{x(\tau)}{y(\tau)} \frac{dx}{dt}(\tau) = \frac{2\sqrt{26}}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{26}}{10} \approx 0.5099 \text{ m/s} .$$

Question 5.42

Il faut trouver une relation entre le volume d'eau dans la piscine et la profondeur h de l'eau à l'endroit le plus profond.

Considérons une section transversale de la piscine.



Pour déterminer la longueur du segment \overline{eb} , comparons les triangles semblables $\triangle abe$ et $\triangle acd$. Nous avons $\frac{|\overline{eb}|}{|\overline{ab}|} = \frac{|\overline{dc}|}{|\overline{ac}|}$; c'est-à-dire, $\frac{|\overline{eb}|}{h} = \frac{6}{4}$. Donc $|\overline{eb}| = 3h/2$.

Le volume d'eau dans la piscine est alors donnée par la formule

$$V = \underbrace{\frac{(3h/2) \times h \times 10}{2}}_{\text{(aire du triangle A)} \times 10} + \underbrace{h \times 5 \times 10}_{\text{(aire du rectangle B)} \times 10} = \frac{15h^2}{2} + 50h$$

lorsque $h < 4$ m. Donc

$$\frac{dV}{dt}(t) = 15h(t) \frac{dh}{dt}(t) + 50 \frac{dh}{dt}(t) = 5(3h(t) + 10) \frac{dh}{dt}(t) .$$

Au temps $t = \tau$ où $h(\tau) = 3$ m, nous avons

$$0.1 = 5(3 \times 3 + 10) \frac{dh}{dt}(\tau)$$

puisque $\frac{dV}{dt}(t) = 0.1 \text{ m}^3/\text{min}$ pour tout t . Ainsi, $\frac{dh}{dt}(\tau) \approx 0.00105 \text{ m}/\text{min}$.

Question 5.43

5 révolutions par minute se traduit par $\frac{d\theta}{dt}(t) = 10\pi \text{ radians}/\text{min}$ pour tout t .

Si nous dérivons la relation $\tan(\theta) = \frac{x}{4}$, nous obtenons

$$\sec^2(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt}(t) = \frac{1}{4} \frac{dx}{dt}(t) .$$

Donc

$$\frac{dx}{dt}(t) = 4 \sec^2(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt}(t) = 4 \left(\frac{\sqrt{x^2(t) + 4^2}}{4} \right)^2 \frac{d\theta}{dt}(t) .$$

Au temps $t = \tau$ lorsque $x(\tau) = 1$, nous avons

$$\frac{dx}{dt}(\tau) = 4 \left(\frac{\sqrt{x^2(\tau) + 4^2}}{4} \right)^2 \frac{d\theta}{dt}(\tau) = 4 \left(\frac{\sqrt{1 + 4^2}}{4} \right)^2 (10\pi) = \frac{85\pi}{2} \approx 133.518 \text{ km}/\text{min} .$$

18.5.5 Dérivées implicites

Question 5.44

Si nous dérivons des deux côtés de l'égalité par rapport à x , nous obtenons

$$4(f(x))^3 f'(x) + 6f'(x) = 2x$$

Pour $x = 3$, nous obtenons

$$4(f(3))^3 f'(3) + 6f'(3) = 2 \Rightarrow f'(3)(4 \times 1^3 + 6) = 2 \Rightarrow f'(3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} .$$

Question 5.45

a) $y' = \frac{3 - 2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$

b) $y' = \frac{4xy\sqrt{xy} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$

c) $y' = \frac{1 - y^4 - 2xy}{4xy^3 + x^2 - 3}$

18.5.6 Approximation locale des fonctions

Question 5.46

a) Considérons $f(x) = x^{2001}$. Nous cherchons à estimer $f(1.002)$. L'approximation linéaire de f au voisinage de $x = 1$ est $p(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + 2001(x - 1)$. Ainsi,

$$f(1.002) \approx p(1.002) = 2001(1.002 - 1) + 1 = 5.002 .$$

Ce n'est pas une bonne approximation car $1.002^{2001} \approx 54.489244196998690$.

b) Considérons $f(x) = \sin(x)$. Nous cherchons à estimer $f(0.02)$. L'approximation linéaire de f au voisinage de l'origine est $p(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$. Ainsi,

$$f(0.02) \approx p(0.02) = 0.02 .$$

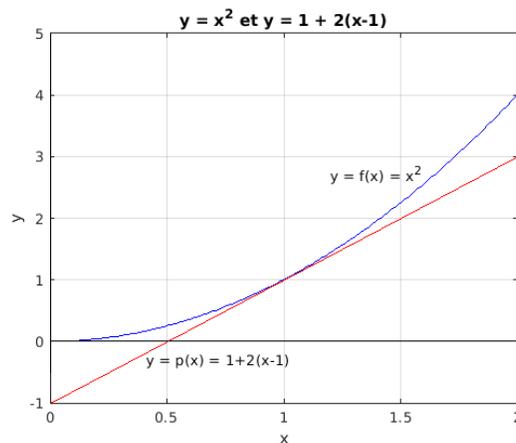
C'est une bonne approximation car $\sin(0.02) \approx 0.019998667$.

Question 5.47

Nous utilisons l'approximation linéaire de f au voisinage de $x = 1$.

$$f(x) \approx p(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + 2(x - 1) .$$

Ainsi $f(1.1) \approx 1 + 2(1.1 - 1) = 1.2$ et $f(0.9) \approx 1 + 2(0.9 - 1) = 0.8$.



Les approximations obtenues de l'approximation linéaire sous-estime les valeurs exactes de $f(0.9)$ et $f(1.1)$ car f est convexe. La droite tangente à la courbe $y = f(x)$ est donc en dessous de la courbe $y = f(x)$.

Question 5.50

a) L'approximation linéaire de $g(x) = \ln(x)$ au voisinage du point $x = 1$ est $p_1(x) = g(1) + g'(1)(x - 1)$. Or $g'(1) = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1$ et $g(1) = \ln(1) = 0$. Ainsi $p_1(x) = x - 1$.

b) L'approximation linéaire de $h(x) = x^2 - 1$ au voisinage du point $x = 1$ est $q_1(x) = h(1) + h'(1)(x - 1)$. Or $h'(1) = 2x \Big|_{x=1} = 2$ et $h(1) = 0$. Ainsi $q_1(x) = 2(x - 1)$.

c) Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-(1/x)}{2-(2/x)} = \frac{1-\lim_{x \rightarrow 1}(1/x)}{2-\lim_{x \rightarrow 1}(2/x)} = \frac{1}{2}.$$

De plus, grâce à la Règle de l'Hospital, nous obtenons

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}}_{\text{forme } 0/0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Les deux limites sont bien égales.

Question 5.51

L'approximation linéaire de f pour x près de $x = 1$ est

$$f(x) \approx p_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1).$$

Puisque $f'(x) = -3x^{-4}$, nous obtenons $f'(1) = -3$. Donc

$$f(x) \approx p_1(x) = 1 - 3(x-1) = -3x + 4$$

pour x près de 1 est l'approximation linéaire cherchée.

Nous cherchons un polynôme $p_2(x) = a + bx + cx^2$ tel que $p_2(1) = f(1)$, $p_2'(1) = f'(1)$ et $p_2''(1) = f''(1)$. Puisque $f(1) = 1$, $f'(1) = -3$ et $f''(1) = 12$, nous obtenons le système d'équations linéaires

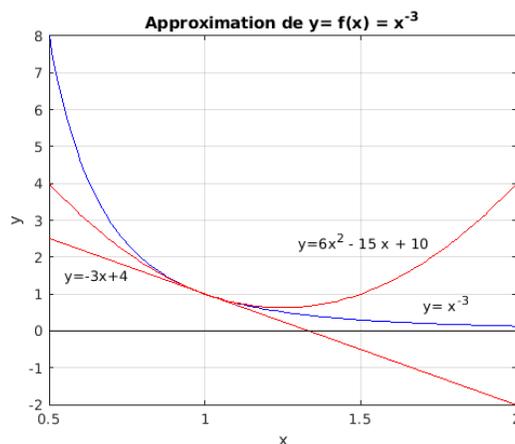
$$p_2(1) = f(1) \Rightarrow a + b + c = 1$$

$$p_2'(1) = f'(1) \Rightarrow b + 2c = -3$$

$$p_2''(1) = f''(1) \Rightarrow 2c = 12$$

La solution de ce système est $a = 10$, $b = -15$ et $c = 6$. Donc

$$p_2(x) = 10 - 15x + 6x^2.$$



Question 5.52

a) Considérons $f(x) = x^{2001}$. Nous cherchons à estimer $f(1.002)$. L'approximation quadratique de f pour x près de $x = 1$ est

$$\begin{aligned} p(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1 + 2001(x-1) + \frac{2001 \times 2000}{2}(x-1)^2 \\ &= 1 + 2001(x-1) + 2.001 \times 10^6(x-1)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(1.002) \approx p(1.002) = 1 + 2001(1.002 - 1) + 2.001 \times 10^6(1.002 - 1)^2 \approx 13.006.$$

Ce n'est pas une bonne approximation de $1.002^{2001} \approx 54.489244196998690$ mais elle est meilleure que celle obtenue avec l'approximation linéaire.

b) Considérons $f(x) = \sin(x)$. Nous cherchons à estimer $f(0.02)$. L'approximation quadratique de f pour x près de $x = 0$ est

$$p(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 = x$$

Il n'y a pas d'approximation quadratique de $\sin(x)$ pour x près de l'origine.

c) Le polynôme de Taylor de degré deux d'une fonction f pour x près du point a est

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

Dans le cas présent, nous avons $f(x) = x^{3/4}$ et nous choisissons la valeur $a = 16$ qui est près de 16.2 et pour laquelle il est facile de calculer $f(a)$, $f'(a)$ et $f''(a)$. Puisque $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$ et $f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-5/4}$, nous obtenons

$$p_2(x) = 16^{4/3} + \frac{3}{4}16^{-1/4}(x-16) - \frac{3}{32}16^{-5/4}(x-16)^2 = 8 + \frac{3}{8}(x-16) - \frac{3}{32^2}(x-16)^2.$$

Donc

$$16.2^{4/3} = f(16.2) \approx p_2(16.2) = 8 + \frac{3}{8}(16.2 - 16) - \frac{3}{32^2}(16.2 - 16)^2 = 8.07488281 \dots$$

La valeur exacte est $16.2^{4/3} \approx 8.074883419$.

Question 5.53

a) Le polynôme de Taylor de degré trois de f pour x près de $x = 1$ est

$$p_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Puisque $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ et $f'''(x) = 2/x^3$, nous obtenons

$$p_3(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

Ainsi,

$$\ln(1.2) = f(1.2) \approx p_3(1.2) = (1.2 - 1) - \frac{1}{2}(1.2 - 1)^2 + \frac{1}{3}(1.2 - 1)^3 = 0.1826666\dots$$

b) Puisque $f(x) = x^{1/4}$, nous avons

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}}, \quad f''(x) = \frac{-3}{16}x^{-7/4} = \frac{-3}{16x^{7/4}} \quad \text{et} \quad f'''(x) = \frac{21}{64}x^{-11/4} = \frac{21}{64x^{11/4}}.$$

Le polynôme de Taylor de degré trois de f pour x près de 1 est

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3 \\ &= 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2 + \frac{21}{384}(x-1)^3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$1.4^{1/4} = f(1.4) \approx p_3(1.4) = 1 + \frac{1}{4}(0.4) - \frac{3}{32}(0.4)^2 + \frac{21}{384}(0.4)^3 = 1.0885.$$

c) Puisque $f(x) = (1+x)^{-1/2}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$, $f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-5/2}$ et $f'''(x) = -\frac{15}{8}(1+x)^{-7/2}$, le polynôme de Taylor de degré trois de f pour x près de 3 est

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-3) + \frac{3}{128}(x-3)^2 - \frac{15}{1024}(x-3)^3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(3.1) \approx p(3.1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}(3.1-3) + \frac{3}{128}(3.1-3)^2 - \frac{15}{1024}(3.1-3)^3 \approx 0.49396973.$$

d) Le polynôme de Taylor de degré trois de f pour x près de a est

$$p_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3.$$

Dans le cas présent, $f(x) = x^{4/3}$ et $a = 8$. Puisque

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}, \quad f''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3} \quad \text{et} \quad f'''(x) = -\frac{8}{27}x^{-5/3},$$

nous obtenons

$$x^{4/3} = f(x) \approx p_3(x) = 16 + \frac{8}{3}(x-8) + \frac{1}{18}(x-8)^2 - \frac{1}{648}(x-8)^3.$$

Ainsi,

$$8.1^{4/3} = f(8.1) \approx p(8.1) = 16 + \frac{8}{30} + \frac{1}{1800} - \frac{1}{648000} = 16.2672206790 \dots$$

e) Puisque

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{d}{dy} \arcsin(y) \Big|_{y=x^2-1} \right) \frac{d}{dx} (x^2 - 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \Big|_{y=x^2-1} \right) (2x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}, \\ f''(x) &= \frac{d}{dx} \left(2(2-x^2)^{-1/2} \right) = 2x(2-x^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2(2-x^2)^{-3/2} + 2x \left(3x(2-x^2)^{-5/2} \right) \\ &= \left(2(2-x^2) + 6x^2 \right) (2-x^2)^{-5/2} = (4+4x^2)(2-x^2)^{-5/2} \end{aligned}$$

pour $0 < x < \sqrt{2}$, le polynôme de Taylor de f de degré trois pour x près de 1 est

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 2(x-1) + (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\arcsin(0.21) = f(1.1) \approx p_3(1.1) = 2(1.1-1) + (1.1-1)^2 + \frac{4}{3}(1.1-1)^3 = 0.211\bar{3}.$$

La valeur exacte est $\arcsin(0.21) = 0.21157496 \dots$

Question 5.54

Par définition, nous avons

$$p_4(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{6}(x-3)^3 + \frac{f^{(4)}(3)}{24}(x-3)^4.$$

Donc $\frac{f''(3)}{2} = 0$ et $\frac{f^{(4)}(3)}{24} = \frac{1}{3}$. nous obtenons $f''(3) = 10$ et $f^{(4)}(3) = 8$.

Question 5.55

Comme le polynôme de Taylor d'une fonction au voisinage d'un point donné est unique, le polynôme de Taylor de p au voisinage de l'origine est p lui-même.

Question 5.56

Puisque $\frac{d^9}{dx^9}(x^k) = 0$ pour $k < 9$ et $\frac{d^9}{dx^9}(x^9) = 9!$, nous avons que $\frac{d^9 p}{dx^9}(x) = 7 \times 9! > 0$ pour tout x .

18.5.7 Comportement asymptotique

Question 5.63

Pour répondre à cette question, nous utilisons la Règle de l'Hospital.

a) Nous avons $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{0.1x^{0.5}}{30 \ln(x)}}_{\text{forme } \infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0.05x^{-0.5}}{30/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0.05x^{0.5}}{30} = +\infty .$$

Donc f croît plus rapidement que g .

b) Nous avons $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-2x}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{x^2}{e^{2x}}}_{\text{forme } \infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{2x}{2e^{2x}}}_{\text{forme } \infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^{-2x} = 0$$

Donc f tend vers 0 plus rapidement que g .

c) Nous avons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{x^{-1}}{-\ln(x)}}_{\text{forme } \infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^{-2}}{-1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = \infty$$

Donc f tend vers $+\infty$ plus rapidement que g .

Question 5.64

a) La limite est du type ∞/∞ . Nous pouvons appliquer la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{3e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3xe^{3x}} = 0$$

car $3xe^{3x} \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

b) Puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^n} = 0$ pour $n > 0$, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1+t}{1+t+t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1/t^2) + (1/t)}{(1/t^2) + (1/t) + 1} = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} (1/t^2) + \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} (1/t^2) + \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) + 1} = \frac{0}{1} = 0 .$$

c) La limite est du type $0/0$. Nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{-\sin(x)} .$$

La limite à droite est encore une limite du type $0/0$. Nous pouvons encore utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{-\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0 .$$

d) La limite est du type ∞/∞ . Nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{3z}{1 + \ln(1+z)}}_{\text{forme } \infty/\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3}{1/(1+z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} 3(1+z) = \infty .$$

e) Nous avons une limite du type $0/0$. Nous pouvons donc utiliser la Règle de l'Hospital pour calculer cette limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x \cos(3x^2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cos(3x^2) = 3 \cos(0) = 3 .$$

f) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2(x)}{(x - \pi/2)^2}$ est une limite du type $0/0$. Nous utilisons la Règle de l'Hospital pour obtenir

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2(x)}{(x - \pi/2)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{d}{dx} \cos^2(x)}{\frac{d}{dx} (x - \pi/2)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-2 \cos(x) \sin(x)}{2(x - \pi/2)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos(x) \sin(x)}{(x - \pi/2)} .$$

Nous avons encore une limite du type $0/0$. Nous utilisons une seconde fois la Règle de l'Hospital pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2(x)}{(x - \pi/2)^2} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos(x) \sin(x)}{(x - \pi/2)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{d}{dx} (-\cos(x) \sin(x))}{\frac{d}{dx} (x - \pi/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin^2(x) - \cos^2(x)}{1} = \sin^2(\pi/2) - \cos^2(\pi/2) = 1 . \end{aligned}$$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$ est une limite du type $0/0$. Nous utilisons la Règle de l'Hospital pour obtenir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} (e^{1/x} - 1)}{\frac{d}{dx} (1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1 .$$

h) Nous avons une limite du type ∞/∞ . Nous pouvons donc utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\ln(\sin(x))}{4 \ln(x)}}_{\infty/\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)/\sin(x)}{4/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos(x)}{4 \sin(x)} .$$

Nous avons maintenant une limite du type $0/0$. Nous pouvons encore utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{x \cos(x)}{4 \sin(x)}}_{0/0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - x \sin(x)}{4 \cos(x)} = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4} .$$

Question 5.65

a) La limite est du type $0 \cdot \infty$. Par contre,

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \csc(5x) \sin(3x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$$

où la limite de droite est du type $0/0$. Nous pouvons donc utiliser la Règle de l'Hospital pour obtenir.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \csc(5x) \sin(3x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{3 \cos(3x)}{5 \cos(5x)} = \frac{3 \cos(3\pi)}{5 \cos(5\pi)} = \frac{3}{5}.$$

b) Nous avons une limite du type $\infty - \infty$. Par contre,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$$

où la limite de droite est du type $0/0$. Nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital pour obtenir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)}.$$

Cette dernière limite est encore du type $0/0$. Un deuxième appel à la Règle de l'Hospital donne

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} \\ &= \frac{\sin(0)}{2 \cos(0) - 0 \sin(0)} = 0. \end{aligned}$$

c) Nous avons une limite du type $\infty - \infty$. Par contre

$$(\csc(x) - \cot(x)) = \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

transforme la limite en une limite du type $0/0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc(x) - \cot(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0$$

où la deuxième égalité est une conséquence de la Règle de l'Hospital.

d) Après une petite manipulation algébrique, nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\begin{aligned} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} 7x \cot(3x)}_{\text{type } 0 \cdot \infty} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 7 \cos(3x) \frac{x}{\sin(3x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} 7 \cos(3x) \right) \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(3x)} \right)}_{\text{type } (0/0)} \\ &= 7 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3 \cos(3x)} = \frac{7}{3 \cos(0)} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\cos(3x)$ est une fonction continue à l'origine et donc que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(3x) = \cos(0) = 1$.

Un autre approche est d'utiliser $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin(y)} = 1$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} 7x \cot(3x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \cos(x)}{3} \frac{3x}{\sin(3x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7 \cos(x)}{3} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{\sin(3x)} \right) \\ &= \frac{7}{3} \underbrace{\left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sin(y)} \right)}_{y=3x} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

f) Après une petite manipulation algébrique, nous pouvons utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\begin{aligned} \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pi} \cot^2(x)(x - \pi)^2}_{\infty \cdot 0} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \cos^2(x) \frac{(x - \pi)^2}{\sin^2(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \cos^2(x) \right) \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{\sin^2(x)} \right)}_{\text{type } (0/0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \underbrace{\frac{2(x - \pi)}{2 \sin(x) \cos(x)}}_{\text{type } (0/0)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2}{2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x)} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont des fonctions continues à $x = \pi$ et donc que $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x) = \cos(\pi) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x) = \sin(\pi) = 0$.

g) Nous avons une limite du type $(\infty - \infty)$. Nous avons cependant que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(1/x) - 1}{1/x}$$

où la limite à droite est une limite du type $0/0$. Nous pouvons donc utiliser la Règle de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(1/x) - 1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x^2) \sin(1/x)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin(0) = 0.$$

h) Puisque

$$(\cos(x))^{1/x^2} = e^{\ln((\cos(x))^{1/x^2})} = e^{(1/x^2) \ln(\cos(x))}$$

pour $-\pi/2 < x < \pi/2$, et la fonction exponentielle est continue sur la droite réelle, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) \ln(\cos(x))}.$$

Il suffit donc de calculer la limite que nous retrouvons comme exposant. Pour ce faire, nous utilisons la Règle de l'Hospital.

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}}_{\text{type } 0/0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)/\cos(x)}{2x} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x \cos(x)}}_{\text{type } 0/0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{2 \cos(x) - 2x \sin(x)} = \frac{-1}{2}$$

car la fonction impliquée dans la dernière limite est continue à $x = 0$, il suffit donc d'évaluer cette fonction pour obtenir la limite. Finalement

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) \ln(\cos(x))} = e^{-1/2} .$$

18.5.8 Méthode de Newton

Question 5.66

La première itération est

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^4 - 20}{4x_0^3} = 2.125$$

Puisque $|x_1 - x_0| = 0.125 > 10^{-4}$, nous calculons l'itération suivante.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^4 - 20}{4x_1^3} \approx 2.11481856$$

Puisque $|x_2 - x_1| \approx 0.01018 > 10^{-4}$, nous calculons l'itération suivante.

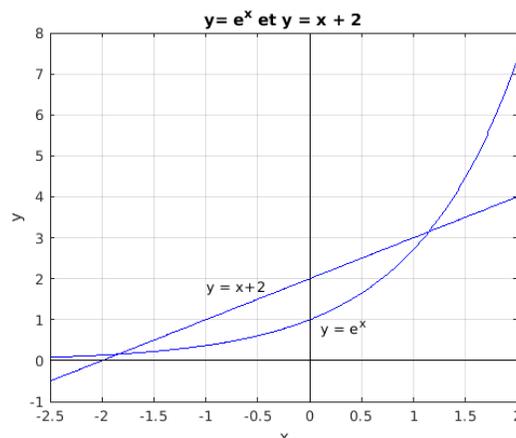
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{x_2^4 - 20}{4x_2^3} \approx 2.11474253$$

Puisque $|x_3 - x_2| \approx 5.40273 \times 10^{-5} < 10^{-4}$, nous pouvons utiliser $x_3 \approx 2.11474253$ comme approximation de la solution de $x^4 - 20 = 0$.

La solution exacte est 2.11474253...

Question 5.68

a) Nous pourrions tracer le graphe de f . Nous invitons le lecteur à le faire. Puisque nous cherchons la solution de $e^x = x + 2$, il est préférable de tracer les graphes de e^x et de $x + 2$ pour trouver approximativement où elles se coupent. De plus, comme ce sont deux graphes bien connus, nous pouvons utiliser cette information pour confirmer le nombre de points d'intersection.



En regardant le graphe ci-dessus, il est clair qu'il y a une seule solution positive entre 1 et 1.5.

b) $x = c$ est une solution de $e^x = x + 2$ si et seulement si $x = c$ est une solution de $f(x) = e^x - x - 2 = 0$. Pour répondre à la question, il suffit donc de trouver la solution de $f(x) = 0$.

Pour choisir x_0 , nous remarquons que $f(1) \approx -0.2817 < 0$ et $f(1.5) \approx 0.981689 > 0$. Puisque f est une fonction continue sur l'intervalle $[1, 1.5]$, le Théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe une valeur c entre 1 et 1.5 telle que $f(c) = 0$. C'est effectivement ce que nous avons observé à l'aide de la figure ci-dessus. Nous choisissons donc $x_0 \in [1, 1.5]$.

c) Prenons $x_0 = 1.5$ pour résoudre numériquement $f(x) = 0$ à l'aide de la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nous avons les quatre itérations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{e^{x_0} - x_0 - 2}{e^{x_0} - 1} \approx 1.218042 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{e^{x_1} - x_1 - 2}{e^{x_1} - 1} \approx 1.1497723 \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{e^{x_2} - x_2 - 2}{e^{x_2} - 1} \approx 1.1462025 \\ x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = x_3 - \frac{e^{x_3} - x_3 - 2}{e^{x_3} - 1} \approx 1.1461932 \end{aligned}$$

Donc $c \approx 1.1461932$.

Question 5.69

a) L'équation de la sécante qui passe par $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ est

$$y = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} (x - x_i) + f(x_i).$$

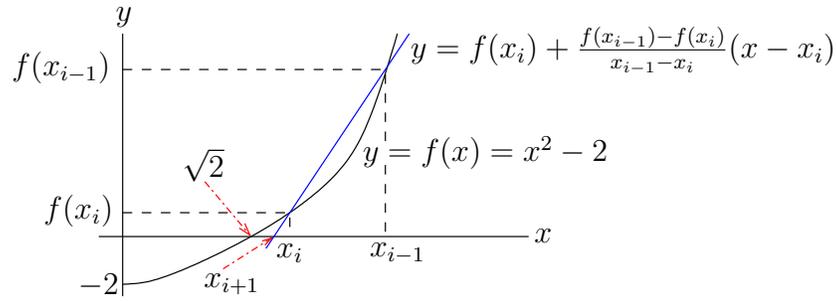
Lorsque cette droite coupe l'axe des x (c'est-à-dire, lorsque $y = 0$), nous avons

$$0 = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} (x - x_i) + f(x_i).$$

Si nous résolvons cette équation pour x , nous trouvons

$$x = x_i - f(x_i) \left(\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \right)^{-1}.$$

C'est la formule qui donne x_{i+1} .



b) Comme à la question 5.68, nous considérons la fonction $f(x) = e^x - x - 2$. Nous choisissons x_0 et x_1 dans l'intervalle $[1, 2]$ où f change de signe. Soit $x_0 = 1.6$ et $x_1 = 1.7$. Nous obtenons les quatre itérations suivantes :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - f(x_1) \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)^{-1} = f(1.7) - f(1.7) \left(\frac{f(1.7) - f(1.6)}{1.7 - 1.6} \right)^{-1} \\ &\approx 1.2785497 \\ x_3 &= x_2 - f(x_2) \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right)^{-1} \approx 1.1882991 \\ x_4 &= x_3 - f(x_3) \left(\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \right)^{-1} \approx 1.150012 \\ x_5 &= x_4 - f(x_4) \left(\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \right)^{-1} \approx 1.1463089 \end{aligned}$$

Donc $e^c = c + 2$ pour $c \approx 1.1463089$. Remarquons que la méthode de la sécante tend vers la solution de $f(x) = 0$ plus lentement que la méthode de Newton.

18.5.9 Systèmes dynamiques discrets

Question 5.70

La solution du système dynamique discret est $v_n = 1.5^n v_0 = 1350 \times 1.5^n$. Nous cherchons le plus petit entier n tel que $v_n \geq 3250$.

$$\begin{aligned} 1350 \times 1.5^n \geq 3250 &\Leftrightarrow 1.5^n \geq \frac{3250}{1350} = \frac{65}{27} \Leftrightarrow \ln(1.5^n) \geq \ln\left(\frac{65}{27}\right) \\ &\Leftrightarrow n \ln(1.5) \geq \ln(65) - \ln(27) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(65) - \ln(27)}{\ln(1.5)} = 2.1667719 \dots \end{aligned}$$

car $\ln(1.5) > 0$. Puisque n doit être un entier, nous choisissons $n = 3$ pour être certain que le volume sera plus grand que $3250 \mu\text{m}^3$.

Question 5.71

a) Nous cherchons p_9 tel que $10^8 < p_{10} = 2p_9 < 10^9$. Donc

$$5 \times 10^7 = \frac{10^8}{2} < p_9 < \frac{10^9}{2} = 5 \times 10^8.$$

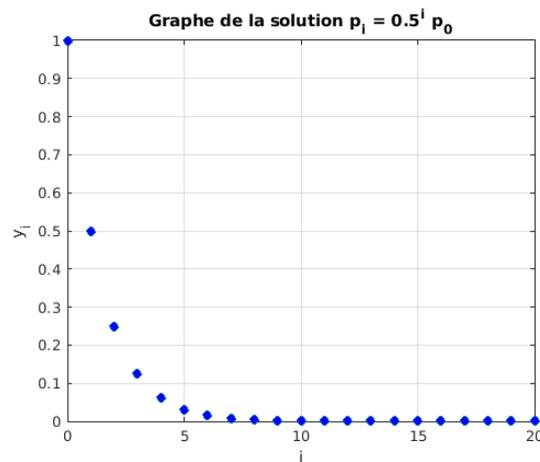
b) La solution du système dynamique discret est de la forme $p_n = 2^n p_0$ où p_0 est le nombre initial d'individus. Nous cherchons p_0 tel que $10^8 < p_{10} = 2^{10} p_0 < 10^9$. Donc

$$\frac{5^8}{4} = \frac{10^8}{2^{10}} < p_0 < \frac{10^9}{2^{10}} = \frac{5^9}{2}.$$

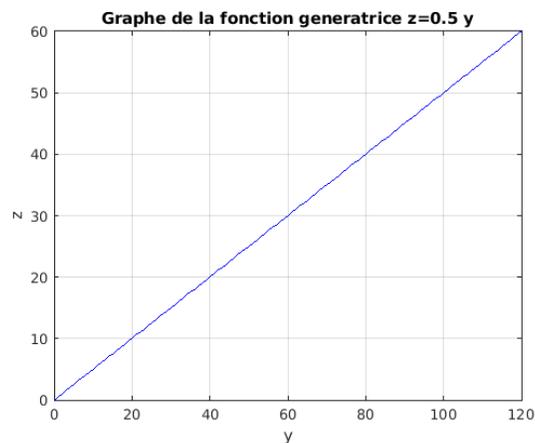
Question 5.72

La solution est $y_i = 0.5^i y_0 = 1200 \times 0.5^i$ pour $i \geq 0$ et $y_{20} = 1200 \times 0.5^{20} = 0.00114440 \dots$

Voici le graphe de la solution avec la condition initiale $y_0 = 1$.



Voici le graphe de la fonction itérative $z = f(y) = 0.5y$.



Notons que la fonction itérative est strictement croissante alors que la solution est strictement décroissante.

Question 5.73

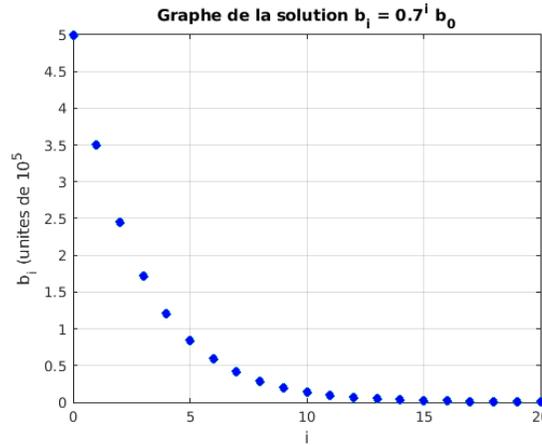
La solution générale est de la forme $b_i = 0.7^i b_0 = 5.0 \times 10^5 \times 0.7^i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$

Si $b_i \approx 10^5$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0.7^i \times 5 \times 10^5 \approx 10^5 &\Leftrightarrow 0.7^i \times 5 \approx 1 \Leftrightarrow 0.7^i \approx \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow i \ln(0.7) = \ln(0.7^i) \approx \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5). \end{aligned}$$

Donc $i \approx \frac{-\ln(5)}{\ln(0.7)} = 4.512338026$. Nous choisissons l'entier le plus près de 4.512338026, soit $i = 5$.

Le graphe de la solution du système dynamique $b_{i+1} = 0.7b_i$ est donné ci-dessous.



Question 5.74

La solution générale du premier système est $x_n = 10^2 \times 2.5^n$ pour $n \geq 0$ et la solution générale du second système $y_n = 10^3 \times 2^n$ pour $n \geq 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^3 \times 2^n}{10^2 \times 2.5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 10 \left(\frac{2}{2.5}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 10 \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$$

car $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ pour $|r| < 1$. La population associée au système (5.9.1) tend donc plus rapidement vers plus l'infini que la population associée au système (5.9.2).

Question 5.75

La fonction itérative est $f(x) = 4 - x$. Nous avons $x_0 = 1$, $x_1 = 4 - x_0 = 3$, $x_2 = 4 - x_1 = 1$, $x_3 = 4 - x_2 = 3, \dots$ La solution est

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

Question 5.76

Nous avons $h_0 = 1$, $h_1 = h_0 + 1 = 2$, $h_2 = h_1 + 1 = 3$, $h_3 = h_2 + 1 = 4, \dots$ La solution est donc $h_i = i + 1$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$ En effet,

$$h_i + 1 = (i + 1) + 1 = i + 2 = h_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots$$

Ainsi, $h_{20} = 21$.

Le modèle est plausible pour les premières années mais n'est pas valable après plusieurs années. La croissance de l'arbre devrait ralentir avec le temps. L'arbre devrait arrêter de grandir après un certain nombre d'années.

Question 5.77

La fonction itérative est $f(x) = 2x + 30$. Pour obtenir la solution, il faut trouver le point d'équilibre ; c'est-à-dire, p tel que $p = f(p)$.

$$p = f(p) \Leftrightarrow p = 2p + 30 \Leftrightarrow p = -30 .$$

La solution est

$$x_i = 2^i(x_0 - p) + p = 2^i(10 + 30) - 30 = 40 \times 2^i - 30 .$$

Question 5.78

Le tableau nous donne plusieurs valeurs v_0 (colonne de gauche) et v_1 (colonne de droite). Ces valeurs doivent satisfaire $v_1 = av_0 + b$. Si nous prenons les deux premières paires, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant.

$$1830 = 1220a + b$$

$$2790 = 1860a + b$$

La solution pour a et b de ce système est $a = 3/2$ et $b = 0$. Nous avons donc $v_{i+1} = (3/2)v_i$.

Pour compléter le tableau, notons que $v_1 = (3/2) \times 1420 = 2130$.

Si le valeur initial est $v_0 = 1420$, le valeur après une heure sera donné par v_6 car chaque itération représente 10 minutes. La solution du système dynamique discret $v_{i+1} = (3/2)v_i$ est $v_i = (3/2)^i v_0 = 1420 \times (3/2)^i$ pour $i \geq 0$. Donc $v_6 = 1420 \times (3/2)^6 = 16174.6875$.

Le modèle est valide pour une certaine période de temps mais il est clair qu'il n'est pas valide à long terme car $v_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Le nombre de moyen bactéries ne peut pas augmenter indéfiniment.

Question 5.79

Le tableau nous donne p_0, p_1, p_2 et p_3 . Ces valeurs doivent satisfaire $p_{i+1} = ap_i + b$. Si nous utilisons les valeurs p_0, p_1, p_2 , nous obtenons le système d'équations linéaires suivant.

$$p_1 = ap_0 + b \Rightarrow 16 = 20a + b$$

$$p_2 = ap_1 + b \Rightarrow 13 = 16a + b$$

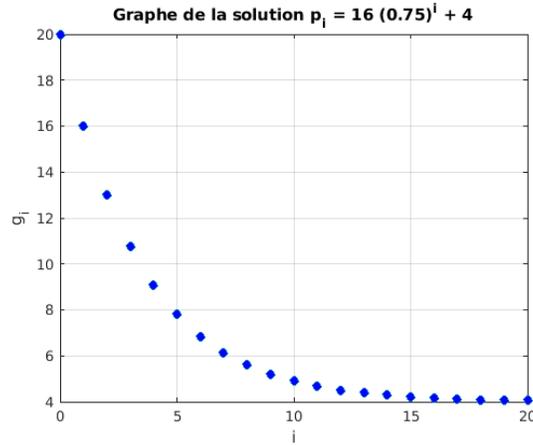
La solution de ce système pour a et b est $a = 3/4$ et $b = 1$. Nous avons donc $p_{i+1} = (3/4)p_i + 1$.

La fonction itérative est $f(x) = (3/4)x + 1$. Pour obtenir la solution, il faut trouver le point d'équilibre ; c'est-à-dire, le point p tel que $p = f(p)$.

$$p = f(p) \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}p + 1 \Leftrightarrow p = 4 .$$

La solution est

$$p_i = \left(\frac{3}{4}\right)^i (p_0 - p) + p = \left(\frac{3}{4}\right)^i (20 - 4) + 4 = 16 \times \left(\frac{3}{4}\right)^i + 4 .$$



Le modèle est réaliste. La concentration peut devenir nulle.

Question 5.80

a) Nous trouvons le point fixe M pour le système dynamique discret (5.9.3); c'est-à-dire, nous cherchons M tel que $M = 0.75M + 2$. La solution de cette équation est $M = 8$. Ainsi la solution générale est

$$M_i = 0.75^i (M_0 - 8) + 8 .$$

b) Nous avons

$$M_0 = 16$$

$$M_1 = 0.75(16 - 8) + 8 = 14$$

$$M_2 = 0.75^2(16 - 8) + 8 = 12.5$$

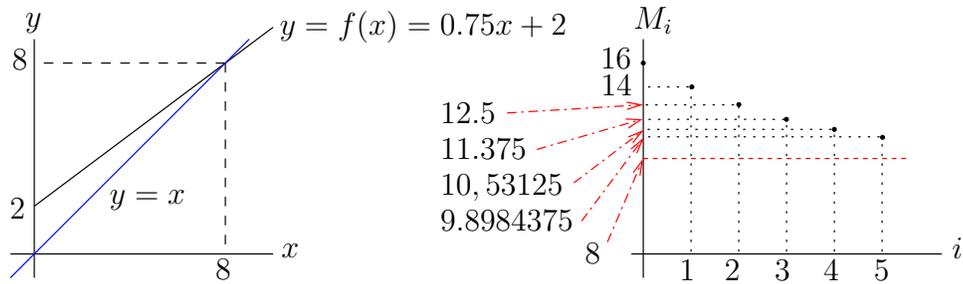
$$M_3 = 0.75^3(16 - 8) + 8 = 11.375$$

$$M_4 = 0.75^4(16 - 8) + 8 = 10.53125$$

$$M_5 = 0.75^5(16 - 8) + 8 = 9.8984375$$

c) Le dessin à droite dans la figure ci-dessous représente la solution du système (5.9.3) pour $M_0 = 16$.

d) Le dessin à gauche dans la figure ci-dessous représente le graphe de la fonction itérative du système dynamique discret.

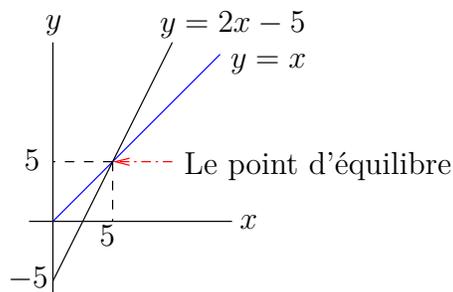


e) Nous utilisons le résultat en (a) pour obtenir

$$M_{60} = 0.75^{60}(10 - 8) + 8 = 0.75^{60} \times 2 + 8 \approx 8.000000064 .$$

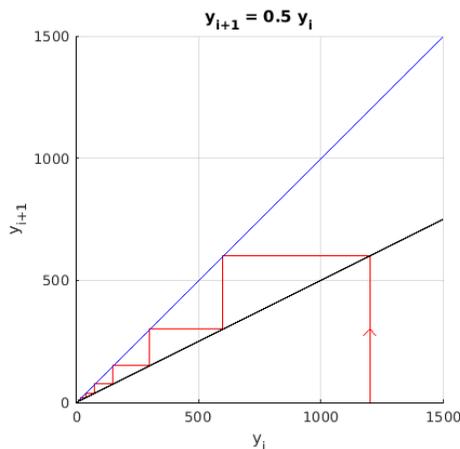
Question 5.81

La fonction itérative est $y = f(x) = 2x - 5$. Nous avons dessiné le graphe de la fonction itérative ci-dessous.



Le point d'équilibre p du système dynamique discret est la solution de l'équation $p = 2p - 5$; c'est-à-dire, $p = 5$. Le graphe de la fonction itérative est au-dessus de la droite $y = x$ pour $x > 5$ et en dessous de la droite $y = x$ pour $x < 5$.

Question 5.82



Question 5.83

La fonction itérative est $f(w) = -0.5w + 3$.

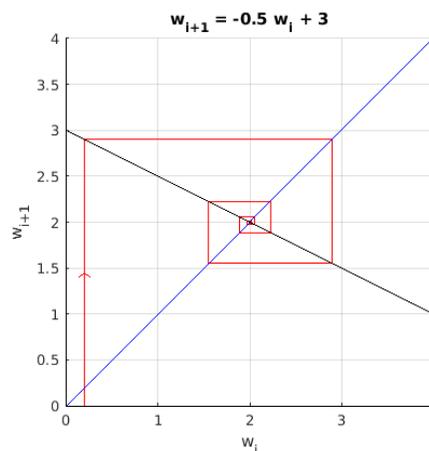
Pour obtenir la solution, il faut trouver le point d'équilibre; c'est-à-dire, le point p tel que $p = f(p)$.

$$p = f(p) \Leftrightarrow p = -0.5p + 3 \Leftrightarrow p = 2 .$$

La solution est

$$w_i = (-0.5)^i(w_0 - p) + p = (-0.5)^i(0.2 - 2) + 2 = -1.8 \times (-0.5)^i + 2 .$$

Le graphe de la fonction itérative est la droite de pente -0.5 et d'ordonnée à l'origine 3. Le graphe en forme de toile d'araignée est donnée ci-dessous.



Puisque $(-0.5)^i \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow \infty$, il n'est pas surprenant que $w_i \rightarrow 2$ lorsque $i \rightarrow \infty$. Nous avons que $-1.8 \times (-0.5)^i$ est positif pour i impair et négatif pour i pair. Cela explique pourquoi les x_i alternent entre plus petit et plus grand que 2.

Question 5.84

La fonction itérative est $f(z) = 0.5z + 8$.

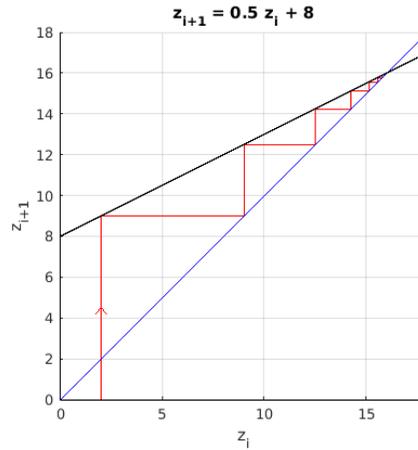
Pour obtenir la solution, il faut trouver le point d'équilibre; c'est-à-dire, le point p tel que $p = f(p)$.

$$p = f(p) \Leftrightarrow p = 0.5p + 8 \Leftrightarrow p = 16 .$$

La solution est

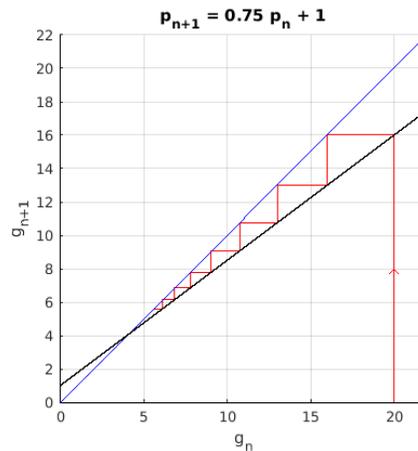
$$z_i = 0.5^i(z_0 - p) + p = 0.5^i(2 - 16) + 16 = -14 \times 0.5^i + 16 .$$

Le graphe de la fonction itérative est la droite de pente 0.5 et d'ordonnée à l'origine 8 qui est tracé en noire dans la figure ci-dessous. La figure contient aussi le graphe en forme de toile d'araignée.

**Question 5.85**

Nous avons trouvé à la question 5.79 que la concentration p_n d'un médicament après n heures satisfait le système dynamique discret $p_{n+1} = 0.75p_n + 1$. Nous avons aussi montré que $p = 4$ était le point d'équilibre et que la solution était $p_n = 16 \times 0.75^n + 4$.

Le graphe en forme de toile d'araignée est donné ci-dessous.

**Question 5.86**

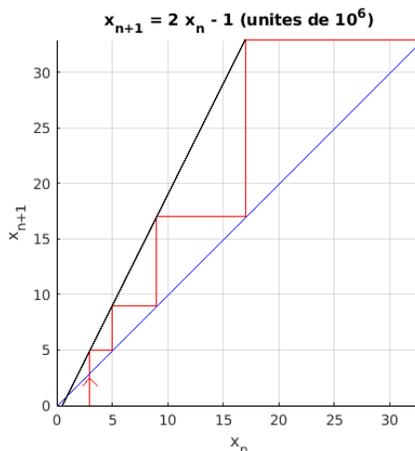
Pour la première partie de la question, le nombre de bactéries x_i que nous avons après i heures satisfait le système dynamique discret

$$x_{i+1} = 2x_i - 10^6 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Le point d'équilibre de ce système est donné par la solution de l'équation $x = 2x - 10^6$, soit $x = 10^6$. La solution du système dynamique discret est donc

$$x_i = 2^i (x_0 - 10^6) + 10^6 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Le graphe en forme de toile d'araignée est donné ci-dessous.



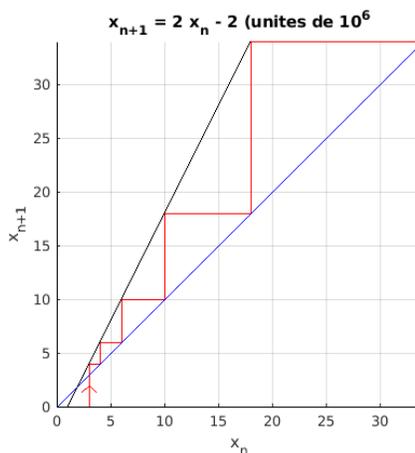
Pour la deuxième partie de la question, le système dynamique discret est

$$x_{i+1} = 2(x_i - 10^6) .$$

En d'autres mots, avant de doubler le nombre de bactéries, nous retirons 10^6 bactéries. Le point d'équilibre de ce système est donné par la solution de l'équation $x = 2(x - 10^6)$, soit $x = 2 \times 10^6$. La solution du système dynamique discret est donc

$$x_i = 2^i (x_0 - 2 \times 10^6) + 2 \times 10^6 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Le graphe en forme de toile d'araignée est donné ci-dessous.



Les deux graphes en forme de toile d'araignée sont légèrement différents si nous comparons les valeurs de x_i mais, qualitativement, ils sont identiques. Dans les deux cas, le nombre de bactéries croît sans borne supérieure ; c'est-à-dire, $x_i \rightarrow \infty$ lorsque $i \rightarrow \infty$.

Dans les deux cas, le système n'est pas vraiment réaliste à long terme même si la croissance est exponentielle au départ.

Question 5.87

Le système dynamique discret est de la forme

$$x_{i+1} = f(x_i) = mx_i + b \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où $f(x) = mx + b$ est la fonction itérative. Nous utilisons les deux premières itérations pour déterminer m et b ; c'est-à-dire, nous utilisons $x_1 = f(x_0) = mx_0 + b$ et $x_2 = f(x_1) = mx_1 + b$. Il faut donc résoudre le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{aligned} 2 &= m \times 0 + b \\ 3.2 &= m \times 2 + b \end{aligned}$$

La solution pour m et b est $m = 0.6$ et $b = 2$. La fonction itérative est donc $f(x) = 0.6x + 2$. Le système dynamique discret est

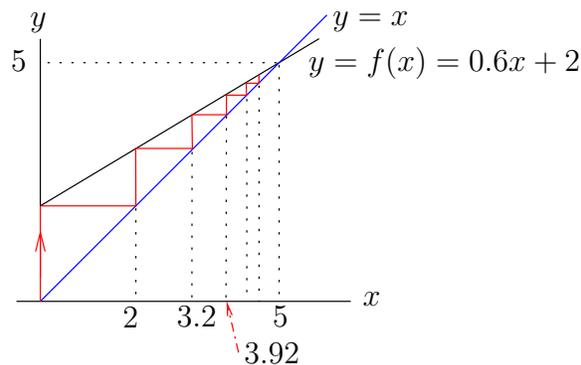
$$x_{i+1} = 0.6x_i + 2 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Le point d'équilibre du système dynamique discret

$$x_{i+1} = 0.6x_i + 2 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

est la solution de l'équation $p = f(p) = 0.6p + 2$ soit $p = 5$.

Le graphe de la fonction itérative (en noire) du système dynamique discret $x_{i+1} = 0.6x_i + 2$ avec le graphe en forme de toile d'araignée associé à la condition initiale $x_0 = 0$ se retrouve dans la figure suivante.

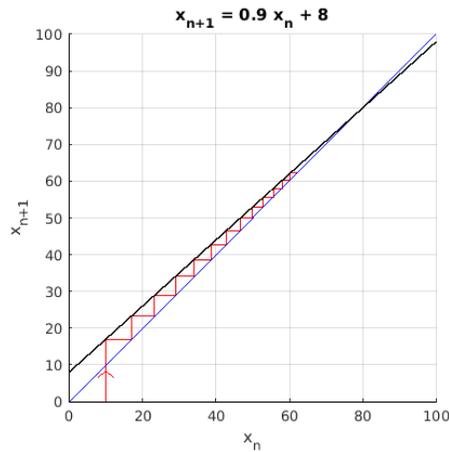


Question 5.88

La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = 0.9x + 8$. le point d'équilibre est la solution de $p = 0.9p + 8$, soit $p = 80$.

Puisque la pente de la droite $y = f(x)$ est entre -1 et 1 , le point d'équilibre sera (asymptotiquement) stable d'après le théorème sur la stabilité des points d'équilibre.

Nous avons tracé le graphe en forme de toile d'araignée pour $x_0 = 10$ ci-dessous. Nous voyons bien que les orbites tendent vers le point d'équilibre.



Question 5.90

Si 45% du médicament est éliminé en un jour, alors, après un jour, nous avons 55% de la quantité du médicament que nous avons au début de la journée. Nous ajoutons 50 mg/l à chaque jour avant de mesurer la quantité du médicament dans l'organisme du patient. Donc $x_{t+1} = 0.55x_t + 50$ pour $t = 0, 1, 2, \dots$. La condition initiale est 42 mg/l. Donc $x_0 = 42$.

Question 5.91

a) S'il y a p_n g de graines au début de la semaine et les oiseaux en manche 75%, il en reste donc $0.25p_n$ g à la fin de la semaine. Puis nous ajoutons 30 g. Nous avons donc $0.25p_n + 30$ g au début de la semaine suivante. Ainsi, le système dynamique discret est

$$p_{n+1} = 0.25p_n + 30 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

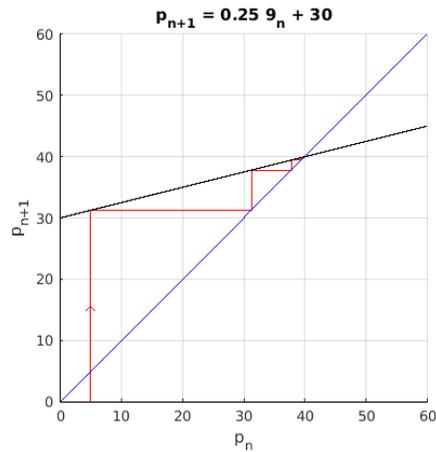
b) La fonction génératrice est $f(x) = 0.25x + 30$.

c) Le point d'équilibre du système dynamique discret est la solution de l'équation $f(p) = 0.25p + 30 = p$, soit $p = 30/0.75 = 40$.

d) La solution générale du système dynamique discret est

$$p_n = 0.25^n(p_0 - p) + p = 0.25^n(5 - 40) + 40 = -35 \times 0.25^n + 40 .$$

e) Nous avons tracé le graphe de la fonction génératrice et le graphe en forme de toiles d'araignées dans la figure ci-dessous.



f) Puisque $|f'(40)| = |0.25| < 1$, nous avons que $p = 40$ est un point d'équilibre (asymptotiquement) stable grâce au théorème de stabilité des points d'équilibre de système dynamique linéaire.

Il est aussi évident à partir du graphe en forme de toile d'araignée que le point d'équilibre $p = 40$ est (asymptotiquement) stable car les orbites convergent tous vers p .

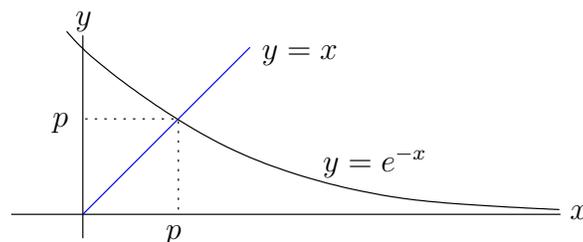
Question 5.92

Nous avons $x_0 = 1$, $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{2}$, $x_2 = f(x_1) = \frac{1}{3}$, $x_3 = f(x_2) = \frac{1}{4}$, \dots . Nous pouvons conjecturer que la solution est $x_i = \frac{1}{i+1}$. Pour démontrer que notre conjecture est vraie, il faut vérifier que l'équation $x_{i+1} = \frac{x_i}{1+x_i}$ est satisfaite avec $x_i = \frac{1}{i+1}$. Effectivement,

$$\frac{x_i}{1+x_i} = \frac{1/(i+1)}{1+1/(i+1)} = \frac{1/(i+1)}{(i+2)/(i+1)} = \frac{1}{i+2} = x_{i+1}.$$

Question 5.93

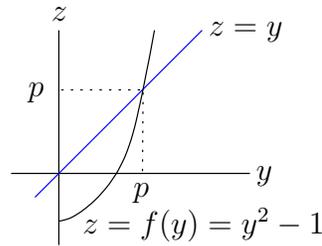
Les points d'équilibre p sont les solutions de l'équation $y = f(y) = e^{-y}$. Malheureusement, nous ne pouvons pas résoudre cette équation pour y . Par contre, nous pouvons déduire de l'intersection de la droite $y = x$ avec la courbe $y = e^{-x}$ qu'il existe un point d'équilibre.



Nous pourrions utiliser la méthode de Newton pour estimer numériquement la valeur de p .

Question 5.94

Le graphe de la fonction itérative est donné ci-dessous.



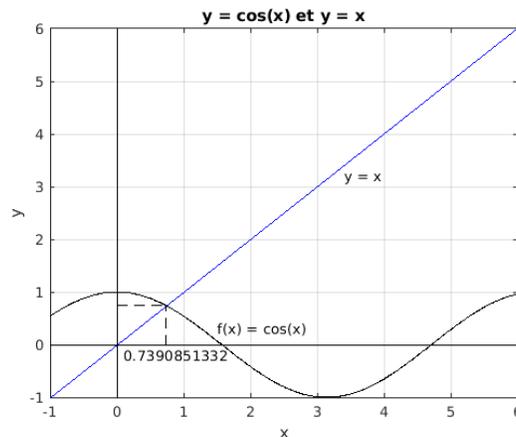
Le point d'équilibre p est donné par l'intersection du graphe de la fonction itérative $z = f(y)$ avec la droite $z = y$. Le point d'équilibre p que nous cherchons est donc la solution de l'équation $p = f(p) = p^2 - 1$ avec $0 \leq p \leq 2$. C'est-à-dire qu'il faut trouver les racines du polynôme $p^2 - p - 1 = 0$ avec $0 \leq p \leq 2$. Grâce à la formule pour trouver les racines d'un polynôme de degré deux, nous obtenons

$$p_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} .$$

La seule racine p telle que $0 \leq p \leq 2$ est $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Question 5.95

Soit $f(x) = x - \cos(x)$. f est une fonction continue sur la droite réelle telle que $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ et $f(\pi/2) = \pi/2 - \cos(\pi/2) = \pi/2 > 0$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc p entre 0 et $\pi/2$ tel que $f(p) = p - \cos(p) = 0$; c'est-à-dire, $\cos(p) = p$. La figure suivante illustre ce fait. Nous pouvons montrer à l'aide d'une méthode numérique (e.g. méthode de Newton) que $p \approx 0.73908513321$.

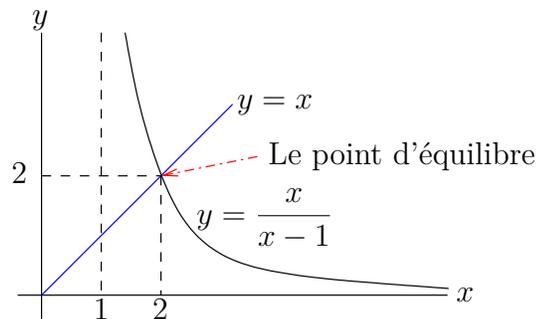


Question 5.96

La fonction itérative est $f(x) = \frac{x}{x-1}$ pour $x > 1$. Les point d'équilibre positifs du système dynamique discret sont les solutions de l'équation $p = f(p) = \frac{p}{p-1}$. Nous pouvons récrire cette équation de la façon suivante.

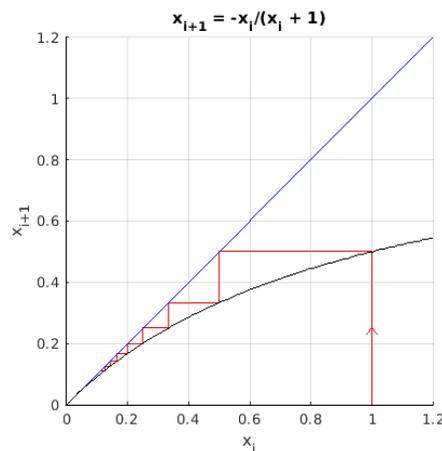
$$p^2 - 2p = p(p - 2) = 0 .$$

La seule solution pour $p > 1$ est $p = 2$. C'est le point d'intersection du graphe de la fonction itérative f avec la droite $y = x$ qui représenté dans la figure ci-dessous.



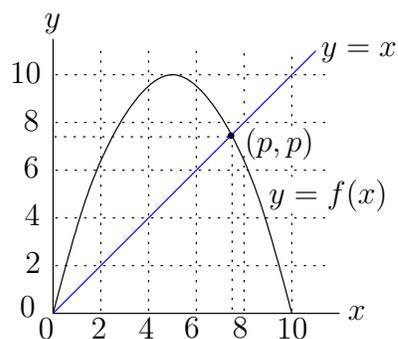
Question 5.97

La fonction itérative est $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Le graphe de cette fonction est en noir dans la figure ci-dessous. La figure ci-dessous contient aussi le graphe en forme de toile d'araignée.



Question 5.98

Le point d'équilibre est p car $f(p) = p$.



Question 5.99

p est un point d'équilibre si $p = f(p) = \frac{\alpha p}{p+1}$. Or,

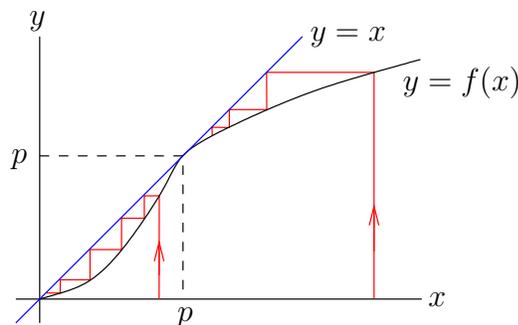
$$p = \frac{\alpha p}{p+1} \Leftrightarrow p(p+1) = \alpha p \Leftrightarrow p^2 + (1-\alpha)p = 0 \Leftrightarrow p(p+1-\alpha) = 0.$$

Les points d'équilibre sont donc $p = 0$ et $p = \alpha - 1$. le système dynamique a toujours au moins un point d'équilibre ; c'est le point $p = 0$.

- Il n'y pas de point d'équilibre autre que 0 quand $\alpha = 1$.
- le système dynamique discret a un point d'équilibre négatif lorsque $\alpha < 1$; c'est le point $p = \alpha - 1$.
- le système dynamique discret a un point d'équilibre positif lorsque $\alpha > 1$; c'est le point $p = \alpha - 1$.

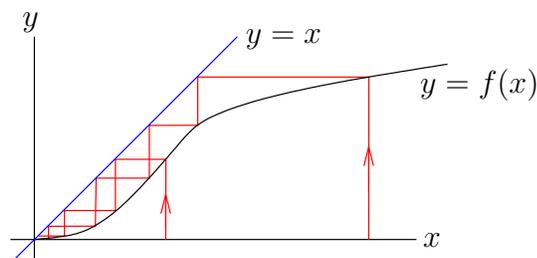
Question 5.100

a) Le graphe en forme de toile d'araignée lorsque la fonction itérative f est dans sa position initiale.



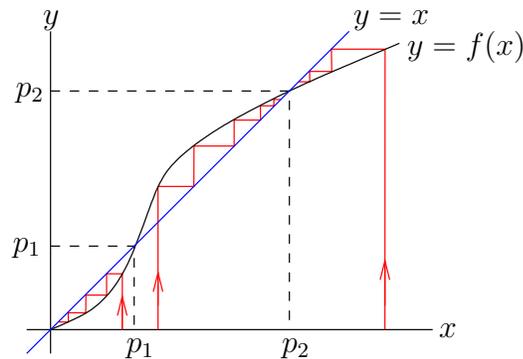
Il y a deux points d'équilibre : 0 et p . L'origine est stable. Par contre, p n'est pas stable. Il est vrai que les orbites convergent vers p si la condition initiale x_0 est plus grande que p . Cependant, si la condition initiale x_0 satisfait $0 < x_0 < p$, alors les orbites convergent vers l'origine et non pas vers p .

b) Le graphe en forme de toile d'araignée lorsque le graphe de f est légèrement pivoté dans le sens des aiguilles d'une montre.



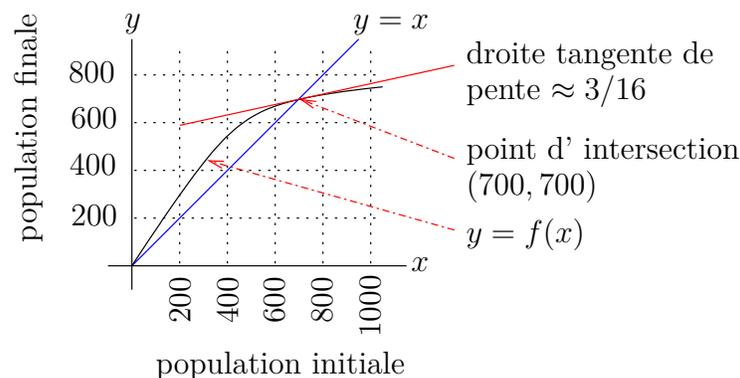
Il n'y a maintenant qu'un seul point d'équilibre, l'origine, qui est stable. Toutes les orbites convergent vers l'origine.

c) Le graphe en forme de toile d'araignée lorsque le graphe de f est légèrement pivoté dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.



Il y a maintenant trois points d'équilibre : 0, p_1 et p_2 . L'origine est toujours stable. Le point p_1 est un point d'équilibre instable alors que le point p_2 est un point d'équilibre stable.

Question 5.101

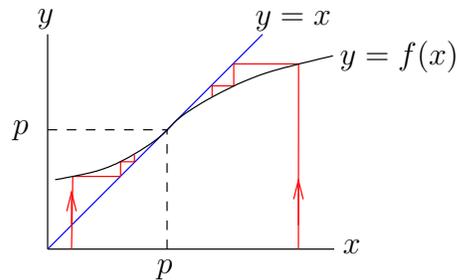


Le point d'intersection (autre que l'origine) de la courbe $y = f(x)$ avec la droite $y = x$ est $(700, 700)$. Donc $p = 700$ est le point d'équilibre du système dynamique discret $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

La pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(700, 700)$ est approximativement $m = 3/16$. Puisque $|m| < 1$, nous obtenons du théorème sur la stabilité des points d'équilibre que le point d'équilibre $p = 700$ est (asymptotiquement) stable .

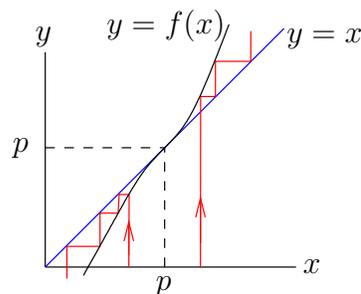
Question 5.102

a)



Puisque la courbe $y = f(x)$ est tangente à la droite $y = x$ au point (p, p) par construction, nous avons $f'(p) = 1$. Nous ne pouvons rien conclure à l'aide du théorème de stabilité pour les points d'équilibre. Par contre, le graphe en forme de toile d'araignée indique que le point d'équilibre p est stable.

b)



Comme précédemment, puisque la courbe $y = f(x)$ est tangente à la droite $y = x$ au point (p, p) par construction, nous avons $f'(p) = 1$. Nous ne pouvons rien conclure à l'aide du théorème de stabilité pour les points d'équilibre. Par contre, le graphe en forme de toile d'araignée indique que le point d'équilibre p est instable.

Question 5.103

Le système dynamique discret est de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$ où $f(x) = 6xe^{-2x} - 2x$. Les points d'équilibre sont donc les points p qui satisfont $p = f(p) = 6pe^{-2p} - 2p$. Le point $p = 0$ est un point d'équilibre. Si $p \neq 0$, nous pouvons diviser des deux côtés de l'équation par p pour obtenir $1 = 6e^{-2p} - 2$. Donc $e^{-2p} = 0.5$. En appliquant \ln des deux côtés de cette dernière égalité, nous obtenons un deuxième point d'équilibre, $p = \ln(2)/2$.

Pour déterminer la stabilité de ces deux points d'équilibre, nous avons besoin de la dérivée de f ; c'est-à-dire, $f'(x) = 6e^{-2x} - 12xe^{-2x} - 2 = 6(1 - 2x)e^{-2x} - 2$.

Puisque $|f'(0)| = 4 > 1$, le point $p = 0$ est instable. De même, $|f'(\ln(2)/2)| = |6(1 - \ln(2))/2 - 2| = 1.07944\dots > 1$ et le point $p = \ln(2)/2$ est aussi instable.

Note : le comportement de ce système dynamique discret est beaucoup plus complexe que ceux que nous avons normalement dans nos exemples. Voir la section sur les orbites périodiques.

Question 5.104

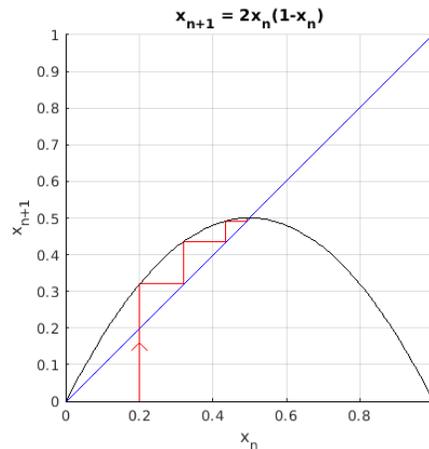
La fonction itérative est $f(x) = \frac{1.5x}{1.5x + 2(1-x)} = \frac{1.5x}{2 - 0.5x}$. Nous avons $f'(x) = \frac{3}{(2 - 0.5x)^2}$.

Notons que $p = 0$ et $p = 1$ sont des points d'équilibre car $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque $|f'(0)| = 3/4 < 1$, nous avons que 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable. Puisque $|f'(1)| = 4/3 > 1$, nous avons que 1 est un point d'équilibre instable.

Question 5.105

La fonction itérative est $f(x) = 2x(1-x)$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$, soit $x = 0$ ou $x = 1/2$. Le point d'équilibre non nul est $p = 1/2$. Puisque $f'(x) = 2 - 4x$, nous obtenons que $f'(p) = 0$. Le point d'équilibre $p = 1/2$ est donc asymptotiquement stable car $|f'(p)| = 0 < 1$.

Le graphe en forme de toile d'araignée pour $x_0 = 0.2$ est ci-dessous.



Comme nous pouvons le voir dans le graphe en forme de toile d'araignée, la convergence est très rapide. À partir de 0.2, il faut seulement quatre itérations pour être très près du point d'équilibre $p = 1/2$.

Question 5.106

a) Nous avons le système dynamique discret

$$M_{i+1} = M_i - \frac{M_i^2}{2 + M_i} + 1 = \frac{2M_i}{2 + M_i} + 1 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

La fonction itérative est $g(M) = \frac{2M}{2 + M} + 1$. Notons que $G(2) = 2$. Ce qui confirme que $M = 2$ est un point d'équilibre.

Nous déduisons de $g'(M) = \frac{4}{(2 + M)^2}$ que $g'(2) = 1/4$. Puisque que $|g'(2)| < 1$, le point d'équilibre $M = 2$ est asymptotiquement stable. De plus, puisque $g'(2) > 0$, les orbites n'oscillent pas autour de $M = 2$.

Question 5.107

a) La fonction génératrice du système dynamique discret est $f(x) = rx(1-x) - 0.75x$. Les points d'équilibre sont les solutions de l'équation $x = f(x) = rx(1-x) - 0.75x$. Il est facile de voir que $x = 0$ est une solution. Donc, $p_1 = 0$ est un point d'équilibre. Si $x \neq 0$, nous pouvons diviser les deux côtés de l'égalité par x pour obtenir $1 = r(1-x) - 0.75$. Si

nous résolvons pour x cette dernière équation, nous obtenons le deuxième point d'équilibre

$$p_2 = 1 - \frac{1.75}{r}.$$

b) Le point $p_1 = 0$ a toujours un sens biologique ; il n'y a pas d'individus. Le point d'équilibre $p_2 = 1 - \frac{1.75}{r}$ a un sens biologique seulement s'il est plus grand ou égale à 0. Ainsi

$$1 - \frac{1.75}{r} \geq 0 \Rightarrow r \geq 1.75 .$$

c) La dérivée de la fonction génératrice est $f'(x) = r - 2rx - 0.75$. Le point d'équilibre $p_2 = 1 - 1.75/r$ sera stable si

$$|f'(p_2)| = \left| r - 2r \left(1 - \frac{1.75}{r} \right) - 0.75 \right| = | -r + 2.75 | = | r - 2.75 | < 1 ;$$

c'est-à-dire, si $-1 < r - 2.75 < 1$ ou, plus précisément, si $1.75 < r < 3.75$. Le point d'équilibre p_2 sera instable si $|f'(p_2)| > 1$; c'est-à-dire si $r > 3.75$ car nous considérons seulement $r > 1.75$ pour obtenir un point d'équilibre p_2 qui a un sens biologique.

Le point d'équilibre $p_1 = 0$ sera stable si $|f'(p_1)| = |r - 0.75| < 1$; c'est-à-dire si $-1 < r - 0.75 < 1$ ou, plus précisément, si $-0.25 < r < 1.75$. Le point d'équilibre p_1 sera instable si $|f'(p_1)| > 1$; c'est-à-dire, si $r > 1.75$ ou $r < -0.25$.

Question 5.108

a) La fonction itérative est $f(x) = 2x(1 - x^2)$.

b) Les points d'équilibre sont les solutions de $x = f(x)$. Il découle de $2x(1 - x^2) = x$ que $x = 0$ ou $2(1 - x^2) = 1$ si $x \neq 0$. De plus,

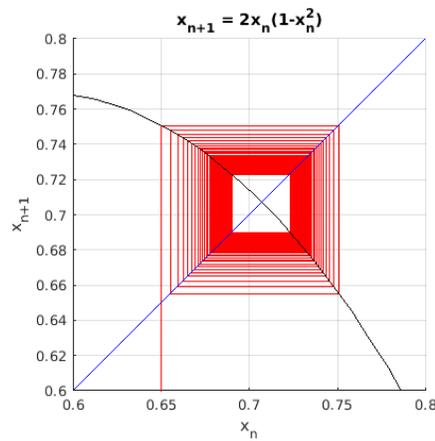
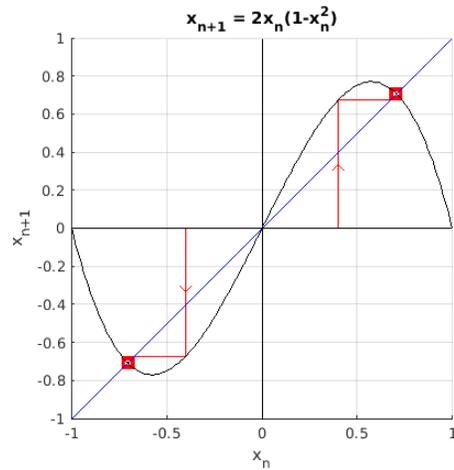
$$2(1 - x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Les trois points d'équilibre sont donc 0, $1/\sqrt{2}$ et $-1/\sqrt{2}$.

c) Nous avons $f'(x) = 2 - 6x^2$. Ainsi, $f'(-1/\sqrt{2}) = -1$, $f'(0) = 2$ et $f'(1/\sqrt{2}) = -1$. Puisque $|f'(0)| = 2 > 1$, le point d'équilibre $x = 0$ est instable.

Puisque $|f'(-1/\sqrt{2})| = |f'(1/\sqrt{2})| = 1$, nous ne pouvons rien conclure à partir du théorème de stabilité des points d'équilibre. Il faut faire une analyse plus poussée pour déterminer la stabilité de ces points d'équilibre.

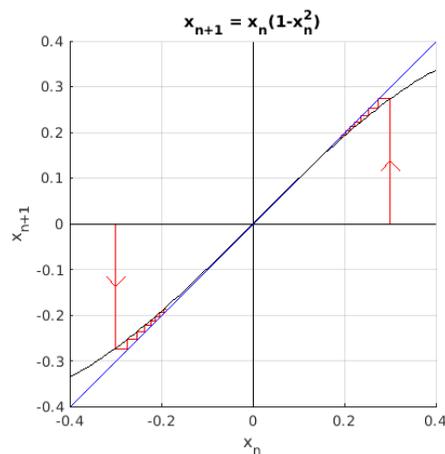
Nous retrouvons ci-dessous deux graphes en forme de toile d'araignée. Dans le deuxième graphe, nous avons tracé le graphe au voisinage du point d'équilibre $1/\sqrt{2}$. Nous voyons que les points d'équilibre $-1/\sqrt{2}$ et $1/\sqrt{2}$ sont stables mais la stabilité est très faible. Il faut un très grand nombre d'itérations pour approcher légèrement le point d'équilibre.



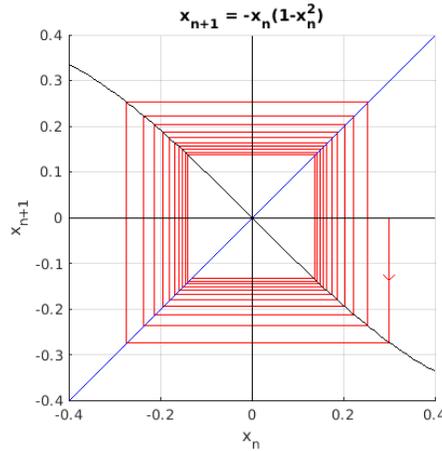
Question 5.109

a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = \mu x(1 - x^2)$. Ainsi, $f'(x) = \mu(1 - 3x^2)$ et $f'(0) = \mu$. Le point d'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable si $|f'(0)| = |\mu| < 1$. Si $|\mu| > 1$, le point d'équilibre $x = 0$ est instable. Si $\mu = 1$ ou $\mu = -1$, il faut utiliser un graphe en forme de toile d'araignée pour déterminer la stabilité du point d'équilibre $x = 0$.

Pour $\mu = 1$, nous obtenons le graphe en forme de toile d'araignée suivant.



Pour $\mu = -1$, nous obtenons le graphe en forme de toile d'araignée suivant.



Dans les deux cas, l'origine est « faiblement » stable. Dans le cas $\mu = -1$, les orbites oscillent autour de l'origine.

b) Les points d'équilibre non nuls sont les solutions non nuls de l'équation $x = f(x) = \mu x(1 - x^2)$. Si $x \neq 0$, nous pouvons diviser par x des deux côtés de l'égalité pour obtenir $1 = \mu(1 - x^2)$. La solution pour x de cette équation est $x = \pm\sqrt{1 - 1/\mu}$ pour $\mu \geq 1$.

Le point d'équilibre positif est donc $p = \sqrt{1 - 1/\mu}$ pour $\mu > 1$.

Nous avons toujours $f'(x) = \mu(1 - 3x^2)$. Ainsi,

$$f'(p) = \mu(1 - 3p^2) = \mu\left(1 - 3\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right) = -2\mu + 3.$$

Le point d'équilibre $x = p$ est asymptotiquement stable si $|f'(p)| = |3 - 2\mu| < 1$; c'est-à-dire, si

$$|3 - 2\mu| < 1 \Leftrightarrow -1 < 3 - 2\mu < 1 \Leftrightarrow 1 > 2\mu - 3 > -1 \Leftrightarrow 4 > 2\mu > 2 \Leftrightarrow 2 > \mu > 1$$

Le point d'équilibre $x = p$ est instable si $|f'(p)| = |3 - 2\mu| > 1$; c'est-à-dire, si

$$\begin{aligned} |3 - 2\mu| > 1 &\Leftrightarrow 3 - 2\mu < -1 \text{ ou } 3 - 2\mu > 1 \Leftrightarrow 2\mu - 3 > 1 \text{ ou } 2\mu - 3 < -1 \\ &\Leftrightarrow 2\mu > 4 \text{ ou } 2\mu < 2 \Leftrightarrow \mu > 2 \text{ ou } \mu < 1 \end{aligned}$$

Comme p est défini seulement pour $\mu > 1$, nous conservons seulement $\mu > 2$. Si $\mu = 2$, il faut utiliser un graphe en forme de toile d'araignée pour déterminer la stabilité du point d'équilibre $x = p$. C'est ce qui a été fait à la question 5.108.

Nous tirons la même conclusion pour le point d'équilibre négatif $p = -\sqrt{1 - 1/\mu}$ pour $\mu > 1$.

Question 5.110

a) Nous avons que

$$x_{n+1} = x_n t(x_n) = \frac{2x_n^2}{1 + x_n^2} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

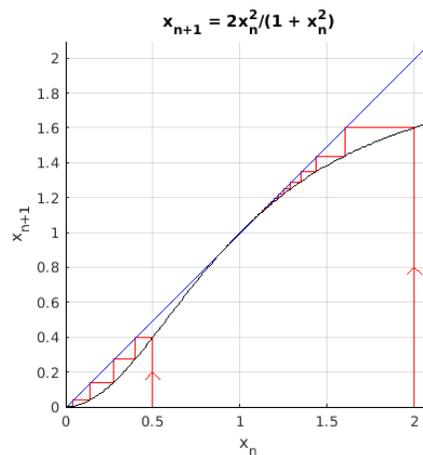
C'est le taux de reproduction par individus multiplié par le nombre d'individus par cm^2 .

b) La fonction itérative est $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. Donc

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = x \Leftrightarrow 2x^2 = x + x^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 = 0 .$$

Il y a deux points d'équilibre $p = 0$ et $p = 1$.

c) Le graphe de la fonction itérative (en noire) et le graphe en forme de toile d'araignée sont donnés dans la figure ci-dessous.



d) Puisque $f'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$, nous avons que $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 1$. Selon le théorème de stabilité des points d'équilibre, le point d'équilibre $p = 0$ est asymptotiquement stable car $|f'(0)| = 0 < 1$. Par contre, nous ne pouvons rien conclure pour $p = 1$.

e) Si initialement le nombre x_0 d'individus par cm^2 est supérieur à 1, alors le nombre x_n d'individus par cm^2 après n heures converge vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$. Par contre, si initialement le nombre x_0 d'individus par cm^2 est supérieur à 0 mais inférieure à 1, alors le nombre x_n d'individus par cm^2 converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$; la population va disparaître.

Question 5.112

a) La fonction génératrice est $f(x) = \frac{6x^2}{7+x^2}$ car $x_{n+1} = f(x_n)$.

b) Les points d'équilibre sont les solutions de l'équation $f(x) = \frac{6x^2}{7+x^2} = x$. Nous avons

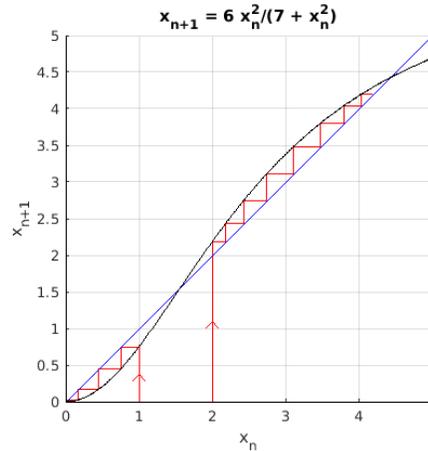
$$\frac{6x^2}{7+x^2} = x \Leftrightarrow 6x^2 = 7x + x^3 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 7x = x(x^2 - 6x + 7) = 0 .$$

Les racines du polynôme $x^2 - 6x + 7$ sont $x_{\pm} = \left(6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 7}\right)/2 = 3 \pm \sqrt{2}$. Les trois points d'équilibre sont donc $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3 - \sqrt{2} \approx 1.5858$ et $x_3^* = 3 + \sqrt{2} \approx 4.4142$.

c) Nous avons $f'(x) = \frac{84x}{(7+x^2)^2}$. Puisque $|f'(x_1^*)| = |f'(0)| = 0 < 1$, le point d'équilibre x_1^* est (asymptotiquement) stable. Puisque $|f'(x_2^*)| = |f'(3 - \sqrt{2})| \approx 1.4714 > 1$, le point d'équilibre x_2^* est instable. Finalement, puisque $|f'(x_3^*)| = |f'(3 + \sqrt{2})| = 0.5286 < 1$, le point d'équilibre x_3^* est (asymptotiquement) stable.

d) Si $x_0 = 1$, alors $x_1 = f(x_0) = 3/4$, $x_2 = f(x_1) \approx 0.4463$ et $x_3 = f(x_2) \approx 0.1660$.

Nous obtenons le graphe en forme de toile d'araignée suivant.



e) Si $x_0 = 1$, alors $x_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Question 5.114

a) Si les plantes ont produites $N_0 = 20$ graines dans l'année 0, alors la taille moyenne des plantes l'année suivante (l'année 1) sera $S_1 = \frac{100}{N_0} = \frac{100}{20} = 5$. Ces plantes produiront donc en moyenne $N_1 = S_1 - 1 = 5 - 1 = 4$ nouvelles graines pour le première année (l'année 1).

la taille moyenne des plantes pour l'année 2 sera $S_2 = \frac{100}{N_1} = \frac{100}{4} = 25$. Ces plantes produiront donc en moyenne $N_2 = S_2 - 1 = 25 - 1 = 24$ nouvelles graines pour l'année 2.

la taille moyenne des plantes pour l'année 3 sera $S_3 = \frac{100}{N_2} = \frac{100}{24} = 4.1\bar{6}$. Ces plantes produiront donc en moyenne $N_3 = S_3 - 1 = 4.1\bar{6} - 1 = 3.1\bar{6} - 1$ nouvelles graines pour l'année 3.

b) Nous pouvons déduire le système dynamique discret suivant à partir du raisonnement en (a) pour obtenir N_1 , N_2 et N_3 à partir de N_0 .

$$N_{n+1} = \frac{100}{N_n} - 1 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

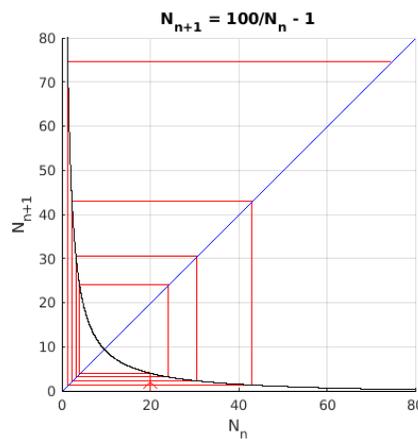
c) La fonction itérative de notre système dynamique discret est $f(N) = \frac{100}{N} - 1$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(N) = N$.

$$\frac{100}{N} - 1 = N \Leftrightarrow 100 - N = N^2 \Leftrightarrow N^2 + N - 100 = 0 .$$

Les racines du polynôme $N^2 + N - 100$ sont $N_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{401}) \approx 9.5124922$ et $N_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{401})$. Puisque $N_2 < 0$, nous pouvons l'ignorer car nous ne pouvons pas avoir un nombre négatif de graines.

d) Nous avons $f'(N) = -\frac{100}{N^2}$, donc $f'(N_1) = -\frac{100}{N_1^2} \approx -1.1051249$. Puisque $|f'(N_1)| > 1$, le point d'équilibre N_1 est instable.

e) Le graphe de la fonction itérative ainsi qu'un graphe en forme de toile d'araignée sont donnés dans la figure ci-dessous. Le graphe en forme de toile d'araignée montre que le point d'équilibre N_1 est instable. De plus, les orbites oscillent autour de ce point d'équilibre. Ce qui n'est pas surprenant car $f'(N_1) < 0$.



Question 5.115

a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = 2x(1-x) - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre. Si $x \neq 0$, nous pouvons alors diviser des deux côtés de l'égalité $2x(1-x) - hx = x$ par x pour obtenir $2(1-x) - h = 1$. La solution pour x de cette dernière équation donne le point d'équilibre $x = p(h) = (1-h)/2$.

Pour que le point d'équilibre $p(h) = (1-h)/2$ soit non négatif, il faut avoir $h \leq 1$. Naturellement, le facteur d'efficacité h ne peut pas être négatif.

b) La récolte à long terme est

$$R(h) = hp(h) = h \left(\frac{1-h}{2} \right) = \frac{1}{2} (h - h^2)$$

pour $0 \leq h \leq 1$.

c) Comme R est une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu de R sur l'intervalle $[0, 1]$.

Puisque $R'(h) = \frac{1}{2}(1-2h)$, il n'y a qu'un seul point critique et il est donné par la solution de $R'(h) = 0$. Ce point critique est $h = 1/2$.

Puisque $R(0) = R(1) = 0$ et $R(1/2) = 1/8$, le maximum de R sur l'intervalle $[0, 1]$ est donc $1/8$ lorsque $h = 1/2$.

d) La récolte est $R(1/2) = 1/8$.

Question 5.116

a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = 2.5x(1 - x) - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. l'origine $x = 0$ est une point d'équilibre. Si $x \neq 0$, nous pouvons alors diviser les deux côtés de l'égalité $2.5x(1 - x) - hx = x$ par x pour obtenir $2.5(1 - x) - h = 1$. La solution de cette équation nous donne le point d'équilibre $x = p(h) = (3 - 2h)/5$.

Pour que le point d'équilibre $p(h) = (3 - 2h)/5$ soit non négatif, il faut avoir $h \leq 3/2$. Naturellement, le facteur d'efficacité h ne peut pas être négatif.

b) La récolte à long terme est

$$R(h) = hp(h) = h \left(\frac{3 - 2h}{5} \right) = \frac{1}{5} (3h - 2h^2)$$

pour $0 \leq h \leq 3/2$.

c) Comme R est une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[0, 3/2]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu de R sur l'intervalle $[0, 3/2]$.

Puisque $R'(h) = (3 - 4h)/5 = 0$ seulement pour $h = 3/4$, le seul point critique est $h = 3/4$. Puisque $R(0) = R(3/2) = 0$ et $R(3/4) = 9/40$, le maximum de R sur l'intervalle $[0, 3/2]$ est $9/40$ lorsque $h = 3/4$.

d) Pour $h = 3/4 = 0.75$, la fonction itérative est

$$f(x) = 2.5x(1 - x) - hx = 2.5x(1 - x) - 0.75x = 1.75x - 2.5x^2$$

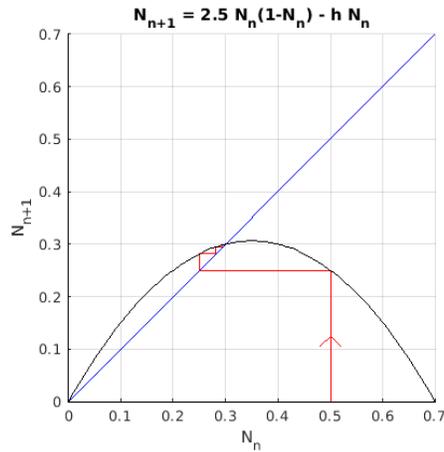
et le point d'équilibre positif du système dynamique discret $N_{i+1} = f(N_i) = 1.75N_i - 2.5N_i^2$ est $p(3/4) = (3 - 2(3/4))/5 = 3/10 = 0.3$.

La dérivée de la fonction itérative est $f'(x) = 1.75 - 5x$. Ainsi,

$$|f'(0.3)| = |1.75 - 5 \times 0.3| = 0.25 < 1$$

et le point d'équilibre 0.3 est (asymptotiquement) stable.

e) Le graphe en forme de toile d'araignée pour le système dynamique $N_{n+1} = f(N_n) = 2.5N_n(1 - N_n) - 0.75N_n$ est donné ci-dessous.

**Question 5.118**

a) Le système dynamique discret est $p_{n+1} = f(p_n)$ où $f(x) = 1.5x(1 - x^2) - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions p de

$$p = f(p) = 1.5p(1 - p^2) - hp.$$

$p = 0$ est une solution et donc un point d'équilibre. Si $p \neq 0$, nous pouvons diviser des deux côtés de l'égalité par p pour obtenir $1 = 1.5(1 - p^2) - h$. D'où $p^2 = (1 - 2h)/3$. Si $h < 1/2$, la solution positive de cette dernière équation nous donne le point d'équilibre $p = \sqrt{\frac{1 - 2h}{3}}$.

b) Le point d'équilibre $p = 0$ va donner une récolte de 0 insecte. Ce n'est certainement pas le maximum. Nous devons trouver h qui maximise $R(h) = hp = h\sqrt{\frac{1 - 2h}{3}}$ pour $0 \leq p \leq 1/2$. Pour que la récolte soit positive, il faut que p soit plus grand que 0.

Les points critiques de $R(h)$ sont les valeurs de h telles que $R'(h) = 0$. Or

$$R'(h) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{1 - 2h} - \frac{h}{\sqrt{1 - 2h}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1 - 3h}{\sqrt{1 - 2h}} \right).$$

Donc $R'(h) = 0$ pour $h = 1/3$. Le tableau suivant confirme que nous avons bien un maximum absolu positif pour $0 \leq h < 1/2$.

h	0	$0 < h < 1/3$	1/3	$1/3 < h < 1/2$	1/2
$R(h)$	0	+	1/9	+	0
$R'(h)$	+	+	0	-	

Avec un facteur d'efficacité de $h = 1/3$, les grenouilles obtiennent la récolte maximale à long terme de $1/9$ de la population maximale d'insectes que le lac peut supporter.

c) Il reste à démontrer que le point d'équilibre p avec $h = 1/3$ est stable; c'est-à-dire, que $p = 1/3$ est stable.

Pour $h = 1/3$, nous avons la fonction itérative $f(x) = 1.5x(1 - x^2) - x/3$. Donc $f'(x) = 7/6 - 9x^2/2$. Puisque $|f'(p)| = 2/3 < 1$, le point d'équilibre $p = 1/3$ est stable. À long terme, notre récolte maximale sera donc bien $1/9$ de la population.

Question 5.119

a) Le système dynamique discret est $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f(x) = 2x(1 - x^3) - hx$ est la fonction génératrice. Les points d'équilibre sont les solutions p de $p = f(p) = 2p(1 - p^3) - hp$. Un premier point d'équilibre est $p = 0$. Si $p \neq 0$, nous pouvons diviser les deux côtés de l'égalité par p pour obtenir $1 = 2(1 - p^3) - h$. D'où $p^3 = (1 - h)/2$. Si $h < 1$, la solution positive de cette dernière équation est le point d'équilibre $p = \sqrt[3]{(1 - h)/2}$.

Notons que nous avons un point d'équilibre non négatif seulement si $h \leq 1$. De plus, h ne peut pas être négatif car nous ne pouvons pas avoir un facteur d'efficacité négatif.

b) Le point d'équilibre $p = 0$ va donner une récolte de 0 grenouille et ce n'est certainement pas le maximum. Il faut trouver h qui maximise $R(h) = hp(h) = \frac{h(1 - h)^{1/3}}{\sqrt[3]{2}}$ pour $0 \leq h \leq 1$.

Les points critiques de $R(h)$ sont les valeurs de h telles que $R'(h) = 0$. Or

$$R'(h) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left((1 - h)^{1/3} - \frac{h}{3(1 - h)^{2/3}} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{3(1 - h) - h}{3(1 - h)^{2/3}} \right) = \frac{3 - 4h}{3(2(1 - h)^2)^{1/3}}.$$

Donc $R'(h) = 0$ pour $h = 3/4$. Le tableau suivant confirme que nous avons bien un maximum absolu positif lorsque $h = 3/4$.

h	0	$0 < h < 3/4$	$3/4$	$3/4 < h < 1$	1
$R(h)$	0	+	$3/8$	+	0
$R'(h)$	+	+	0	-	$-\infty$

Avec un facteur d'efficacité de $h = 3/4$, nous obtenons le point d'équilibre $p(3/4) = 1/2$ pour le système dynamique discret

$$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n^3) - \frac{3x_n}{4} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

La fonction génératrice de ce système est $f(x) = 2x(1 - x^3) - 3x/4$.

c) Pour déterminer la stabilité du point d'équilibre, nous évaluons $|f'(x)|$ au point $p = 1/2$. Puisque $f'(x) = 2 - 8x^3 - 3/4 = 5/4 - 8x^3$, nous obtenons

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{5}{4} - 1 \right| = \frac{1}{4} < 1.$$

Le point d'équilibre $p = 1/2$ est stable et il sera possible d'obtenir une récolte optimale à long termes.

Question 5.120

a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = \frac{2.5x}{1+x} - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions de

$$f(x) = \frac{2.5x}{1+x} - hx = x.$$

L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre. Si $x \neq 0$, nous pouvons alors diviser les deux côtés de l'égalité précédente pour obtenir $\frac{2.5}{1+x} - h = 1$. La solution $x = p(h) = \frac{3-2h}{2+2h}$ de cette dernière équation est le deuxième point d'équilibre.

Pour que le point d'équilibre $p(h) = \frac{3-2h}{2+2h}$ soit non négatif, il faut avoir $h \leq 3/2$. Naturellement, le facteur d'efficacité h ne peut pas être négatif. En fait, pour que le problème ait un sens biologique, il faut aussi que $h \leq 1$ car nous ne pouvons pas récolter plus de 100% de la population.

b) La récolte à long terme est

$$R(h) = hp(h) = h \left(\frac{3-2h}{2+2h} \right) = \frac{3h-2h^2}{2+2h}$$

pour $0 \leq h \leq 3/2$.

c) Comme R est une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[0, 3/2]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu de R sur l'intervalle $[0, 3/2]$.

Puisque $R'(h) = \frac{-2h^2 - 4h + 3}{2(1+h)^2} = 0$ si et seulement si $-2h^2 - 4h + 3 = 0$, les solutions de $R'(h) = 0$ sont les racines $-1 \pm \sqrt{10}/2$ de ce polynôme. La seule racine qui appartient à l'intervalle $[0, 3/2]$ est $h_1 = -1 + \sqrt{10}/2 \approx 0.5811388$. C'est le seul point critique dans l'intervalle $[0, 3/2]$.

Puisque $R(0) = R(3/2) = 0$ et $R(h_1) \approx 0.3377$, le maximum de R sur l'intervalle $[0, 3/2]$ est approximativement 0.3377 lorsque $h = h_1$.

d) Pour $h = h_1$, la fonction itérative est $f(x) = \frac{2.5x}{1+x} - h_1x$ et le point d'équilibre positif du système dynamique discret $N_{i+1} = f(N_i) = \frac{2.5N_i}{1+N_i} - h_1N_i$ est $p(h_1) = \frac{3-2h_1}{2+2h_1} \approx 0.58113883$.

La dérivée de la fonction itérative est $f'(x) = \frac{2.5}{(1+x)^2} - h_1$. Ainsi,

$$|f'(p(h_1))| = \left| \frac{2.5}{(1+p(h_1))^2} - h_1 \right| \approx \left| \frac{2.5}{(1+0.58113883)^2} - 0.5811388 \right| \approx 0.418861 < 1$$

et le point d'équilibre $p(h_1) \approx 0.58113883$ est (asymptotiquement) stable.

Question 5.121

La fonction génératrice est $f(x) = \frac{ax}{1+x} - \frac{x}{2}$.

a) Les points d'équilibre sont les solutions de

$$p = f(p) = \frac{ap}{1+p} - \frac{p}{2}.$$

$p = 0$ est une solution possible. Si $p \neq 0$, nous pouvons diviser des deux côtés de l'égalité par p pour obtenir

$$1 = \frac{a}{1+p} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{1+p} \Rightarrow \frac{3}{2}(1+p) = a \Rightarrow \frac{3p}{2} = a - \frac{3}{2} \Rightarrow p = \frac{2a-3}{3}.$$

Il y a deux points d'équilibre $p_1 = 0$ et $p_2 = (2a-3)/3$

b) Nous avons

$$f'(x) = \frac{a(1+x) - ax}{(1+x)^2} - \frac{1}{2} = \frac{2a - (1+x)^2}{2(1+x)^2}.$$

Pour p_1 , nous avons $|f'(p_1)| = |f'(0)| = |a - 1/2|$. Ainsi, p_1 est stable si $|a - 1/2| < 1$; c'est-à-dire, $-1/2 < a < 3/2$. De plus, p_1 est instable si $a < -1/2$ ou $a > 3/2$. Nous ne pouvons rien conclure à partir du Théorème de stabilité des points d'équilibre pour $a = -1/2$ ou $a = 3/2$. Il faut tracer le graphe en forme de toile d'araignée pour déterminer la stabilité dans ces deux cas.

Pour p_2 , nous avons

$$|f'(p_2)| = \left| f' \left(\frac{2a-3}{3} \right) \right| = \left| \frac{2a - (1 + (2a-3)/3)^2}{2(1 + (2a-3)/3)^2} \right| = \left| \frac{2a - (2a/3)^2}{2(2a/3)^2} \right| = \left| \frac{9}{4a} - \frac{1}{2} \right|.$$

Si $a > 0$, alors p_2 est stable si

$$\left| \frac{9}{4a} - \frac{1}{2} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{9}{4a} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{9}{4a} < \frac{3}{2} \Rightarrow a > \frac{3}{2}.$$

Le point d'équilibre p_2 est instable si $0 < a < 3/2$. Nous ne pouvons rien conclure à partir du Théorème de stabilité des points d'équilibre pour $a = 3/2$. Il faut tracer le graphe en forme de toile d'araignée pour déterminer la stabilité dans ce cas. Pour $a = 0$, nous avons le système dynamique discret linéaire $x_{n+1} = -0.5x_n$ qui possède seulement le point d'équilibre stable p_1 .

Question 5.122

a) La fonction itérative du système dynamique discret est $f(x) = 2.5xe^{-x} - hx$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = x$. Le point $x = 0$ est une des solutions et donc un point d'équilibre. Si $x \neq 0$, nous pouvons diviser les deux côtés de l'égalité $2.5xe^{-x} - hx = x$ par x pour obtenir $2.5e^{-x} - h = 1$. La solution de cette dernière équation est le deuxième point d'équilibre $x = p(h) = \ln \left(\frac{5}{2+2h} \right)$.

Pour que le point d'équilibre $p(h) = \ln \left(\frac{5}{2+2h} \right)$ soit non négatif, il faut avoir $\frac{5}{2+2h} \geq 1$. Ce qui donne $h \leq 3/2$. Naturellement, le facteur d'efficacité h ne peut pas être négatif. De plus, pour que le problème ait un sens biologique, il faut aussi que $h \leq 1$ car nous ne pouvons pas récolter plus de 100% de la population.

b) La récolte à long terme est

$$R(h) = hp(h) = h \ln \left(\frac{5}{2+2h} \right)$$

pour $0 \leq h \leq \frac{3}{2}$.

c) Comme R est une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[0, 3/2]$, nous pouvons utiliser le Théorème des valeurs extrêmes pour trouver le maximum absolu de R sur l'intervalle $[0, 3/2]$. Nous avons

$$R'(h) = \ln\left(\frac{5}{2+2h}\right) - \frac{h}{1+h}.$$

Puisque $R'(0) = \ln(5/2) > 0$ et $R'(3/2) = -3/5 < 0$, il y a au moins un point critique positif pour R (i.e. une solution de $R'(h) = 0$) entre 0 et $3/2$ d'après le Théorème des valeurs intermédiaires. Puisque

$$R''(h) = -\frac{1}{1+h} - \frac{h}{(1+h)^2} = \frac{-2-h}{(1+h)^2} < 0$$

pour tout $h \in [0, 3/2]$, la fonction R' est strictement décroissante. Le point critique est donc unique; c'est-à-dire, R' ne peut pas couper l'axe des h plus d'une fois. Il est impossible de résoudre algébriquement $R'(h) = 0$. Nous devons donc utiliser la méthode de Newton avec $g(h) = R'(h)$. Pour $h_0 = 1 \in [0, 3/2]$, nous obtenons les résultats suivants.

n	h_n	$h_{n+1} = h_n - \frac{g(h_n)}{g'(h_n)}$
0	1	0.630858068418946
1	0.630858068418946	0.671659064055244
2	0.671659064055244	0.672372670703419
3	0.672372670703419	0.672372880075553
4	0.672372880075553	0.672372880075571
5	0.672372880075571	0.672372880075571

Ainsi, le point critique est $H \approx 0.672372880075571$. Puisque $R(0) = R(3/2) = 0$ et $R(H) \approx 0.270325652399176 > 0$, La récolte à long terme est maximale lorsque $h = H$. Le point d'équilibre à long terme est $P(H) \approx 0.402047228$.

18.6 Intégrale

18.6.1 Intégrales indéfinies

Question 6.1

a) Puisque $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ pour $\alpha \neq -1$, nous avons $\int -x^{-2} dx = x^{-1} + C$ pour $\alpha = -2$.

b) Puisque $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ pour $\alpha \neq -1$, nous avons

$$10 \int x^{-9} dx = 10 \left(\frac{1}{-8} x^{-8} \right) + C = -\frac{5}{4x^8} + C$$

pour $\alpha = -9$.

c) Puisque $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ pour $\alpha \neq -1$, nous avons

$$\begin{aligned} \int (5z^{-1.2} - 1.2) dz &= 5 \int z^{-1.2} dz - 1.2 \int 1 dz = 5 \left(\frac{z^{-0.2}}{-0.2} \right) - 1.2z + C \\ &= -25z^{-0.2} - 1.2z + C \end{aligned}$$

pour $\alpha = -0.2$ et $\alpha = 0$ respectivement.

d) Puisque $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ pour $\alpha \neq -1$, nous avons

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}} + 3t \right) dt = \int (t^{-1/5} + 3t) dt = \int t^{-1/5} dt + \int 3t dt = \frac{5}{4} t^{4/5} + \frac{3}{2} t^2 + C$$

pour $\alpha = -1/5$ et $\alpha = 1$ respectivement.

e) Puisque $\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln(2)$, nous avons

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln(2)} + C .$$

Note : Nous pourrions aussi évaluer cette intégrale sans avoir recours à la règle pour dériver les expressions de la forme a^x où $a > 0$. Notons que

$$\int 2^x dx = \int e^{x \ln(2)} dx .$$

Si $y = x \ln(2)$, alors $dy = \ln(2) dx$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int 2^x dx &= \int e^{x \ln(2)} dx = \frac{1}{\ln(2)} \int e^{x \ln(2)} \ln(2) dx = \frac{1}{\ln(2)} \int e^y dy \\ &= \frac{1}{\ln(2)} (e^y + C) = \frac{1}{\ln(2)} e^{x \ln(2)} + D = \frac{2^x}{\ln(2)} + D , \end{aligned}$$

où $D = C/\ln(2)$.

f)

$$\int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx = e^x + \ln|x| + C .$$

g)

$$\int \frac{(3t+2)^2}{4t^2} dt = \int \frac{9t^2 + 12t + 4}{4t^2} dt = \int \left(\frac{9}{4} + 3t^{-1} + t^{-2} \right) dt = \frac{9t}{4} + 3 \ln|t| - t^{-1} + C .$$

h)

$$\int \frac{(x^{1/3} + 1)^2}{x^{2/3}} dx = \int \frac{x^{2/3} + 2x^{1/3} + 1}{x^{2/3}} dx = \int (1 + 2x^{-1/3} + x^{-2/3}) dx$$

$$= x + 3x^{2/3} + 3x^{1/3} + C .$$

Note : nous pourrions aussi utiliser la substitution $u = x^{1/3} + 1$ pour résoudre cette intégrale. Nous obtenons $du = (1/3)x^{-2/3} dx$. Ainsi,

$$\int \frac{(x^{1/3} + 1)^2}{x^{2/3}} dx = 3 \int u^2 du = u^3 + C = (x^{1/3} + 1)^3 + C .$$

Vérifiez que cette réponse est équivalent à la réponse précédente.

Question 6.2

a) Si $y = 1 + 4t$, alors $dy = 4 dt$ et

$$\int \frac{1}{1+4t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+4t} 4 dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{4} \ln |y| + C = \frac{1}{4} \ln |1 + 4t| + C .$$

b) Si $y = 5 - 3x$, alors $dy = -3 dx$ et

$$\int \frac{1}{5-3x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{5-3x} (-3) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{3} \ln |y| + C = -\frac{1}{3} \ln |5 - 3x| + C .$$

c) Si $y = 3x/7$, alors $dy = \frac{3}{7} dx$ et

$$\int 3e^{3x/7} dx = 7 \int e^{3x/7} \left(\frac{3}{7}\right) dx = 7 \int e^y dy \Big|_{y=3x/7} = 7e^y \Big|_{y=3x/7} + C = 7e^{3x/7} + C .$$

d) Si $y = 1 + \frac{t}{3}$, alors $dy = \frac{1}{3} dt$ et

$$\begin{aligned} \int \left(1 + \frac{t}{3}\right)^7 dt &= 3 \int \left(1 + \frac{t}{3}\right)^7 \frac{1}{3} dt = 3 \int y^7 dy \Big|_{y=1+t/3} \\ &= \frac{3}{8} y^8 \Big|_{y=1+t/3} + C = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{t}{3}\right)^8 + C . \end{aligned}$$

e) Si $y = 1 + e^z$, alors $dy = e^z dz$ et

$$\int \frac{e^z}{1+e^z} dz = \int \frac{1}{y} dy \Big|_{y=1+e^z} = \ln |y| \Big|_{y=1+e^z} + C = \ln |1 + e^z| + C .$$

f) Si $u = 1 + y^2$, alors $du = 2y dy$ et

$$\begin{aligned} \int 3y\sqrt{1+y^2} dy &= \frac{3}{2} \int \sqrt{1+y^2} (2y) dy = \frac{3}{2} \int \sqrt{u} du \Big|_{u=1+y^2} \\ &= u^{3/2} \Big|_{u=1+y^2} + C = (1+y^2)^{3/2} + C . \end{aligned}$$

g) Si $u = \ln(x)$, alors $du = \frac{1}{x} dx$ et

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \frac{1}{\ln(x)} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \int \frac{1}{u} du \Big|_{u=\ln(x)} = \ln |u| \Big|_{u=\ln(x)} + C = \ln |\ln(x)| + C .$$

h) Si $u = 1 + x + 2x^2$, alors $du = (1 + 4x) dx$ et

$$\int \frac{1 + 4x}{\sqrt{1 + x + 2x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-1/2} du = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{1 + x + 2x^2} + C .$$

i) Si $y = x^3 + 1$, alors $dy = 3x^2 dx$ et

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{x^3 + 1} (3x^2) dx = \frac{1}{3} \int y^{1/2} dy = \frac{2}{9} y^{3/2} + C = \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{3/2} + C .$$

j) Si $u = 1 + e^t$, alors $du = e^t dt$ et

$$\int e^t (1 + e^t)^4 dt = \int (1 + e^t)^4 e^t dt = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{5} (1 + e^t)^5 + C .$$

k) Si $y = 1 + x^{1/2}$, alors $dy = (1/2)x^{-1/2} dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^{11}} dx &= 2 \int (1 + \sqrt{x})^{-11} \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) dx = 2 \int y^{-11} dy \\ &= -\frac{1}{5} y^{-10} + C = -\frac{1}{5} (1 + x^{1/2})^{-10} + C . \end{aligned}$$

l) Si $u = 1/t$, alors $du = -(1/t^2) dt$ et

$$\int \frac{e^{1/t}}{t^2} dt = - \int e^{1/t} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = - \int e^u du = -e^u + C = -e^{1/t} + C .$$

m) Si $u = \ln(x)$, alors $du = (1/x) dx$ et

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + C .$$

Note : Nous pourrions aussi utiliser la méthode d'intégration par parties. Nous avons $\frac{\ln(x)}{x} = f(x)g'(x)$ où $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x^{-1}$. Ainsi $f'(x) = x^{-1}$, $g(x) = \ln(x)$ et

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = (\ln(x))^2 - \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Après avoir isolé l'intégrale du côté gauche, nous obtenons la primitive

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln(x))^2 .$$

Comme nous pouvons constater, cette approche est beaucoup plus longue.

n) Puisque $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, nous obtenons

$$\int \frac{x + 3}{x^2 - 9} dx = \int \frac{x + 3}{(x - 3)(x + 3)} dx = \int \frac{1}{x - 3} dx = \ln |x - 3| + C ,$$

où la dernière intégrale est calculée à l'aide de la substitution $u = x - 3$.

o) Puisque

$$\int e^t (2 + e^{2t}) dt = \int (2e^t + e^{3t}) dt = 2 \int e^t dt + \int e^{3t} dt = 2e^t + \int e^{3t} dt ,$$

il n'y a qu'une simple intégrale à calculer. Si $y = 3t$, alors $dy = 3 dt$ et

$$\int e^{3t} dt = \frac{1}{3} \int e^{3t} (3) dt = \frac{1}{3} \int e^y dy = \frac{1}{3} e^y + C = \frac{1}{3} e^{3t} + C .$$

Donc

$$\int e^t (2 + e^{2t}) dt = 2e^t + \frac{1}{3} e^{3t} + C .$$

p) Si $t = u^5$, alors $dt = 5u^4 du$ et

$$\int \frac{t^{3/5}}{1 + t^{2/5}} dt = \int \frac{u^3}{1 + u^2} (5u^4) du = \int \frac{5u^7}{1 + u^2} du .$$

Si nous divisons $5u^7$ par $1 + u^2$, nous obtenons

$$\frac{5u^7}{1 + u^2} = 5u^5 - 5u^3 + 5u - \frac{5u}{1 + u^2} .$$

Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{t^{3/5}}{1 + t^{2/5}} dt &= \int \frac{5u^7}{1 + u^2} du = \int \left(5u^5 - 5u^3 + 5u - \frac{5u}{1 + u^2} \right) du \\ &= 5 \int u^5 du - 5 \int u^3 du + 5 \int u du - 5 \int \frac{u}{1 + u^2} du \\ &= \frac{5u^6}{6} - \frac{5u^4}{4} + \frac{5u^2}{2} - 5 \int \frac{u}{1 + u^2} du . \end{aligned}$$

Pour évaluer $\int \frac{u}{1 + u^2} du$, nous posons $v = 1 + u^2$. Ainsi,

$$\frac{dv}{du} = 2u \Rightarrow \frac{1}{2} dv = u du$$

et

$$\int \frac{u}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{v} dv = \frac{1}{2} \ln |v| + C = \frac{1}{2} \ln |1 + u^2| + C .$$

Finalement,

$$\int \frac{t^{3/5}}{1 + t^{2/5}} dt = \frac{5u^6}{6} - \frac{5u^4}{4} + \frac{5u^2}{2} - 5 \int \frac{u}{1 + u^2} du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5u^6}{6} - \frac{5u^4}{4} + \frac{5u^2}{2} - \frac{5}{2} \ln|1+u^2| - 5C \\
&= \frac{5t^{6/5}}{6} - \frac{5t^{4/5}}{4} + \frac{5t^{2/5}}{2} - \frac{5}{2} \ln|1+t^{2/5}| + D
\end{aligned}$$

où $D = -5C$. Ne pas oublier que $u = t^{1/5}$.

q) Si $u = x^2 + 1$, alors $du = 2x dx$ et

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^9} dx = \int \frac{1}{2(1+x^2)^9} 2x dx = \int \frac{1}{2u^9} du = -\frac{1}{16u^8} + C = -\frac{1}{16(x^2+1)^8} + C.$$

r) Si $u = x^2 + 1$, alors $du = 2x dx$, $x^2 = u - 1$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(1+x^2)^9} dx &= \int \frac{x^2}{(1+x^2)^9} x dx = \frac{1}{2} \int \frac{u-1}{u^9} du = \int \left(\frac{1}{2u^8} - \frac{1}{2u^9} \right) du \\
&= -\frac{1}{14u^7} + \frac{1}{16u^8} + C = -\frac{1}{14(x^2+1)^7} + \frac{1}{16(x^2+1)^8} + C.
\end{aligned}$$

Question 6.3

a) Si $y = 2\pi(x-2)$, alors $dy = 2\pi dx$ et

$$\begin{aligned}
\int \cos(2\pi(x-2)) dt &= \frac{1}{2\pi} \int \cos(2\pi(x-2)) 2\pi dt = \frac{1}{2\pi} \int \cos(y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \sin(y) + C = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi(x-2)) + C.
\end{aligned}$$

b) Puisque $1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$, nous obtenons

$$\int \frac{\cos(\theta)}{1 - \cos^2(\theta)} d\theta = \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta = \int \cot(\theta) \csc(\theta) d\theta = -\csc(\theta) + C.$$

Pour ceux qui auraient oublié que la dérivée de $\csc(\theta)$ est $-\cot(\theta) \csc(\theta)$, il est toujours possible d'utiliser la règle de substitution.

$$\int \frac{\cos(\theta)}{1 - \cos^2(\theta)} d\theta = \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta.$$

Si $u = \sin(\theta)$, alors $du = \cos(\theta) d\theta$ et

$$\int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = -u^{-1} + C = -\frac{1}{\sin(\theta)} + C = -\csc(\theta) + C.$$

c) Puisque $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$, nous obtenons

$$\int \frac{\sin(\theta)}{1 - \sin^2(\theta)} d\theta = \int \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta = \int \tan(\theta) \sec(\theta) d\theta = \sec(\theta) + C.$$

Pour ceux qui auraient oublié que la dérivée de $\sec(\theta)$ est $\tan(\theta)\sec(\theta)$, il est toujours possible d'utiliser la règle de substitution.

$$\int \frac{\sin(\theta)}{1 - \sin^2(\theta)} d\theta = \int \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta .$$

Si $u = \cos(\theta)$, alors $du = -\sin(\theta) d\theta$ et

$$\int \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta = - \int \frac{1}{u^2} du = - \int u^{-2} du = u^{-1} + C = \frac{1}{\cos(\theta)} + C = \sec(\theta) + C .$$

d) Si $y = x^{3/2} + 1$, alors $dy = (3/2)x^{1/2} dx$ et

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \sin(x^{3/2} + 1) dx &= \frac{2}{3} \int \sin(x^{3/2} + 1) \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) dx = \frac{2}{3} \int \sin(y) dy \\ &= -\frac{2}{3} \cos(y) + C = -\frac{2}{3} \cos(x^{3/2} + 1) + C . \end{aligned}$$

e) Si $u = 1/t$, alors $du = -(1/t^2) dt$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(1/t)}{t^2} dt &= - \int \cos\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{-1}{t^2}\right) dt = - \int \cos(u) du \\ &= -\sin(u) + C = -\sin\left(\frac{1}{t}\right) + C . \end{aligned}$$

f) Puisque

$$\int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{(x/3)^2 + 1} dx ,$$

nous posons $u = x/3$. Ainsi, $du = (1/3) dx$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \int \frac{1}{(x/3)^2 + 1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x/3)^2 + 1} \left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{3} (\arctan(u) + C) = \frac{1}{3} \arctan(x/3) + D , \end{aligned}$$

où $D = C/3$.

g) Puisque le degré du numérateur est plus grand ou égale au degré du dénominateur, il faut diviser $x^3 + 1$ par $x^2 + 3$.

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3} = x + \frac{-3x + 1}{x^2 + 3} = x + \frac{-3x}{x^2 + 3} + \frac{1}{x^2 + 3} .$$

Ainsi,

$$I = \int x dx - \int \frac{3x}{x^2 + 3} dx + \int \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{3x}{x^2 + 3} dx + \int \frac{1}{x^2 + 3} dx .$$

Pour calculer

$$\int \frac{3x}{x^2 + 3} dx ,$$

nous utilisons la substitution $u = x^2 + 3$. Donc $du = 2x dx$ et

$$\int \frac{3x}{x^2 + 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + 3} (2x) dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{2} \ln|u| + C_1 = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + C_1 .$$

Pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx ,$$

nous utilisons la substitution $u = x/\sqrt{3}$. Donc $du = 1/\sqrt{3} dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 3} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(u) + C_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C_2 . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 3) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

où $C = -C_1 + C_2$.

k) Si $u = x^3 + 1$, alors $du = 3x^2 dx$ et

$$\int x^2 \sin(x^3 + 1) dx = \frac{1}{3} \int \sin(u) du = -\frac{1}{3} \cos(u) + C = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 1) + C .$$

l) Il faut en premier diviser car le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur.

$$\frac{(2t + 1)^2}{1 + t^2} = \frac{4t^2 + 4t + 1}{1 + t^2} = 4 + \frac{4t - 3}{t^2 + 1} = 4 + 2\left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right) - 3\left(\frac{1}{t^2 + 1}\right) .$$

Ainsi,

$$\int \frac{(2t + 1)^2}{1 + t^2} dt = \int 4 dt + 2 \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt - 3 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = 4t + 2 \ln(t^2 + 1) - 3 \arctan(t) + C .$$

La première intégrale ainsi que la troisième intégrale se calculent directement à partir des formules de base. Pour la deuxième intégrale, nous posons $u = t^2 + 1$. Donc $du = 2t dt$ et

$$\int \frac{2t}{1 + t^2} dt = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln(1 + t^2) + C .$$

m) Il découle de l'identité trigonométrique $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ que

$$\int \sin^5(x) \cos^4(x) dx = \int \sin^4(x) \cos^4(x) \sin(x) dx = \int (1 - \cos^2(x))^2 \cos^4(x) \sin(x) dx .$$

Si $u = \cos(x)$, alors $du = -\sin(x) dx$ et

$$\int \sin^5(x) \cos^4(x) dx = - \int (1 - u^2)^2 u^4 du = - \int (u^4 - 2u^6 + u^8) du$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} \right) + C \\
&= - \left(\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{2 \cos^7(x)}{7} + \frac{\cos^9(x)}{9} \right) + C .
\end{aligned}$$

n) Il découle de l'identité trigonométrique $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, que

$$\int \frac{\sin^5(x)}{\cos^4(x)} dx = \int \frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)} \sin(x) dx = \int \frac{(1 - \cos^2(x))^2}{\cos^4(x)} \sin(x) dx .$$

Si $u = \cos(x)$, alors $du = -\sin(x) dx$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^5(x)}{\cos^4(x)} dx &= - \int \frac{(1 - u^2)^2}{u^4} du = - \int (u^{-4} - 2u^{-2} + 1) du \\
&= - \int u^{-4} du + 2 \int u^{-2} du - \int du = \frac{1}{3u^3} - \frac{2}{u} - u + C \\
&= \frac{1}{3\cos^3(x)} - \frac{2}{\cos(x)} - \cos(x) + C .
\end{aligned}$$

o) Il découle de l'identité trigonométrique $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ que

$$\int \cos^3(x) \sin^2(x) dx = \int (1 - \sin^2(x)) \sin^2(x) \cos(x) dx .$$

Si $u = \sin(x)$, alors $du = \cos(x) dx$ et

$$\begin{aligned}
\int \cos^3(x) \sin^2(x) dx &= \int (1 - u^2)u^2 du = \int (u^2 - u^4) du \\
&= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{3} \sin^3(x) - \frac{1}{5} \sin^5(x) + C .
\end{aligned}$$

Question 6.4

a) Grâce aux propriétés du logarithme, nous avons

$$\int \ln(\sqrt{x}) dx = \int \ln(x^{1/2}) dx = \frac{1}{2} \int \ln(x) dx .$$

Pour calculer cette dernière intégrale, nous utilisons la méthode d'intégration par parties. Nous avons $\ln(x) = f(x)g'(x)$ où $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1$. Ainsi, $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int \ln(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\int f(x) g'(x) dx \right) = \frac{1}{2} \left(f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(x \ln(x) - \int dx \right) = \frac{x \ln(x)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{C}{2} = \frac{x \ln(x)}{2} - \frac{x}{2} + D
\end{aligned}$$

où $D = C/2$.

b) Nous avons $x^2 e^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x^2$ et $g'(x) = e^x$. Donc $g(x) = e^x$, $f'(x) = 2x$ et

$$\int x^2 e^x dx = \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx .$$

Nous devons encore utiliser la méthode d'intégration par parties pour évaluer $\int x e^x dx$. Nous avons $x e^x = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$. Donc $g(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ et

$$\int x e^x dx = \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C .$$

Nous obtenons donc

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + D$$

où $D = -2C$.

c) Puisque

$$\int \frac{x}{e^{3x}} dx = \int x e^{-3x} dx ,$$

nous avons $f(x)g'(x) = x e^{-3x}$ pour $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-3x}$. Donc $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-3x}/3$ et

$$\begin{aligned} \int x e^{-3x} dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\ &= -\frac{x e^{-3x}}{3} + \int \frac{e^{-3x}}{3} dx = -\frac{x e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C . \end{aligned}$$

d) Nous utilisons la méthode d'intégration par parties. Nous avons $f(x)g'(x) = x^2 e^{-x}$ pour $f(x) = x^2$ et $g'(x) = e^{-x}$. Donc $f'(x) = 2x$, $g(x) = -e^{-x}$ et

$$\int x^2 e^{-x} dx = \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx .$$

Nous utilisons la méthode d'intégration par parties une deuxième fois. Nous avons $f(x)g'(x) = 2x e^{-x}$ pour $f(x) = 2x$ et $g'(x) = e^{-x}$. Donc $f'(x) = 2$, $g(x) = -e^{-x}$ et

$$\begin{aligned} \int 2x e^{-x} dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\ &= -2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx = -2x e^{-x} - 2e^{-x} + C . \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C .$$

e) Si $y = x^2$, alors $dy = 2x dx$ et

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 e^{x^2} (2x) dx = \frac{1}{2} \int y e^y dy .$$

Il suffit donc de calculer cette dernière intégrale à l'aide de la méthode d'intégration par parties. Nous avons $f(y)g'(y) = ye^y$ avec $f(y) = y$ et $g'(y) = e^y$. Donc $f'(y) = 1$, $g(y) = e^y$ et

$$\int ye^y dy = \int f(y)g'(y) dy = f(y)g(y) - \int f'(y)g(y) dy = ye^y - \int e^y dy = ye^y - e^y + C .$$

Finalement,

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + D ,$$

où $D = C/2$.

f) Nous utilisons la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette intégrale.

Nous avons $f(x)g'(x) = (x^2 + x^6) \ln(x)$ avec $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = (x^2 + x^6)$. Donc $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x^3/3 + x^7/7$ et

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x^6) \ln(x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} \right) \ln(x) - \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x^6}{7} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} \right) \ln(x) - \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^7}{49} \right) + C . \end{aligned}$$

g) Si $y = x^2 + 2$, alors $dy = 2x dx$ et

$$\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx = \frac{1}{2} \int x^2 \ln(x^2 + 2)(2x) dx = \frac{1}{2} \int (y - 2) \ln(y) dy .$$

Cette dernière intégrale peut être évaluée à l'aide de la méthode d'intégration par parties. L'intégrande est $(y - 2) \ln(y) = f(y)g'(y)$ où $f(y) = \ln(y)$ et $g'(y) = (y - 2)$. Donc $f'(y) = \frac{1}{y}$,

$g(y) = \frac{(y - 2)^2}{2}$ et

$$\begin{aligned} \int (y - 2) \ln(y) dy &= f(y)g(y) - \int g(y)f'(y) dy = \frac{(y - 2)^2}{2} \ln(y) - \frac{1}{2} \int \frac{(y - 2)^2}{y} dy \\ &= \frac{(y - 2)^2}{2} \ln(y) - \frac{1}{2} \int \left(y - 4 + \frac{4}{y} \right) dy \\ &= \frac{(y - 2)^2}{2} \ln(y) - \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} - 4y + 4 \ln(y) \right) + C \\ &= \frac{(y - 2)^2}{2} \ln(y) - \frac{y^2}{4} + 2y - 2 \ln(y) + C . \end{aligned}$$

Puisque $y = x^2 + 2$, nous obtenons

$$\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{(x^2 + 2)^2}{4} + 2(x^2 + 2) - 2 \ln(x^2 + 2) + C \right)$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 1 \right) \ln(x^2 + 2) - \frac{x^4 - 4x^2 - 12}{8} + D$$

où $D = C/2$.

Question 6.5

a) Si $y = \pi\theta$, alors $dy = \pi d\theta$ et

$$\int \theta \cos(\pi\theta) d\theta = \frac{1}{\pi^2} \int (\pi\theta) \cos(\pi\theta) \pi d\theta = \frac{1}{\pi^2} \int y \cos(y) dy .$$

Nous utilisons la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette dernière intégrale. Nous avons $f(y)g'(y) = y \cos(y)$ avec $f(y) = y$ et $g'(y) = \cos(y)$. Donc $f'(y) = 1$, $g(y) = \sin(y)$ et

$$\begin{aligned} \int y \cos(y) dy &= \int f(y)g'(y) dy = f(y)g(y) - \int f'(y)g(y) dy \\ &= y \sin(y) - \int \sin(y) dy = y \sin(y) + \cos(y) + C . \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int \theta \cos(\pi\theta) d\theta = \frac{1}{\pi^2} (\pi\theta \sin(\pi\theta) + \cos(\pi\theta) + C) = \frac{1}{\pi} \theta \sin(\pi\theta) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi\theta) + D ,$$

où $D = C/\pi^2$.

b) Posons

$$I = \int e^x \sin(x) dx .$$

Nous avons $e^x \sin(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \sin(x)$. Donc $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos(x)$ et

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \sin(x) dx = \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx . \end{aligned} \tag{18.6.1}$$

Utilisons une seconde fois la méthode d'intégration par parties pour évaluer l'intégrale

$$\int e^x \cos(x) dx .$$

Nous avons $e^x \cos(x) = f(x)g'(x)$ pour $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \cos(x)$. Donc $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$ et

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx \\ &= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - I . \end{aligned}$$

Si nous substituons cette expression dans (18.6.1), nous obtenons

$$I = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - I$$

et, après avoir isolé I , nous trouvons

$$I = \frac{1}{2} (e^x \sin(x) - e^x \cos(x)) ,$$

une primitive de $\int e^x \sin(x) dx$. Ainsi,

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{1}{2} (e^x \sin(x) - e^x \cos(x)) + C .$$

c) Si $u = \theta^2$, alors $du = 2\theta d\theta$ et

$$\int \theta^3 \sin(\theta^2) d\theta = \int \theta^2 \sin(\theta^2) \theta d\theta = \frac{1}{2} \int u \sin(u) du .$$

Cette dernière intégrale est évaluée à l'aide de la méthode d'intégration par parties. L'intégrande est $u \sin(u) = f(u)g'(u)$ où $f(u) = u$ et $g'(u) = \sin(u)$. Donc $f'(u) = 1$, $g(u) = -\cos(u)$ et

$$\begin{aligned} \int u \sin(u) du &= f(u)g(u) - \int g(u)f'(u) du = -u \cos(u) + \int \cos(u) du \\ &= -u \cos(u) + \sin(u) + C . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int \theta^3 \sin(\theta^2) d\theta = \frac{1}{2} (-u \cos(u) + \sin(u) + C) = -\frac{1}{2} \theta^2 \cos(\theta^2) + \frac{1}{2} \sin(\theta^2) + D$$

où $D = C/2$.

Question 6.6

a) Puisque le degré du numérateur est plus grand ou égale au degré du dénominateur, il faut diviser $x^4 + 3$ par $x^2 - 4x + 3$.

$$\frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} = x^2 + 4x + 13 + \frac{40x - 36}{x^2 - 4x + 3} .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int (x^2 + 4x + 13) dx + \int \frac{40x - 36}{x^2 - 4x + 3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 13x + \int \frac{40x - 36}{x^2 - 4x + 3} dx \end{aligned}$$

Pour évaluer la dernière intégrale, nous notons que $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$. Ainsi,

$$\frac{40x - 36}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 1} .$$

Comme nous avons des racines réelles distinctes, nous pouvons utiliser la technique suivante pour déterminer la valeur de A et de B . Si nous mettons l'équation précédente sur un même dénominateur commun et nous comparons les numérateurs, nous obtenons

$$40x - 36 = A(x - 1) + B(x - 3) .$$

Si $x = 1$, alors $4 = -2B$ et ainsi $B = -2$. Si $x = 3$, alors $84 = 2A$ et ainsi $A = 42$. Donc

$$\frac{40x - 36}{x^2 - 4x + 3} = \frac{42}{x - 3} + \frac{-2}{x - 1}$$

et

$$\int \frac{40x - 36}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{42}{x - 3} dx + \int \frac{-2}{x - 1} dx = 42 \ln |x - 3| - 2 \ln |x - 1| + C.$$

Nous obtenons finalement,

$$\int \frac{x^4 + 3}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 13x + 42 \ln |x - 3| - 2 \ln |x - 1| + C.$$

b) Puisque le degré du numérateur, $x - 9$, est plus petit que le degré du dénominateur, $(x + 5)(x - 2)$, nous n'avons pas à diviser. le dénominateur est déjà factorisé. Nous avons

$$\frac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)} = \frac{A}{x + 5} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x + 5)}{(x + 5)(x - 2)} = \frac{(A + B)x + (5B - 2A)}{(x + 5)(x - 2)}.$$

De $A + B = 1$, nous obtenons $B = 1 - A$ que nous substituons dans $5B - 2A = -9$ pour obtenir $5(1 - A) - 2A = -9$. Donc $A = 2$ et $B = 1 - A = -1$. Ainsi,

$$\int \frac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)} dx = \int \left(\frac{2}{x + 5} + \frac{-1}{x - 2} \right) dx = 2 \ln(x + 5) - \ln(x - 2) + C.$$

c) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, $x^2 + x + 1$, nous n'avons pas à diviser. Le polynôme $x^2 + x + 1$ n'a pas de racines réelles. Donc nous ne pouvons pas utiliser la méthode d'intégration par fractions partielles. Nous complétons le carré du polynôme $x^2 + x + 1$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dx.$$

Si nous posons $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, alors $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(u) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + C. \end{aligned}$$

d) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, $t^2 + 6t + 8$, nous n'avons pas à diviser. Le dénominateur peut être factorisé. Nous avons $t^2 + 6t + 8 = (t + 2)(t + 4)$. Nous utilisons donc la méthode d'intégration par fractions partielles. Nous avons

$$\frac{1}{(t + 2)(t + 4)} = \frac{A}{t + 2} + \frac{B}{t + 4} = \frac{A(t + 4) + B(t + 2)}{(t + 2)(t + 4)} = \frac{(A + B)t + (4A + 2B)}{(t + 2)(t + 4)}.$$

Donc $A + B = 0$ et $4A + 2B = 1$. La solution de ces deux équations est $A = -B = 1/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2 + 6t + 8} dt &= \int \frac{1}{(t+2)(t+4)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+4} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |t+2| - \frac{1}{2} \ln |t+4| + C. \end{aligned}$$

e) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, $x^2 - 4x + 13$, nous n'avons pas à diviser. Le polynôme $x^2 - 4x + 13$ n'a pas de racines réelles. Donc nous ne pouvons pas utiliser la méthode d'intégration par fractions partielles. Nous complétons le carré du polynôme $x^2 - 4x + 13$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2 + 9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1} dx.$$

Si $u = \frac{x-2}{3}$, alors $du = \frac{1}{3} dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1} \left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{3} \arctan(u) + C = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C. \end{aligned}$$

f) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, $x^2 - 9$, nous n'avons pas à diviser. Puisque le dénominateur peut être factorisé, la méthode d'intégration par fractions partielles peut être utilisée. Nous avons $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ et

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-3B)}{(x-3)(x+3)}.$$

Donc $A + B = 0$ et $3A - 3B = 1$. La solution de ces deux équations est $A = -B = 1/6$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 9} dx &= \int \frac{1}{(x-3)(x+3)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-3} dt - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+3} dt \\ &= \frac{1}{6} \ln |x-3| - \frac{1}{6} \ln |x+3| + C. \end{aligned}$$

g) Puisque le degré du numérateur, 1, est plus petit que le degré du dénominateur, $x^2 - x - 2$, nous n'avons pas à diviser. Puisque le dénominateur peut être factorisé, la méthode d'intégration par fractions partielles peut être utilisée. Nous avons $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ et

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-2B)}{(x-2)(x+1)}.$$

Donc $A + B = 0$ et $A - 2B = 1$. La solution de ces deux équations est $A = -B = 1/3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx &= \int \frac{1}{(x-2)(x+1)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

h) Puisque le degré du numérateur est plus grand ou égale au degré du dénominateur, il faut diviser $t^2 + 1$ par $t^2 + 3t + 2$.

$$\frac{t^2 + 1}{t^2 + 3t + 2} = 1 - \frac{3t + 1}{t^2 + 3t + 2}.$$

Ainsi,

$$\int \frac{t^2 + 1}{t^2 + 3t + 2} dt = \int 1 dt - \int \frac{3t + 1}{t^2 + 3t + 2} dt = t - \int \frac{3t + 1}{t^2 + 3t + 2} dt.$$

Pour évaluer la dernière intégrale, nous notons que $t^2 + 3t + 2 = (t + 2)(t + 1)$. Ainsi,

$$\frac{3t + 1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{A}{t + 2} + \frac{B}{t + 1}.$$

Comme nous avons des racines réelles distinctes, nous pouvons utiliser la technique suivante pour déterminer la valeur de A et de B . Si nous écrivons l'équation précédente sur un même dénominateur commun et nous comparons les numérateurs, nous obtenons

$$3t + 1 = A(t + 1) + B(t + 2).$$

Si $t = -1$, alors $-2 = B$ et ainsi $B = -2$. Si $t = -2$, alors $-5 = -A$ et ainsi $A = 5$. Donc

$$\frac{3t + 1}{t^2 + 3t + 2} = \frac{5}{t + 2} - \frac{2}{t + 1}$$

et

$$\int \frac{3t + 1}{t^2 + 3t + 2} dt = \int \frac{5}{t + 2} dt - \int \frac{2}{t + 1} dt = 5 \ln|t + 2| - \ln|t + 1| + C.$$

Nous obtenons finalement,

$$\int \frac{t^2 + 1}{t^2 + 3t + 2} dt = t - 5 \ln|t + 2| + \ln|t + 1| + C.$$

i) Puisque que le degré du numérateur est plus grand ou égal au degré du dénominateur, il faut premièrement diviser. Nous avons $\frac{x^3 - x - 2}{x^2 - 4} = x + \frac{3x - 2}{x^2 - 4}$.

Puisque $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, nous avons que

$$\frac{3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$$

pour deux constantes A et B . Si nous mettons sur un même commun dénominateur et comparons les numérateurs, nous obtenons

$$3x - 2 = A(x + 2) + B(x - 2) .$$

Si $x = 2$, alors $4 = 4A$ et ainsi $A = 1$. Si $x = -2$, alors $-8 = -4B$ et ainsi $B = 2$. Donc

$$\frac{3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{x + 2} .$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2 - 4} dx &= \int x dx + \int \frac{3x - 2}{x^2 - 4} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x - 2} dx + \int \frac{2}{x + 2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln |x - 2| + 2 \ln |x + 2| + C . \end{aligned}$$

j) Puisque le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur nous n'avons pas à diviser. Puisque le dénominateur peut être factorisé, la méthode d'intégration par fractions partielles peut être utilisée. Nous avons $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$ et

$$\frac{9x + 29}{x^2 + 2x - 15} = \frac{A}{x + 5} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 5)}{x^2 + 2x - 15} .$$

Donc $9x + 29 = A(x - 3) + B(x + 5)$. Si $x = 3$, alors $56 = 8B$ et ainsi $B = 7$. Si $x = -5$, alors $-16 = -8A$ et ainsi $A = 2$. Donc

$$\int \frac{9x + 29}{x^2 + 2x - 15} dx = \int \frac{2}{x + 5} dx + \int \frac{7}{x - 3} dx = 2 \ln |x + 5| + 7 \ln |x - 3| + C .$$

Question 6.7

a) Puisque le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur, nous n'avons pas à diviser. Pour utiliser la méthode d'intégration par fractions partielles, nous remarquons que $x^3 + 3x = x(x^2 + 3)$ où $x^2 + 3$ est irréductible. Nous déduisons de

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} = \frac{A(x^2 + 3) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 3)} = \frac{(A + B)x^2 + Cx + 3A}{x(x^2 + 3)}$$

que $x^2 - x + 6 = (A + B)x^2 + Cx + 3A$, En comparant les coefficients des puissances de x , nous obtenons les trois équations : $A + B = 1$, $C = -1$ et $3A = 6$. Donc $A = 2$, $B = -1$ et $C = -1$. Ainsi,

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 3} \right) dx = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 3} dx - \int \frac{1}{x^2 + 3} dx . \quad (18.6.2)$$

La première intégrale est simple à évaluer. Nous avons

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| + C_1 .$$

Pour évaluer $\int \frac{x}{x^2+3} dx$, nous posons $u = x^2 + 3$. Alors $du = 2x dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+3} (2x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \Big|_{u=x^2+3} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_{u=x^2+3} + C_2 = \frac{1}{2} \ln |x^2+3| + C_2. \end{aligned}$$

Finalement, pour évaluer

$$\int \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx,$$

nous posons $u = x/\sqrt{3}$. Alors $du = (1/\sqrt{3}) dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+3} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(x/\sqrt{3}\right)^2 + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2+1} du \Big|_{u=x/\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(u) \Big|_{u=x/\sqrt{3}} + C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C_3. \end{aligned}$$

Ainsi, (18.6.2) donne

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x} dx = 2 \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 3| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

où $C = C_1 - C_2 - C_3$.

Question 6.8

Nous avons

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int (1 + x^{4/5}) dx = x + \frac{5x^{9/5}}{9} + C$$

et

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(x + \frac{5x^{9/5}}{9} + C\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{25}{126}x^{14/5} + Cx + D,$$

où C et D sont deux constantes quelconques.

18.6.2 Définition de l'intégrale définie

Question 6.9

Nous avons $\Delta t = 1/5$ et $t_i = 0 + i\Delta t = i/5$ pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 . Il y a donc cinq intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ et 4 ; c'est-à-dire, $[0, 1/5]$, $[1/5, 2/5]$, ... et $[4/5, 5/5]$.

Posons $f(t) = 1 + t^3$. La somme de Riemann à gauche est donnée par $t_i^* = t_i = i/5$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ et 4 . Ainsi,

$$G_5 = \sum_{i=0}^4 f(t_i^*) \Delta t = \sum_{i=0}^4 \left(1 + \left(\frac{i}{5}\right)^3\right) \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}(1 + 0^3) + \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^3\right) \\
&\quad + \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{3}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^3\right) = \frac{29}{25}.
\end{aligned}$$

La somme de Riemann à droite est donnée par $t_i^* = t_{i+1} = (i+1)/5$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ et 4. Ainsi,

$$\begin{aligned}
D_5 &= \sum_{i=0}^4 f(t_i^*) \Delta t = \sum_{i=0}^4 \left(1 + \left(\frac{i+1}{5}\right)^3\right) \left(\frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{3}{5}\right)^3\right) \\
&\quad + \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^3\right) + \frac{1}{5} \left(1 + \left(\frac{5}{5}\right)^3\right) = \frac{34}{25}.
\end{aligned}$$

Question 6.10

La distance parcourue est $\int_0^{10} v(t) dt$. C'est cette intégrale qu'il faut estimer à l'aide des sommes de Riemann.

Nous avons $\Delta t = 5$ et $t_i = 0 + 5i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$. La somme de Riemann à droite est

$$\begin{aligned}
D_{10} &= \sum_{i=1}^{10} v(t_i) \Delta t = (12.2 + 11.8 + 11.5 + 11.3 + 11.2 + 11.2 \\
&\quad + 11.3 + 11.6 + 12.0 + 12.5) (5) = 583 \text{ m.}
\end{aligned}$$

La somme de Riemann à gauche est

$$\begin{aligned}
G_{10} &= \sum_{i=0}^9 v(t_i) \Delta t = (12.7 + 12.2 + 11.8 + 11.5 + 11.3 + 11.2 \\
&\quad + 11.2 + 11.3 + 11.6 + 12.0) (5) = 584 \text{ m.}
\end{aligned}$$

Question 6.11

Il faut choisir des sous-intervalles de longueur $\Delta t = (2 - 0)/5$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[0, 2]$ en sous-intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ où $t_i = 0 + i \Delta t = 2i/5$ pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5.

La somme de Riemann à droite est

$$D_5 = \sum_{i=1}^5 f(t_i) \Delta t = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{10}{5}\right)^2 \right) \left(\frac{2}{5}\right) = 3.52.$$

La somme de Riemann à gauche est

$$G_5 = \sum_{i=0}^4 f(t_i) \Delta t = \left(\left(\frac{0}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 \right) \left(\frac{2}{5}\right) = 1.92.$$

Question 6.12

Il faut choisir $\Delta x = (6 - 1)/5 = 1$ et $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + i$ pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 . Nous avons les cinq intervalles $[1, 2], [2, 3], \dots$, et $[4, 5]$.

La somme de Riemann où les points au choix sont les points milieux des intervalles est

$$S_5 = \left((\sqrt{1.5} - 2) + (\sqrt{2.5} - 2) + (\sqrt{3.5} - 2) + (\sqrt{4.5} - 2) + (\sqrt{5.5} - 2) \right) (1) \\ \approx -0.856759 .$$

Donc $\int_1^6 (\sqrt{x} - 2) dx \approx -0.856759$.

Question 6.13

Il faut choisir $\Delta x = (10 - 2.5)/5 = 1.5$ et $x_i = 2.5 + i\Delta x = 2.5 + 1.5i$ pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 . Nous avons les cinq intervalles $[2.5, 4], [4, 5.5], [5.5, 7], [7, 8.5]$ et $[8.5, 10]$ qui possèdent les points milieux $3.25, 4.75, 6.25, 7.75$ et 9.25 respectivement. Ainsi,

$$\int_{2.5}^{10} \sin(\sqrt{x}) dx \approx S_5 = \left(\sin(\sqrt{3.25}) + \sin(\sqrt{4.75}) + \sin(\sqrt{6.25}) \right. \\ \left. + \sin(\sqrt{7.75}) + \sin(\sqrt{9.25}) \right) (1.5) \approx 4.2634178 .$$

Question 6.14

Il faut choisir $\Delta x = 5$ et $x_i = i\Delta x = 5i$ pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 . Nous avons les cinq intervalles $[0, 5], [5, 10], \dots$, et $[20, 25]$.

La somme de Riemann à gauche est

$$G_5 = (f(0) + f(5) + f(10) + f(15) + f(20))(5) = -475 .$$

La somme de Riemann à droite est

$$D_5 = (f(5) + f(10) + f(15) + f(20) + f(25))(5) = -85 .$$

Puisque f est une fonction croissante, $-475 = G_5 \leq \int_0^{25} f(x) dx \leq D_5 = -85$.

Question 6.15

Il faut choisir $\Delta x = 2$ et $x_i = i\Delta x = 2i$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ et 4 . Nous avons les quatre intervalles $[0, 2], [2, 4], [4, 6]$ et $[6, 8]$.

a) Puisque v décroît, la somme à droite

$$D_4 = (v(2) + v(4) + v(6) + v(8)) \times 2 = 65$$

donne une borne inférieure et la somme à gauche

$$G_4 = (v(0) + v(2) + v(4) + v(6)) \times 2 = 73$$

donne une borne supérieure.

b) Puisque $G_N \geq \int_0^8 v(t) dt \geq D_N$ pour une fonction décroissante $v(t)$.

Il faut choisir Δt tel que

$$G_N - D_N = (v(0) - v(8)) \times \Delta t < 0.1 .$$

C'est-à-dire, $\Delta t < 0.1/(10 - 6) = 0.025$. Il faut donc avoir

$$\Delta t = \frac{8}{N} < 0.025 \Rightarrow N > \frac{8}{0.025} = 320 \text{ sous-intervalles.}$$

Question 6.16

C'est une somme de la forme $\sum_{j=1}^n f(x_j)\Delta x$ où $f(x) = x^3$, $n = 5$, $\Delta x = 0.4$, et $x_j = 0 + j\Delta x$

pour $j = 1, 2, 3, 4$ et 5 . C'est donc une somme de Riemann pour $\int_0^2 x^3 dx$.

Question 6.17

C'est la somme de Riemann à droite avec $f(x) = x \sin(x)$, $\Delta x = \pi/n$ et $x_j = 0 + \pi j/n$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. C'est donc une somme de Riemann pour l'intégrale $\int_0^\pi x \sin(x) dx$.

Question 6.18

Il faut choisir $\Delta x = 3/N$ et $x_i = 2 + i\Delta x = 2 + 3i/N$ pour $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$. Nous avons N intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Puisque la somme à droite est demandée, il faut que $x_i^* = x_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ dans la définition générale des sommes de Riemann. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_2^5 \sqrt{2 + x^{1/3}} dx &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{2 + (x_i^*)^{1/3}} \Delta x = \frac{3}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{2 + \left(2 + \frac{3(i+1)}{N}\right)^{1/3}} \\ &= \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{2 + \left(2 + \frac{3i}{N}\right)^{1/3}} . \end{aligned}$$

Question 6.19

a) La valeur de l'intégrale donnée est l'aire de la région sous la courbe $y = f(x)$, au dessus de l'axe des x , et entre les droites $x = 4$ et $x = 9$. Divisons l'intervalle en trois sous-intervalles : $[4, 5]$, $[5, 8]$ et $[8, 9]$. Entre 4 et 5, nous avons un rectangle dont l'aire est 2, Entre 5 et 8, nous avons un rectangle auquel nous soustrayons la demi d'un disque de rayon 1.5. Donc l'aire est $6 - \pi(1.5)^2/2$. Finalement, entre 8 et 9, nous avons un triangle dont l'aire est 1. La valeur de l'intégrale est $2 + 6 - \pi(1.5)^2/2 + 1 = 5.4657082647\dots$

b) La valeur de l'intégrale donnée est l'aire de la région sous la courbe $y = f(x)$, au dessus de l'axe des x , et entre les droites $x = -2$ et $x = 2$. Divisons l'intervalle en deux sous-intervalles : $[-2, 0]$ et $[0, 2]$. Entre -2 et 0 , nous avons un trapèze dont l'aire est $2(10/3 + 2)/2 = 16/3$. Entre 0 et 2 , nous avons un carré dont la longueur des côtés est 2 auquel est ajouté le quart d'un disque rayon 1.5. Donc l'aire est $4 + \pi(1.5)^2/4$. La valeur de l'intégrale est $16/3 + 4 + \pi(1.5)^2/4 = 11.1004792\dots$

Question 6.22

Nous avons l'information suivante sur la fonction f .

x	$0 < x < 5$	5	$5 < x < 10$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Comportement de f	croît et concave	max. local et concave	décroît et concave

La fonction f est concave l'intervalle $]0, 10[$ car f' est décroissante sur cet intervalle.

Puisque $f(z) = f(0) + \int_0^z f'(x) dx = 1 + \int_0^z f'(x) dx$, nous avons

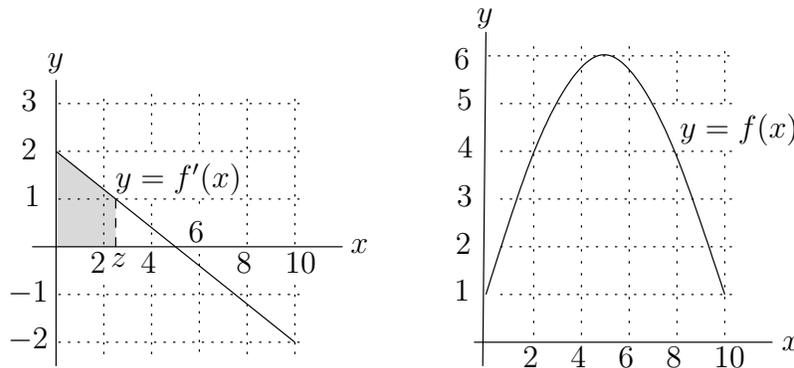
$$f(5) = f(0) + \int_0^5 f'(x) dx = 1 + \int_0^5 f'(x) dx = 1 + 5 = 6$$

car l'aire sous la courbe $y = f'(x)$ pour $0 \leq x \leq 5$ est 5 et

$$f(10) = f(0) + \int_0^{10} f'(x) dx = 1$$

car $\int_0^{10} f'(x) dx = 0$ puisque l'aire entre la courbe $y = f'(x)$ et l'axe des x pour $0 \leq x \leq 5$ est égale à l'aire entre la courbe $y = f'(x)$ et l'axe des x pour $5 \leq x \leq 10$. Il ne faut pas oublier que $\int_5^{10} f'(x) dx$ est moins l'aire entre l'axe des x et la courbe $y = f'(x)$.

Le graphe de f a la forme suivante.

**Question 6.23**

Nous avons l'information suivante sur la fonction f .

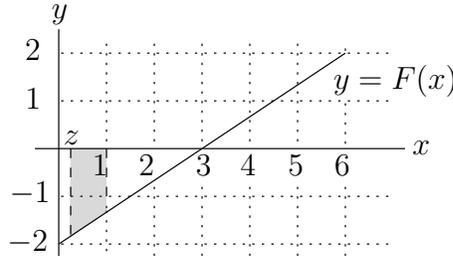
x	$0 < x < 3$	3	$3 < x < 6$
$f'(x) = F(x)$	$+$	0	$-$
Comportement de f	décroît et convexe	min. local et convexe	croît et convexe

La fonction f est convexe sur l'intervalle $]0, 6[$ car f' est croissante sur cet intervalle.

Nous avons

$$f(z) = f(1) + \int_1^z F(x) dx = 3 + \int_1^z F(x) dx .$$

Puisque $F(x) < 0$ pour $0 \leq x \leq 3$, la valeur de l'intégrale $\int_0^1 F(x) dx$ pour $z < 1$ est négative car c'est moins l'aire entre l'axe des x et la courbe $y = F(x)$.



Donc $\int_0^1 F(x) dx = -\frac{5}{3}$ et

$$f(0) = f(1) + \int_1^0 F(x) dx = f(1) - \int_0^1 F(x) dx = 3 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{14}{3} .$$

Pour $1 \leq z \leq 3$, nous avons toujours $\int_1^z F(x) dx < 0$ car $F(x) < 0$ pour $0 \leq x \leq 3$. L'intégrale est moins l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x pour $1 \leq x \leq z$. Donc $\int_1^3 F(x) dx = -\frac{4}{3}$ et

$$f(3) = f(1) + \int_1^3 F(x) dx = 3 + \int_1^3 F(x) dx = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} .$$

Finalement, pour $z > 3$, nous avons

$$f(z) = f(1) + \int_1^z F(x) dx = f(1) + \int_1^3 F(x) dx + \int_3^z F(x) dx .$$

Puisque $F(x) > 0$ pour $x > 3$, l'intégrale $\int_3^z F(x) dx$ est l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x . Donc $\int_3^6 F(x) dx = 3$ et

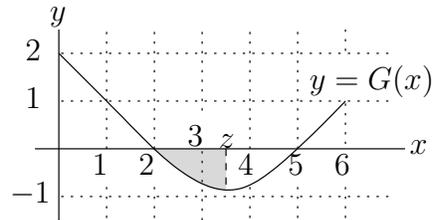
$$f(6) = f(1) + \int_1^3 F(x) dx + \int_3^6 F(x) dx = \frac{5}{3} + 3 = \frac{14}{3} .$$

Cela n'est pas surprenant car l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x pour $0 \leq x \leq 3$ est égale à l'aire entre la courbe $y = F(x)$ et l'axe des x pour $3 \leq x \leq 6$. Donc $\int_0^6 F(x) dx = 0$ et $f(6) = f(0) + \int_0^6 F(x) dx = f(0)$.

Le graphe de f a la forme suivante.

car l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x pour $1 \leq x \leq 2$ est approximativement 0.5.

Pour $2 \leq z \leq 5$. Nous avons $\int_2^z G(x) dx < 0$ car $G(x) < 0$ pour $2 < x < 5$. C'est moins l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x .



L'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x pour $2 \leq x \leq 5$ est approximativement 1.5. Donc

$$g(5) = g(1) + \int_1^2 G(x) dx + \int_2^5 G(x) dx \approx 10.5 - 1.5 = 9 .$$

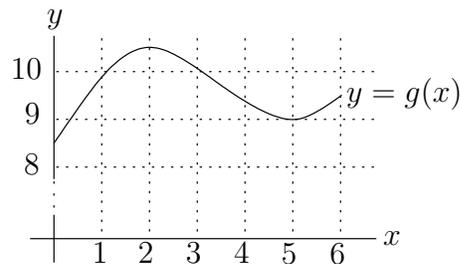
Finalement, pour $z > 5$, nous avons

$$g(z) = g(1) + \int_1^z G(x) dx = g(1) + \int_1^5 G(x) dx + \int_5^z G(x) dx .$$

Puisque $G(x) > 0$ pour $x > 5$, nous avons que $\int_5^z G(x) dx$ est l'aire entre la courbe $y = G(x)$ et l'axe des x . Donc $\int_5^6 G(x) dx \approx 0.5$ et

$$g(6) = g(1) + \int_1^5 G(x) dx + \int_5^6 G(x) dx \approx 9 + 0.5 = 9.5 .$$

Le graphe de g a la forme suivante.



Question 6.25

a) Nous avons l'information suivante sur la fonction g .

x	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$3 < x < 4$...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	
Comportement de f	décroît et concave	point d'inflexion	décroît et convexe	min. local et convexe	croît et convexe	

	4	$4 < x < 6$	6	$6 < x$
	+	+	0	-
...	point d'inflexion	croît et concave	max. local et concave	décroît et concave

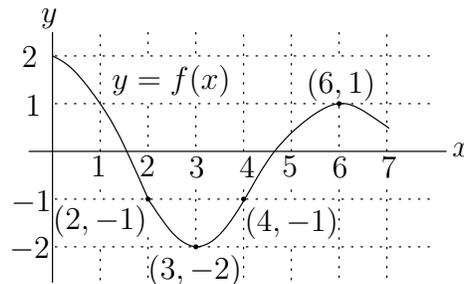
La fonction f est convexe lorsque f' est croissante et f est concave lorsque f' est décroissante.

Nous avons $f(0) = 2$ par hypothèse. Comme l'intégrale d'une fonction sur un intervalle représente l'aire sous son graphe lorsque la fonction est positive et moins l'aire au-dessus de son graphe si la fonction est négative, nous obtenons les valeurs de f suivantes.

$$f(2) = f(0) + \int_0^2 f'(x) dx = 2 - 3 = -1 \quad , \quad f(3) = f(2) + \int_2^3 f'(x) dx = -1 - 1 = -2 \quad ,$$

$$f(4) = f(3) + \int_3^4 f'(x) dx = -2 + 1 = -1 \quad \text{et} \quad f(6) = f(4) + \int_4^6 f'(x) dx = -1 + 2 = 1 \quad .$$

b)



Question 6.26

Nous avons l'information suivante sur la fonction V .

x	$0 < t < 20$	20	$20 << 60$	60	$60 < t$
$V'(t)$	-	-	-	0	+
Comportement de V	décroît et convexe	min. local et convexe	croît et convexe	point d'inflexion	croît et concave

La fonction V est convexe lorsque V' est croissante et V est concave lorsque V' est décroissante.

Si nous utilisons le Théorème fondamental du calcul, nous avons que

$$V(z) - V(0) = \int_0^z V'(t) dt \quad .$$

L'aire entre la courbe $y = V'(t)$, l'axe des t et les droites $t = 0$ et $t = 20$ est environ 500. Donc

$$V(20) = V(0) + \int_0^{20} V'(t) dt \approx 1000 - 500 = 500 \quad .$$

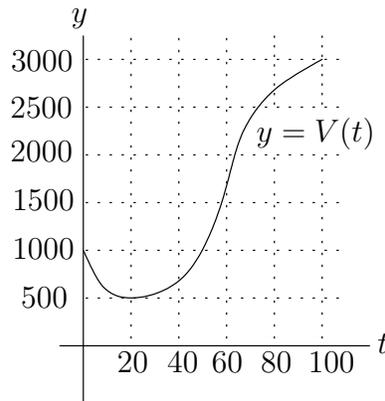
L'aire entre la courbe $y = V'(t)$, l'axe des t et les droites $t = 20$ et $t = 60$ est environ 1200. Donc

$$V(60) = V(20) + \int_{20}^{60} V'(t) dt \approx 500 + 1200 = 1700 \quad .$$

Finalement, L'aire entre la courbe $y = V'(t)$, l'axe des t et les droites $t = 60$ et $t = 100$ est environ 1300. Donc

$$V(100) = V(60) + \int_{60}^{100} V'(t) dt \approx 1700 + 1300 = 3000 .$$

Le graphe de V a la forme suivante.



18.6.3 Intégrales définies

Question 6.27

Pour calculer les intégrales, nous utilisons le Théorème fondamental du calcul.

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt = \left(2 \ln(t) + \frac{1}{4} t^2 \right) \Big|_{t=1}^2 = (2 \ln(2) + 1) - \left(2 \ln(1) + \frac{1}{4} \right) = 2 \ln(2) + \frac{3}{4}$$

et

$$\int_2^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt = \left(2 \ln(t) + \frac{1}{4} t^2 \right) \Big|_{t=2}^3 = \left(2 \ln(3) + \frac{9}{4} \right) - (2 \ln(2) + 1) = 2 \ln(3/2) + \frac{5}{4} .$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt &= \int_1^2 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt + \int_2^3 \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{2} \right) dt \\ &= 2 \ln(2) + \frac{3}{4} + 2 \ln(3/2) + \frac{5}{4} = 2 \ln(3) + 2 . \end{aligned}$$

Si les valeurs de deux des intégrales sont connues, alors la valeur de la troisième intégrale peut être déterminée à l'aide d'une des trois formules suivantes : $\int_1^3 = \int_1^2 + \int_2^3$ (que nous avons utilisé ci-dessus), $\int_1^2 = \int_1^3 - \int_2^3$ et $\int_2^3 = \int_1^3 - \int_1^2$.

Question 6.28

a)

$$\int_2^5 f(x) dx = \int_2^8 f(x) dx - \int_5^8 f(x) dx = 5 - 7 = -2 .$$

b)

$$\int_5^8 (2f(x) + 3x) dx = 2 \int_5^8 f(x) dx + 3 \int_5^8 x dx = 14 + \frac{3x^2}{2} \Big|_5^8 = \frac{145}{2}.$$

c) Si $u = -1 - 3t$, alors $du = -3 dt$, $u = 5$ lorsque $t = -2$, $u = 2$ lorsque $t = -1$ et

$$\int_{-2}^{-1} f(-1 - 3t) dt = -\frac{1}{3} \int_5^2 f(u) du = \frac{1}{3} \int_2^5 f(u) du = \frac{-2}{3}.$$

Question 6.29

a)

$$\int_1^5 \frac{5}{x^3} dx = 5 \int_1^5 x^{-3} dx = 5 \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right) \Big|_{x=1}^5 = -\frac{5}{2} (5^{-2} - 1^{-2}) = \frac{12}{5}.$$

b)

$$\begin{aligned} \int_1^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \right) dx &= 2 \int_1^8 x^{-1/3} dx + 3 \int_1^8 dx = 2 \left(\frac{3}{2} x^{2/3} \right) \Big|_1^8 + 3x \Big|_1^8 \\ &= 3 (8^{2/3} - 1^{2/3}) + 3(8 - 1) = 30. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx &= \int_1^4 e^x dx + \int_1^4 \frac{1}{x} dx = e^x \Big|_1^4 + \ln(x) \Big|_1^4 \\ &= e^4 - e + \ln(4) - \ln(1) = e^4 - e + \ln(4). \end{aligned}$$

d)

$$\int_1^2 \frac{3}{t^4} dt = 3 \int_1^2 t^{-4} dt = -t^{-3} \Big|_1^2 = -(2^{-3} - 1^{-3}) = \frac{7}{8}.$$

Question 6.30a) Si $u = x/5$, alors $du = (1/5) dx$, $u = 0$ lorsque $x = 0$ et $u = 1$ lorsque $x = 5$. Donc

$$\int_0^5 3e^{x/5} dx = 15 \int_0^5 e^{x/5} (1/5) dx = 15 \int_0^1 e^u du = 15e^u \Big|_0^1 = 15e.$$

b) Si $u = 1 + t/2$, alors $du = (1/2) dt$, $u = 1$ lorsque $x = 0$ et $u = 3$ lorsque $x = 4$. Donc

$$\int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2} \right)^4 dt = 2 \int_0^4 \left(1 + \frac{t}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) dt = 2 \int_1^3 u^4 du = \frac{2}{5} u^5 \Big|_1^3 = \frac{2}{5} (3^5 - 1^5) = \frac{484}{5}.$$

c) Si $u = 1 + 2t$, alors $du = 2 dt$, $u = 3$ lorsque $x = 1$ et $u = 21$ lorsque $x = 10$. Donc

$$\int_1^{10} (1 + 2t)^{-4} dt = \frac{1}{2} \int_1^{10} (1 + 2t)^{-4} (2) dt = \frac{1}{2} \int_3^{21} u^{-4} du = -\frac{1}{6} u^{-3} \Big|_3^{21}$$

$$= -\frac{1}{6} \left((21)^{-3} - 3^{-3} \right) = -\frac{1}{2 \times 3^4} \left(\frac{1}{7^3} - 1 \right) = \frac{19}{3^2 \times 7^3}.$$

d) Si $u = 1 + 4t$, alors $du = 4 dt$, $u = 1$ lorsque $x = 0$ et $u = 9$ lorsque $x = 2$. Donc

$$\int_0^2 \frac{1}{1+4t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{1+4t} (4) dt = \frac{1}{4} \int_1^9 \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln(u) \Big|_1^9 = \frac{1}{4} (\ln(9) - \ln(1)) = \frac{1}{2} \ln(3).$$

e) Si $u = 1 + 2x^3$, alors $du = 6x^2 dx$, $u = 1$ lorsque $x = 0$ et $u = 3$ lorsque $x = 1$. Ainsi,

$$\int_0^1 x^2 (1 + 2x^3)^5 dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (1 + 2x^3)^5 (6x^2) dx = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du = \frac{1}{36} u^6 \Big|_1^3 = \frac{81}{4}.$$

f) Si $u = x^{1/2}$, alors $du = (1/2)x^{-1/2} dx$, $u = 1$ lorsque $x = 1$ et $u = 2$ lorsque $x = 4$. Ainsi,

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = 2 \int_1^2 e^u du = 2e^u \Big|_1^2 = 2(e^2 - e) = 2e(e - 1).$$

Question 6.32

a)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (2 \sin(\theta) + 3 \cos(\theta)) d\theta &= 2 \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta + 3 \int_0^\pi \cos(\theta) d\theta = -2 \cos(\theta) \Big|_0^\pi + 3 \sin(\theta) \Big|_0^\pi \\ &= -2 (\cos(\pi) - \cos(0)) + 3 (\sin(\pi) - \sin(0)) = 4. \end{aligned}$$

b) Si $u = \sin(x)$, alors $du = \cos(x) dx$, $u = 1$ lorsque $x = \pi/2$ et $u = 1/\sqrt{2}$ lorsque $x = 3\pi/4$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x) \cos^3(x) dx &= \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5(x) (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} u^5 (1 - u^2) du \\ &= - \int_{1/\sqrt{2}}^1 (u^5 - u^7) du = \left(-\frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{8} \right) \Big|_{1/\sqrt{2}}^1 \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} - \frac{1}{128} = -\frac{11}{384}. \end{aligned}$$

c) Nous avons que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^2(x) dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2x))(1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(2x)) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{2} (1 + \cos(4x)) \right) dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4x)) dx. \end{aligned}$$

Si $u = 4x$, alors $du = 4 dx$, $u = 0$ lorsque $x = 0$ et $u = 2\pi$ lorsque $x = \pi/2$. Ainsi,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4x)) \times 4 dx = \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(u)) du$$

$$= \frac{1}{32} (u - \sin(u)) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{16} .$$

Si nous interprétons l'intégrale en termes de l'aire de la région entre la courbe et l'axe des x , il est facile de constater que $\int_0^{2\pi} \cos(x) dx = 0$ car l'aire de la région en dessous de l'axe des x égale l'aire de la région au dessus de l'axe des x .

d) Si $u = \tan(x)$, alors $du = \sec^2(x) dx$, $u = 0$ lorsque $x = 0$ et $u = 1$ lorsque $x = \pi/4$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) \sec^4(x) dx &= \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) \sec^2(x) \sec^2(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) (1 + \tan^2(x)) \sec^2(x) dx \\ &= \int_0^1 u^2 (1 + u^2) du = \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15} . \end{aligned}$$

e) Puisque $\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 4} = x + \frac{-3x + 1}{x^2 + 4}$, nous avons

$$\int_0^2 \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 4} dx = \int_0^2 x dx - 3 \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4} dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx .$$

Pour évaluer $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4}$, nous posons $u = x^2 + 4$. Donc $du = 2x dx$, $u = 4$ lorsque $x = 0$ et $u = 8$ lorsque $x = 2$. Ainsi,

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(u) \Big|_{u=4}^8 = \frac{1}{2} (\ln(8) - \ln(4)) = \frac{1}{2} \ln(2) .$$

Pour évaluer

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{(x/2)^2 + 1} dx ,$$

nous posons $u = x/2$. Donc $du = (1/2) dx$, $u = 0$ lorsque $x = 0$ et $u = 1$ lorsque $x = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{(x/2)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{2} \arctan(u) \Big|_{u=0}^1 = \frac{1}{2} (\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8} . \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^2 \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 4} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^2 - \frac{3}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{8} = 2 - \frac{3}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{8} .$$

Question 6.33

a) Si $t = \sec(\theta)$, alors $dt = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$, $\theta = \pi/4$ lorsque $t = \sqrt{2}$ et $\theta = \pi/3$ lorsque $t = 2$. Notons que nous considérons \sec comme une fonction de $[0, \pi/2[$ dans $[1, \infty[$ pour que la fonction inverse arcsec soit bien définie. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3 \sqrt{t^2 - 1}} dt &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sec^3(\theta) \sqrt{\sec^2(\theta) - 1}} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sec^3(\theta) \tan(\theta)} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sec^2(\theta)} d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2(\theta) d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = 0.0974060450 \dots \end{aligned}$$

car $\sqrt{\sec^2(\theta) - 1} = \sqrt{\tan^2(\theta)} = \tan(\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi/2[$.

Si nous avons calculé l'intégrale indéfinie en premier, les calculs auraient été un peu plus difficiles. Comme précédemment, nous posons $t = \sec(\theta)$. Donc $dt = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^3 \sqrt{t^2 - 1}} dt &= \int \frac{1}{\sec^3(\theta) \sqrt{\sec^2(\theta) - 1}} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{1}{\sec^3(\theta) \tan(\theta)} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta = \int \frac{1}{\sec^2(\theta)} d\theta = \int \cos^2(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) + C \\ &= \frac{\operatorname{arcsec}(t)}{2} + \frac{1}{4} (2 \cos(\theta) \sin(\theta)) + C \\ &= \frac{\operatorname{arcsec}(t)}{2} + \frac{1}{4} \left(2 \frac{1}{t} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} \right) + C = \frac{\operatorname{arcsec}(t)}{2} + \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{2t^2} + C \end{aligned}$$

puisque $t = \sec(\theta)$ donne $\cos(\theta) = 1/t$ et $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - (1/t)^2}$.

b) Si $t = 4 \sin(\theta)$, alors

$$\sqrt{16 - t^2} = 4\sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = 4|\cos(\theta)| = 4 \cos(\theta)$$

car $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. De plus, $dt = 4 \cos(\theta) d\theta$, $\theta = 0$ lorsque $t = 0$ et $\theta = \pi/3$ lorsque $t = 2\sqrt{3}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{16 - t^2}} dt &= \int_0^{\pi/3} \frac{4^3 \sin^3(\theta)}{4 \cos(\theta)} 4 \cos(\theta) d\theta = 64 \int_0^{\pi/3} \sin^3(\theta) d\theta \\ &= 64 \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta . \end{aligned}$$

Si $u = \cos(\theta)$, alors $du = -\sin(\theta) d\theta$, $u = 1$ lorsque $\theta = 0$ et $u = 1/2$ lorsque $\theta = \pi/3$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{16-t^2}} dt &= 64 \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta = -64 \int_1^{1/2} (1 - u^2) du \\ &= 64 \int_{1/2}^1 (1 - u^2) du = 64 \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{1/2}^1 = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Question 6.34

a) Nous avons

$$\int_{-2}^2 (y^4 + 5y^3) dy = \int_{-2}^2 y^4 dy + 5 \int_{-2}^2 y^3 dy.$$

Puisque $y \mapsto y^3$ est une fonction impaire que nous intégrons sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, nous avons que $\int_{-2}^2 y^3 dy = 0$. Puisque $y \mapsto y^4$ est une fonction paire que nous intégrons sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, nous avons que

$$\int_{-2}^2 y^4 dy = 2 \int_0^2 y^4 dy = \frac{2}{5} y^5 \Big|_{y=0}^2 = \frac{2^6}{5}.$$

Donc

$$\int_{-2}^2 (y^4 + 5y^3) dy = \frac{2^6}{5}.$$

b) Puisque $x \mapsto x\sqrt{x^2 + a^2}$ est une fonction impaire et que nous intégrons sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, nous avons que

$$\int_{-a}^a x\sqrt{x^2 + a^2} dx = 0.$$

Question 6.35

a)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 - 20 \sin(x)) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx - 20 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) dx.$$

Puisque $x \mapsto \sin(x)$ est une fonction impaire que nous intégrons sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, nous avons que $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) dx = 0$. Puisque $x \mapsto x^2$ est une fonction paire que nous intégrons sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, nous avons que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx = 2 \int_0^{\pi/2} x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{y=0}^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

Donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^2 - 20 \sin(x)) dx = \frac{\pi^3}{12}.$$

b) Sur l'intervalle $[2, 5]$, nous avons trois périodes de la fonction $\cos(2\pi(x - 2))$. Si nous considérons la région bornée qui est délimitée par l'axe des x et la courbe $\cos(2\pi(x - 2))$, l'aire en dessous de l'axe des x est égale à l'aire au-dessus de l'axe des x . Donc $\int_2^5 \cos(2\pi(x - 2)) dx = 0$.

Note : Si $y = 2\pi(x - 2)$, alors $dy = 2\pi dx$, $y = 0$ lorsque $x = 2$ et $y = 6\pi$ lorsque $x = 5$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_2^5 \cos(2\pi(x - 2)) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_2^5 \cos(2\pi(x - 2)) (2\pi) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{6\pi} \cos(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} (\sin(y)) \Big|_0^{6\pi} = \frac{1}{2\pi} (\sin(6\pi) - \sin(0)) = 0 . \end{aligned}$$

C'est beaucoup de calculs que nous avons pu éviter avec notre observation sur le graphe de la fonction $\cos(2\pi(x - 2))$ ci-dessus.

c) Puisque la fonction $f(x) = x^{16} \sin(2x)$ est impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)$) et que le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'origine, Nous avons que $\int_{-\pi}^{\pi} x^{16} \sin(2x) dx = 0$.

Question 6.36

Puisque

$$\int_a^x f(s) ds = \int_a^x (5s + 1)^7 ds = \frac{(5s + 1)^8}{40} \Big|_a^x = \frac{(5x + 1)^8}{40} - \frac{(5a + 1)^8}{40} ,$$

nous avons

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(s) ds = \frac{d}{dx} \left(\frac{(5x + 1)^8}{40} - \frac{(5a + 1)^8}{40} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{(5x + 1)^8}{40} \right) = (5x + 1)^7 = f(x) .$$

Question 6.37

Nous utilisons la deuxième version du Théorème fondamental pour résoudre ces problèmes.

a)

$$g'(y) = \frac{d}{dy} \left(\int_2^y t^2 \sin(t) dt \right) = t^2 \sin(t) \Big|_{t=y} = y^2 \sin(y) ,$$

b) Nous avons que $h(x) = h_1(h_2(y))$, où $h_1(z) = \int_2^z \arctan(t) dt$ et $h_2(x) = 1/x$. Ainsi, $h'(x) = h_1'(h_2(x))h_2'(x)$. Or,

$$h_1'(z) = \frac{d}{dz} \left(\int_2^z \arctan(t) dt \right) = \arctan(t) \Big|_{t=z} = \arctan(z) \quad \text{et} \quad h_2'(x) = -\frac{1}{x^2} .$$

Donc

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \arctan \left(\frac{1}{x} \right) .$$

18.6.4 Intégrales impropres

Question 6.38

a)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-3x} dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q e^{-3x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_0^q \right) = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3q} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \lim_{q \rightarrow \infty} e^{-3q} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

car $\lim_{q \rightarrow \infty} e^{-3q} = 0$.

b)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(2+5x)^4} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q \frac{1}{(2+5x)^4} dx .$$

Si $u = 2 + 5x$, alors $du = 5 dx$, $u = 2$ lorsque $x = 0$ et $u = 2 + 5q$ lorsque $x = q$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^q \frac{1}{(2+5x)^4} dx &= \frac{1}{5} \int_0^q \frac{1}{(2+5x)^4} 5 dx = \frac{1}{5} \int_2^{2+5q} \frac{1}{u^4} du \\ &= -\frac{1}{15} u^{-3} \Big|_2^{2+5q} = -\frac{1}{15} \left((2+5q)^{-3} - 2^{-3} \right) . \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(2+5x)^4} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} -\frac{1}{15} \left(\frac{1}{(2+5q)^3} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{120} .$$

L'intégrale converge.

c) Remarquons qu'en plus d'être une intégrale sur un domaine infini, l'intégrande $1/\sqrt[3]{x}$ n'est pas borné lorsque x approche l'origine. Il faut donc diviser l'intégrale en deux.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx .$$

Nous aurions pu choisir une autre valeur que 1 pour diviser l'intégrale, cela ne changerait pas le résultat final. Nous avons

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \int_q^1 x^{-1/3} dx = \lim_{q \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} x^{2/3} \right) \Big|_q^1 = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (1 - q^{2/3}) = \frac{3}{2} .$$

La première intégrale impropre converge. Par contre,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q x^{-1/3} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} x^{2/3} \right) \Big|_1^q = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{3}{2} (q^{2/3} - 1) = \infty .$$

La seconde intégrale impropre diverge. Donc $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ diverge.

Nous aurions pu utiliser les propositions 6.5.4 et 6.5.10 pour répondre à cette question mais un retour à la définition de l'intégrale impropre a parfois ses bénéfices.

d)

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_2^q x^{-3/2} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(-2x^{-1/2} \right) \Big|_2^q \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left(-2q^{-1/2} + \sqrt{2} \right) = \sqrt{2} = 1.414\dots \end{aligned}$$

L'intégrale converge.

e)

$$\int_1^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}} dx = \lim_{q \rightarrow 1^+} \int_q^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}} dx .$$

Si $y = \ln(x)$, alors $dy = (1/x) dx$, $y = \ln(q)$ lorsque $x = q$ et $y = 1$ lorsque $x = e$. Ainsi,

$$\int_q^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}} dx = \int_{\ln(q)}^1 \frac{2}{\sqrt{y}} dy = \int_{\ln(q)}^1 2y^{-1/2} dy = 4y^{1/2} \Big|_{\ln(q)}^1 = 4 - 4\sqrt{\ln(q)} .$$

Donc

$$\int_1^e \frac{2}{x\sqrt{\ln(x)}} dx = \lim_{q \rightarrow 1^+} \left(4 - 4\sqrt{\ln(q)} \right) = 4 - 4\sqrt{\ln(1)} = 4 .$$

L'intégrale converge.

f)

$$\int_{-\infty}^0 3x^2 e^{-x^3} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \int_q^0 3x^2 e^{-x^3} dx .$$

Si $y = -x^3$, alors $dy = -3x^2 dx$, $y = -q^3$ lorsque $x = q$ et $y = 0$ lorsque $x = 0$. Ainsi,

$$\int_q^0 3x^2 e^{-x^3} dx = - \int_{-q^3}^0 e^y dy = -e^y \Big|_{-q^3}^0 = e^{-q^3} - 1 .$$

Donc

$$\int_{-\infty}^0 3x^2 e^{-x^3} dx = \lim_{q \rightarrow -\infty} \left(e^{-q^3} - 1 \right) = +\infty .$$

L'intégrale diverge.

i) C'est la somme de deux intégrales impropres :

$$\int_0^3 \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx = \int_0^2 \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx + \int_2^3 \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx .$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx &= \lim_{N \rightarrow 2^-} \int_0^N \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx = \lim_{N \rightarrow 2^-} \left(-\frac{6}{(x-2)^{1/3}} \right) \Big|_0^N \\ &= \lim_{N \rightarrow 2^-} \left(-\frac{6}{(N-2)^{1/3}} - \frac{6}{2^{1/3}} \right) = \infty . \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_0^3 \frac{2}{(x-2)^{4/3}} dx$ diverge.

j) Considérons $\int_0^N \frac{x}{1+x^4} dx$. Si $u = x^2$, alors $du = 2x dx$, $u = N^2$ lorsque $x = N$ et $u = 0$ lorsque $x = 0$. Donc

$$\int_0^N \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{N^2} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \arctan(u) \Big|_0^{N^2} = \frac{1}{2} \arctan(N^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{N^2} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \arctan(N^2) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

L'intégrale converge.

k)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+3x)^{3/2}} dx &= \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^q \frac{1}{(1+3x)^{3/2}} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \left. -\frac{2}{3(1+3x)^{1/2}} \right|_0^q \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3(1+3q)^{1/2}} \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+3q)^{1/2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

car $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+3q)^{1/2}} = 0$. L'intégrale converge.

l) Puisque $\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)}$, l'intégrande n'est pas borné au voisinage du point $x = 2$ de l'intervalle $[0, 4]$. Il faut diviser l'intégrale en deux intégrales impropres.

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6} dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2+x-6} dx + \int_2^4 \frac{1}{x^2+x-6} dx.$$

La méthode des fractions partielles donne $\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{5(x-2)} - \frac{1}{5(x+3)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 2^-} \int_0^q \frac{1}{x^2+x-6} dx &= \lim_{q \rightarrow 2^-} \frac{1}{5} \int_0^q \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \lim_{q \rightarrow 2^-} \frac{1}{5} (\ln|x-2| - \ln|x+3|) \Big|_0^q \\ &= \lim_{q \rightarrow 2^-} \frac{1}{5} (\ln|q-2| - \ln(2) - \ln|q+3| + \ln(3)) = -\infty \end{aligned}$$

car $\lim_{q \rightarrow 2^-} \ln|q+3| = \ln(5)$ et $\lim_{q \rightarrow 2^-} \ln|q-2| = \lim_{q \rightarrow 0^+} \ln(q) = -\infty$. Donc $\int_0^2 \frac{1}{x^2+x-6} dx$ diverge. Ce qui implique que $\int_0^4 \frac{1}{x^2+x-6} dx$ diverge. L'intégrale converge.

n) Nous avons par définition que

$$\int_1^2 \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \lim_{q \rightarrow 1^+} \int_q^2 \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

Or,

$$\int_q^2 \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \int_q^2 3(x-1)^{-1/3} dx = \frac{9}{2}(x-1)^{2/3} \Big|_q^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}(q-1)^{2/3}.$$

Ainsi,

$$\int_1^2 \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \lim_{q \rightarrow 1^+} \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}(q-1)^{2/3} \right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}(1-1)^{2/3} = \frac{9}{2}.$$

Nous avons utilisé le fait que $(x-1)^{2/3}$ est continue à $x=1$. L'intégrale converge.

p)

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{q \rightarrow 2^-} \int_1^q \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx.$$

Si $u = 2 - x$, alors $du = -dx$, $u = 2 - q$ lorsque $x = q$ et $u = 1$ lorsque $x = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^q \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx &= - \int_1^{2-q} \frac{2-u}{\sqrt{u}} du = - \int_1^{2-q} (2u^{-1/2} - u^{1/2}) du \\ &= - \left(4u^{1/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} \right) \Big|_1^{2-q} = -4(2-q)^{1/2} + \frac{2}{3}(2-q)^{3/2} + \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{q \rightarrow 2^-} \left(-4(2-q)^{1/2} + \frac{2}{3}(2-q)^{3/2} + \frac{10}{3} \right) = \frac{10}{3}.$$

L'intégrale converge.

q)

$$\int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx = \lim_{q \rightarrow 8^-} \int_0^q \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx.$$

Si $u = 8 - x$, alors $du = -dx$, $u = 8$ lorsque $x = 0$ et $u = 8 - q$ lorsque $x = q$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^q \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx &= - \int_8^{8-q} \frac{8-u}{u^{2/3}} du = \int_{8-q}^8 (8u^{-2/3} - u^{1/3}) du = \left(24u^{1/3} - \frac{3}{4}u^{4/3} \right) \Big|_{8-q}^8 \\ &= \left(24 \times 8^{1/3} - \frac{3}{4} \times 8^{4/3} \right) - \left(24(8-q)^{1/3} - \frac{3}{4}(8-q)^{4/3} \right) \\ &= 36 - 24(8-q)^{1/3} + \frac{3}{4}(8-q)^{4/3}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx = \lim_{q \rightarrow 8^-} \left(36 - 24(8-q)^{1/3} + \frac{3}{4}(8-q)^{4/3} \right) = 36.$$

L'intégrale converge.

Question 6.39

a) Remarquons que l'intégrande $1/(x^{1/3} + x^3)$ n'est pas borné lorsque x approche l'origine. Puisque que $x^{1/3} + x^3 \geq x^{1/3}$ pour $0 \leq x \leq 1$, nous avons que $0 \leq 1/(x^{1/3} + x^3) \leq 1/x^{1/3}$ pour $0 < x \leq 1$. Il découle du test de comparaison que $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3} + x^3} dx$ converge car $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ converge d'après la proposition 6.5.10 avec $p = 1/3 < 1$.

b) Le problème est que le domaine d'intégration est infini. Puisque que $x^{1/3} + x^3 \geq x^3$ pour $x \geq 1$, nous avons que $0 \leq 1/(x^{1/3} + x^3) \leq 1/x^3$ pour $x \geq 1$. Il découle du test de comparaison que $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3} + x^3} dx$ converge car $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ converge d'après la proposition 6.5.4 avec $p = 3 > 1$.

c) Comme en (b), le problème est que le domaine d'intégration est infini. Puisque $x^2 + x^{4/3} \leq 2x^2$ pour $x \geq 1$, nous avons que $1/(x^2 + x^{4/3}) \geq 1/(2x^2)$ pour $x \geq 1$. Donc $x/(x^2 + x^{4/3}) \geq 1/(2x)$ pour $x \geq 1$. Il découle du test de comparaison que $\int_1^\infty \frac{x}{x^2 + x^{4/3}} dx$ diverge car $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx$ diverge d'après la proposition 6.5.4 avec $p = 1 \leq 1$.

Question 6.40

a) Remarquons que l'intégrande $1/(x^2 e^x)$ n'est pas borné lorsque x approche l'origine. Puisque que $e^x \leq e$ pour $0 \leq x \leq 1$, nous avons que $x^2 e^x \leq e x^2$ pour $0 \leq x \leq 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{x^2 e^x} \geq \frac{1}{e x^2}$$

pour $0 \leq x \leq 1$. Il découle du test de comparaison que $\int_0^1 \frac{1}{x^2 e^x} dx$ diverge car $\int_0^1 \frac{1}{e x^2} dx = \frac{1}{e} \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverge d'après la proposition 6.5.10 avec $p = 2 \geq 1$.

b) Puisque que $\sqrt{x} + e^x \geq e^x$ pour $x \geq 0$, nous avons

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x} + e^x} \leq \frac{1}{e^x}$$

pour $x \geq 0$. Or,

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q e^{-x} dx = \lim_{q \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_1^q = \lim_{q \rightarrow \infty} (-e^{-q} + e^{-1}) = \frac{1}{e}.$$

Il découle du test de comparaison que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x} + e^x} dx$ converge car $\int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx$ converge. De plus,

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x} + e^x} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx = \frac{1}{e}.$$

c) Puisque $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^3 + 2} \leq \frac{1}{x^3}$ pour $x \geq 1$, il découle du test de comparaison que $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^3 + 2} dx$ converge car $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ converge d'après la proposition 6.5.4 avec $p = 3 > 1$. De plus,

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^3 + 2} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}.$$

d) Puisque $0 \leq \frac{1 + \cos^2 x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$ pour $x \neq 0$, il découle du test de comparaison que $\int_1^\infty \frac{1 + \cos^2 x}{x^2} dx$ converge car $\int_1^\infty \frac{2}{x^2} dx$ converge d'après la proposition 6.5.4 avec $p = 2 >$

1. De plus, fait,

$$0 \leq \int_1^{\infty} \frac{1 + \cos^2 x}{x^2} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx = 2 .$$

e) Notons que $2\sqrt{x} + 1 \geq 1$ et, pour $0 \leq x \leq 1$, $x^4 + 3x \leq x + 3x = 4x$. Donc

$$\frac{2\sqrt{x} + 1}{x^4 + 3x} \geq \frac{1}{4x}$$

pour $0 \leq x \leq 1$. Il découle du test de comparaison que $\int_0^1 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x^4 + 3x} dx$ diverge car $\int_0^1 \frac{1}{4x}$ diverge d'après la proposition 6.5.10 avec $p = 1 \geq 1$.

g) Pour x très grand, nous avons que $\frac{2\sqrt{x} + 3}{x^2 + 2x}$ se « comporte » comme $\frac{2\sqrt{x}}{x^2} = \frac{2}{x^{3/2}}$. Puisque l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge grâce à la proposition 6.5.4 avec $p = 3/2 > 1$, il est tentant de d'essayer de démontrer que $\frac{2\sqrt{x} + 3}{x^2 + 2x} < \frac{A}{x^p}$ pour une constante A et $p > 1$.

Puisque

$$2\sqrt{x} + 3 \leq 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 5\sqrt{x} \tag{18.6.3}$$

pour $x \geq 1$ et $x^2 + 2x \geq x^2$ pour $x \geq 1$, nous obtenons

$$\frac{1}{x^2 + 2x} \leq \frac{1}{x^2} \tag{18.6.4}$$

pour $x \geq 1$. Nous déduisons de (18.6.3) et (18.6.4) que

$$0 \leq \frac{2\sqrt{x} + 3}{x^2 + 2x} = (2\sqrt{x} + 3) \left(\frac{1}{x^2 + 2x} \right) \leq 5\sqrt{x} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \frac{5}{x^{3/2}}$$

pour $x \geq 1$.

Il découle du test de comparaison que $\int_1^{\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3}{x^2 + 2x} dx$ converge car $\int_1^{\infty} \frac{5}{x^{3/2}} dx$ converge. De plus,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_1^{\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3}{x^2 + 2x} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{5}{x^{3/2}} dx = 5 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N x^{-3/2} dx \\ &= -10 \lim_{N \rightarrow \infty} x^{-1/2} \Big|_1^N = -10 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} - 1 \right) = 10 . \end{aligned}$$

18.7 Applications de l'intégrale

18.7.1 Aire entre deux courbes

Question 7.1

a) Notons que $x^2 < 2x$ pour $0 < x < 2$. Ainsi, l'aire de la région pour $0 \leq x \leq 2$ est

$$\int_0^2 |2x - x^2| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

b) Notons que $x^2 > 2x$ pour $2 < x \leq 4$. Ainsi, l'aire de la région pour $0 \leq x \leq 4$ est

$$\begin{aligned} \int_0^4 |2x - x^2| dx &= \int_0^2 (2x - x^2) dx + \int_2^4 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^4 = \frac{4}{3} + \left(\frac{4^3}{3} - 4^2 \right) + \frac{4}{3} = 8. \end{aligned}$$

c) Notons que $e^{2x}/2 < e^x$ pour $x < \ln(2)$ et $\ln(2) > 1$. Ainsi, l'aire de la région pour $0 \leq x \leq 1$ est

$$\int_0^1 \left| e^x - \frac{e^{2x}}{2} \right| dx = \int_0^1 \left(e^x - \frac{e^{2x}}{2} \right) dx = \left(e^x - \frac{e^{2x}}{4} \right) \Big|_0^1 = e - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \approx 0.12101780.$$

d) Les valeurs de x aux points où la parabole $y = \frac{x^2}{2}$ et la droite $y = \frac{3}{2} + x$ se coupent sont les solutions de

$$\frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} + x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 = (x - 3)(x + 1) = 0.$$

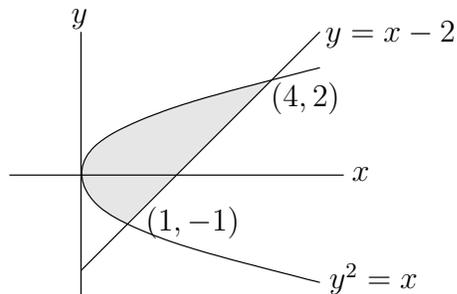
Donc la parabole et la droite se coupent lorsque $x = -1$ et $x = 3$. Puisque $\frac{3}{2} + x > \frac{x^2}{2}$ pour $-1 < x < 3$, l'aire de la région bornée par la droite et la parabole est

$$A = \int_{-1}^3 \left(\frac{3}{2} + x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{16}{3}.$$

e) Les valeurs de x aux points où la parabole $y = 7x - x^2$ et la droite $y = x$ se coupent sont les solutions de $7x - 3x^2 = x$; c'est-à-dire, de $0 = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$. Nous trouvons $x = 0$ et $x = 2$. Entre 0 et 2, nous avons que $7x - x^2 > x$. Donc, l'aire de la région bornée par la droite et la parabole est

$$A = \int_0^2 (7x - 3x^2 - x) dx = \left(-x^3 + 3x^2 \right) \Big|_0^2 = 4.$$

f) Les valeurs de y aux points où la parabole $x = y^2$ et la droite $x - y = 2$ se coupent sont les solutions de $y^2 = x = y + 2$; c'est-à-dire, $y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1) = 0$. On obtient $y = -1$ et $y = 2$. Nous obtenons la figure suivante.



Ainsi, l'aire A de la région bornée par la droite et la parabole est

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx .$$

nous ne sommes pas obligé d'intégrer par rapport à x . Le calcul de l'aire devient beaucoup plus simple si nous intégrons par rapport à y . Ainsi,

$$A = \int_{-1}^2 ((y + 2) - y^2) dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} .$$

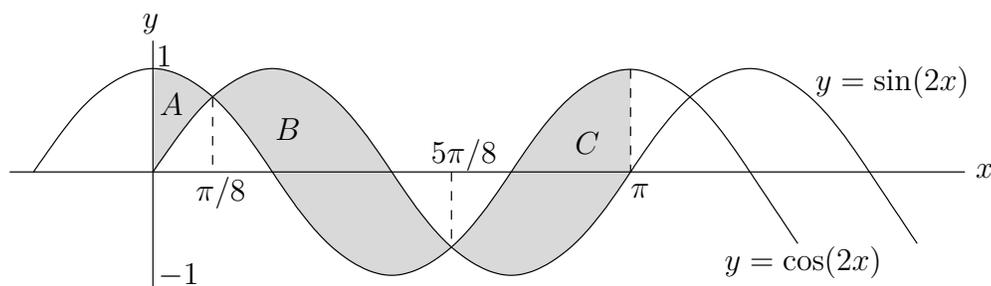
g) Les valeurs de x aux points où la courbe $y = \frac{x}{1+x}$ et la droite $y = \frac{x}{2}$ se coupent sont les solutions de $\frac{x}{1+x} = \frac{x}{2}$. Nous avons la solution $x = 0$. Si $x \neq 0$, nous pouvons diviser les deux côtés de l'équation par x pour obtenir $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$. Une seconde solution de l'équation est donc $x = 1$.

Puisque $f(1/2) = 1/3 > 1/4 = g(1/2)$, nous avons que $f(x) > g(x)$ pour $0 < x < 1$. Donc, l'aire de la région entre la courbe et la droite est

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x} - \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2} \right) dx = \left(x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} - \ln(2) \approx 0.056852819 . \end{aligned}$$

Question 7.2

Notons que $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ sont de période π . Nous retrouvons le graphe de ces deux fonctions dans la figure ci-dessous.



Pour être en mesure de calculer l'aire entre les courbes $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$, il faut déterminer sur quels intervalles $\cos(x) > \sin(x)$ et sur quels intervalles nous avons l'inégalité inverse. Il faut donc trouver x entre 0 et π tel que $\cos(2x) = \sin(2x)$. C'est-à-dire,

$$\tan(2x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = 1$$

et $0 \leq x \leq \pi$. Puisque $\tan(\theta) = 1$ pour $\theta = \pi/4, 5\pi/4, 9\pi/4, \dots$ (nous pouvons ignorer les valeurs négatives de θ car $x \geq 0$), nous obtenons $2x = \pi/4, 5\pi/4, \dots$. La restriction $0 \leq x \leq \pi$ donne seulement deux valeurs $x = \pi/8$ et $x = 5\pi/8$.

L'aire entre $y = \cos(2x)$ et $y = \sin(2x)$ est la somme de l'aire des trois régions A , B et C représentées dans la figure précédente.

$$\text{aire de A} = \int_0^{\pi/8} (\cos(2x) - \sin(2x)) \, dx .$$

$$\text{aire de B} = \int_{\pi/8}^{5\pi/8} (\sin(2x) - \cos(2x)) \, dx .$$

$$\text{aire de C} = \int_{5\pi/8}^{\pi} (\cos(2x) - \sin(2x)) \, dx .$$

Nous avons

$$\text{aire de A} = \left(\frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) \Big|_0^{\pi/8} = \frac{1}{2} \sin(\pi/4) + \frac{1}{2} \cos(\pi/4) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} ,$$

$$\begin{aligned} \text{aire de B} &= \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \Big|_{\pi/8}^{5\pi/8} \\ &= -\frac{1}{2} \sin(5\pi/4) - \frac{1}{2} \cos(5\pi/4) + \frac{1}{2} \sin(\pi/4) + \frac{1}{2} \cos(\pi/4) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\text{aire de C} = \left(\frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) \Big|_{5\pi/8}^{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin(5\pi/4) - \frac{1}{2} \cos(5\pi/4) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} .$$

L'aire total est donc

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} .$$

Question 7.3

a) Le nombre de bactéries est

$$\begin{aligned} n(T) &= 10^6 + \int_0^T r(t) \, dt = 10^6 + \int_0^T \frac{1000}{(2 + 3t)^{3/4}} \, dt \\ &= 10^6 + \frac{4000}{3} (2 + 3t)^{1/4} \Big|_0^T = 10^6 + \frac{4000}{3} \left((2 + 3T)^{1/4} - 2^{1/4} \right) . \end{aligned}$$

b) Puisque $\lim_{T \rightarrow \infty} (2 + 3T)^{1/4} = +\infty$, nous avons que $\lim_{T \rightarrow \infty} n(T) = +\infty$. Cette population de bactéries ne peut pas supporter le taux de croissance.

c) Nous cherchons T tel que $n(T) = 2 \times 10^6$. Donc,

$$10^6 + \frac{4000}{3} \left((2 + 3T)^{1/4} - 2^{1/4} \right) = 2 \times 10^6 \Leftrightarrow (2 + 3T)^{1/4} - 2^{1/4} = \frac{3}{4000} \times 10^6 = 750$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{3} \left((750 + 2^{1/4})^4 - 2 \right) \approx 1.06139271674 \times 10^{11} \text{ min.}$$

Concrètement, nous pourrions dire que la population supporte le taux de croissance car le nombre de bactéries augmente très lentement ; il faut plus de 73, 707, 827 jours pour que la population double.

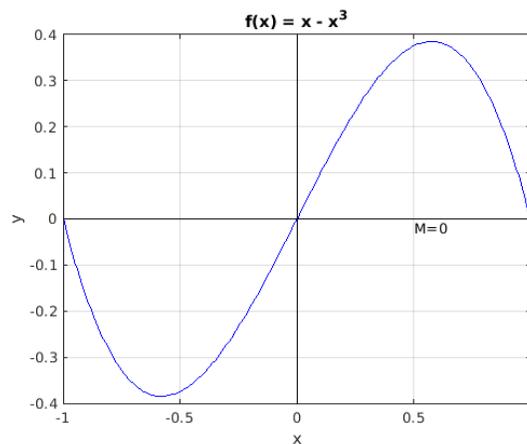
18.7.2 Valeur moyenne d'une fonction

Question 7.4

La valeur moyenne est

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Cela ne devrait pas surprendre personne car la fonction f est impaire et le domaine d'intégration $[-1, 1]$ est un intervalle symétrique par rapport à l'origine, donc l'intégrale est nulle.



Question 7.5

a) Le volume d'eau qui a été versé dans le bocal au cours des deux premières minutes est

$$V = \int_0^2 r(t) dt = 4 \int_0^2 (3t - t^2) dt = 4 \left(\frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 \left(6 - \frac{8}{3} \right) = \frac{40}{3} \text{ litres.}$$

b) Le taux moyen pour les deux premières minutes est

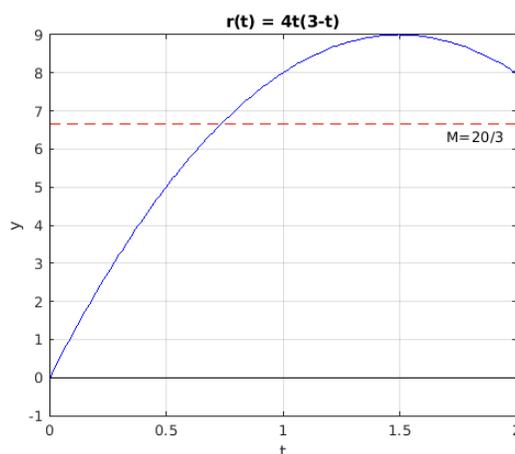
$$M_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 r(t) dt = \frac{20}{3} \text{ litres/minute.}$$

c) le taux moyen pour la première minute est

$$M_1 = \frac{1}{1} \int_0^1 r(t) dt = 4 \left(\frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 4 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{14}{3} \text{ litres/minute.}$$

Il n'est pas surprenant que M_1 soit plus petit que M_2 car l'aire sous le graphe de r et au-dessus de l'axe des t augmente plus rapidement lorsque t est près du milieu de l'intervalle $[0, 3]$.

d)



Question 7.6

Notons que $r(0) = r(15) = 0$ et $r(t) > 0$ pour $0 < t < 15$.

Le volume d'eau qui a entré dans le réservoir au cours des 15 premières heures est

$$V = \int_0^{15} r(t) dt = \int_0^{15} (360t - 39t^2 + t^3) dt = \left(180t^2 - 13t^3 + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{15} = 9,281.25 \text{ litres.}$$

Le taux moyen pour les 15 premières heures est

$$M_2 = \frac{1}{15} \int_0^{15} r(t) dt = \frac{9,281.25}{15} = 618.75 \text{ litres/heure.}$$

Question 7.7

Puisque $E(t) = 360t - 39t^2 + t^3$ est un polynôme de degré trois dont le coefficient de t^3 est positif, nous avons que

t	$t < 0$	0	$0 < t < 15$	15	$15 < t < 24$	24	$24 < 4$
$E(t)$	-	0	+	0	-	0	+

Donc,

$$|360t - 39t^2 + t^3| = \begin{cases} 360t - 39t^2 + t^3 & \text{si } 0 \leq t \leq 15 \\ -360t + 39t^2 - t^3 & \text{si } 15 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

L'énergie totale produite est

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{15} (360t - 39t^2 + t^3) dt + \int_{15}^{24} (-360t + 39t^2 - t^3) dt \\ &= \left(180t^2 - 13t^3 + \frac{t^4}{4}\right) \Big|_0^{15} + \left(-180t^2 + 13t^3 - \frac{t^4}{4}\right) \Big|_{15}^{24} = 11650.5 \text{ J.} \end{aligned}$$

Le taux moyen de production d'énergie est $M = \frac{T}{24} = \frac{11650.5}{24} = 485.4375 \text{ J/hr.}$

Question 7.8

a) Il faut trouver le maximum absolu et le minimum absolu de ρ sur l'intervalle $0 \leq x \leq 200$ où la variable x est mesurée en cm.

$$\begin{aligned} \rho'(x) &= 4 \times 10^{-8} x(240 - x) - 2 \times 10^{-8} x^2 \\ &= 6 \times 10^{-8} x(160 - x). \end{aligned}$$

Les points critiques dans l'intervalle $[0, 200]$ sont $x = 0$ et $x = 160$.

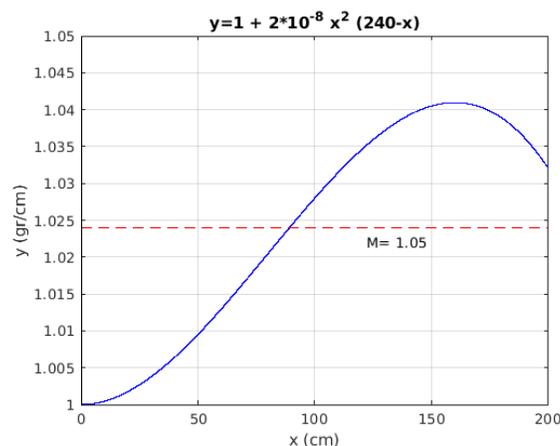
Puisque $\rho(0) = 1$, $\rho(160) = 1.04096$ et $\rho(200) = 1.032$, le maximum absolu est 1.04096 g/cm lorsque $x = 160 \text{ m}$ et le minimum absolu est 1 g/cm lorsque $x = 0 \text{ cm}$.

b) La masse m du fils est

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{200} \rho(x) dx = \int_0^{200} (1 + 2 \times 10^{-8} x^2(240 - x)) dx \\ &= \int_0^{200} (1 + 4.8 \times 10^{-6} x^2 - 2 \times 10^{-8} x^3) dx = \left(x + 1.6 \times 10^{-6} x^3 - 5 \times 10^{-9} x^4\right) \Big|_0^{200} \\ &= 200 + 12.8 - 8 = 204.8 \text{ g.} \end{aligned}$$

c) Remarquons que la densité moyen du fils est $204.8/200 = 1.024 \text{ g/cm}$. C'est bien une valeur entre la densité minimale 1 g/cm et la densité maximale 1.0496 g/cm du fils.

d)



18.7.3 Volume d'un objet

Question 7.9

Les tranches perpendiculaires à l'axe du cône sont des disques. Le rayon de ces disques varie de 2 à la base du cône à 0 au sommet du cône. L'aire des disques est donc $A(h) = \pi(r(h))^2$ où le rayon r est une fonction linéaire de la hauteur h à laquelle se trouve la tranche. L'équation qui définit r est donc l'équation de la droite qui passe par les points $(h, r) = (0, 2)$ et $(h, r) = (3, 0)$. La pente de cette droite est $(0 - 2)/(3 - 0) = -2/3$. L'équation de cette droite dans la forme point-pente est $(r - 2) = (-2/3)(h - 0) = -2h/3$. Donc, $r = 2 - 2h/3$ et ainsi $A(h) = \pi(2 - 2h/3)^2$. Le volume V du cône est

$$V = \int_0^3 A(h) \, dh = \pi \int_0^3 (2 - 2h/3)^2 \, dh .$$

Si $u = 2 - 2h/3$, alors $du = (-2/3) \, dh$, $u = 2$ lorsque $h = 0$ et $u = 0$ lorsque $h = 3$. Ainsi,

$$V = -\frac{3\pi}{2} \int_2^0 u^2 \, du = \frac{3\pi}{2} \int_0^2 u^2 \, du = \frac{\pi}{2} u^3 \Big|_{u=0}^2 = 4\pi ,$$

Question 7.11

L'aire d'une section transverse est donnée par la formule $A(x) = \pi \left(\frac{e^{2x} - e^x}{2} \right)^2$. Le volume est donc

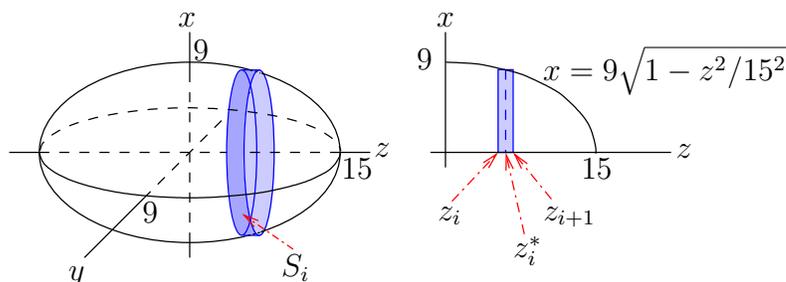
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) \, dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (e^{2x} - e^x)^2 \, dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x}) \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{4} e^{4x} - \frac{2}{3} e^{3x} + \frac{1}{2} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{e^4}{4} - \frac{2e^3}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{12} \right) \approx 3.03978 . \end{aligned}$$

Question 7.12

Si nous assumons que l'origine est au centre du ballon et que l'axe des z est l'axe principal du ballon, le ballon peut alors être décrit par l'équation

$$\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{9^2} + \frac{z^2}{15^2} = 1 .$$

Nous représentons le ballon dans la figure ci-dessous.



Nous allons calculer le volume de la moitié du ballon ; c'est-à-dire, pour $z \geq 0$. Le volume du ballon sera donc le double de la valeur que nous trouverons.

Soit k , un entier positif. Posons $\Delta z = 15/k$ et $z_i = i\Delta z = 15i/k$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Nous obtenons une partition de l'intervalle $[0, 15]$ en sous-intervalles de la forme $[z_i, z_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

La i^e tranche du ballon est donnée par l'intersection du ballon avec la région définie par $\{(x, y, z) : z_i \leq z \leq z_{i+1}\}$. Pour estimer le volume V_i de la i^e tranche, nous choisissons z_i^* dans l'intervalle $[z_i, z_{i+1}]$ et nous considérons le cylindre S_i , qui sont représentés dans la figure ci-dessus. La hauteur de ce cylindre est Δz et son rayon est $9\sqrt{1 - \frac{(z_i^*)^2}{15^2}}$. Le volume du cylindre S_i est donc

$$9^2\pi \left(1 - \frac{(z_i^*)^2}{15^2}\right) \Delta z = \frac{9\pi}{25} (15^2 - (z_i^*)^2) \Delta z .$$

Pour Δz très petit, le volume de la i^e tranche du ballon est approximativement le volume de S_i . La somme du volume de chaque cylindre S_i donne donc un estimé du volume V de l'a moitié du ballon.

$$V \approx \sum_{i=0}^{k-1} \frac{9\pi}{25} (15^2 - (z_i^*)^2) \Delta z .$$

C'est une somme de Riemann. Si $k \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$V = \int_0^{15} \frac{9\pi}{25} (15^2 - z^2) dz .$$

Ainsi, le volume de la moitié du ballon est

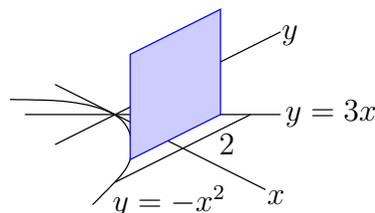
$$V = \frac{9\pi}{25} \int_0^{15} (15^2 - z^2) dz = \frac{9\pi}{25} \left(15^2 z - \frac{z^3}{3}\right) \Big|_0^{15} = \frac{9\pi}{25} \left(\frac{2 \times 15^3}{3}\right) = 810\pi \text{ cm}^3 .$$

Question 7.13

b) Nous intégrons pour $0 \leq x \leq 2$. La tranche à x est un demi-cercle de rayon \sqrt{x} . Donc l'aire de la tranche est $A(x) = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}\pi x$. Ainsi,

$$V = \frac{1}{2} \int_0^2 \pi x dx = \left(\frac{1}{4}\pi x^2\right) \Big|_0^2 = \pi .$$

c) Nous avons la situation suivante.



L'aire d'une tranche est $A(x) = (3x + x^2)^2$. Ainsi, le volume est donné par

$$V = \int_0^2 A(x) dx = \int_0^2 (9x^2 + 6x^3 + x^4) dx = \left(3x^3 + \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = 54.4 .$$

Question 7.15

b) Le volume V obtenu par la rotation de la région bornée par la courbe $y = \cos(x/2)$, l'axe des x , et les droites $x = -\pi$ et $x = \pi$ est donné par

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx .$$

Puisque

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) ,$$

nous obtenons

$$V = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x)) dx = \frac{\pi}{2} (x + \sin(x)) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} (2\pi) = \pi^2 .$$

Question 7.16

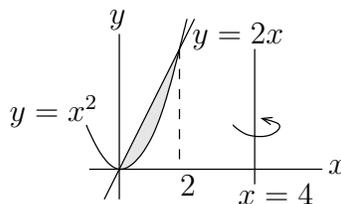
a) Nous devons premièrement trouver l'intersection de la droite avec la parabole. Les valeurs de x aux points où la droite et la parabole se coupent sont les solutions de $x^2 = x$; c'est-à-dire, $x = 0$ ou 1 .

Puisque $x > x^2$ pour $0 < x < 1$, le volume est donné par

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left((x - (-1))^2 - (x^2 - (-1))^2 \right) dx \\ &= \pi \int_0^1 (-x^4 - x^2 + 2x) dx = \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7\pi}{15} . \end{aligned}$$

b) Nous devons premièrement trouver l'intersection de la droite avec la parabole. Les valeurs de x aux points où les deux courbes se coupent sont les solutions de $x^2 = 2x$; c'est-à-dire, $x = 0$ ou 2 .

Nous obtenons la figure ci-dessous.



Nous utilisons la méthode des cylindres,

$$V = 2\pi \int_a^b |x - c| |f(x) - g(x)| dx ,$$

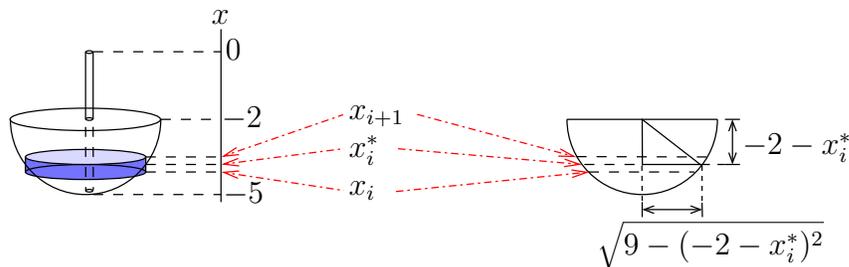
pour calculer le volume du solide de révolution. Nous avons $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $c = 4$, $a = 0$ et $b = 2$. Ainsi,

$$V = 2\pi \int_0^2 (4 - x)(2x - x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (8x - 6x^2 + x^3) dx = 2\pi \left(4x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 8\pi .$$

18.7.4 Masse d'un objet

18.7.5 Travail

Question 7.23



Partageons l'intervalle $[-5, -2]$ en N sous-intervalles de longueur $\Delta x = 3/N$ pour obtenir des sous-intervalles de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = -5 + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, \dots, N$. De plus, choisissons x_i^* entre x_i et x_{i+1} pour $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Le travail nécessaire pour retirer du réservoir la mince couche d'eau entre x_i et x_{i+1} est approximativement

$$9.8 \times 1000 \times \underbrace{0 - x_i^*}_{\text{profondeur}} \times \underbrace{\pi(9 - (-2 - x_i^*)^2)\Delta x}_{\text{volume de la couche d'eau}} .$$

Il ne faut pas oublier que $x_i^* < 0$ par construction.

Donc, le travail pour vider le réservoir est approximativement

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} -9.8 \times 1000 \times x_i^* \times \pi(9 - (-2 - x_i^*)^2)\Delta x = -9,800\pi \sum_{i=0}^{N-1} x_i^*(9 - (-2 - x_i^*)^2)\Delta x .$$

C'est une somme de Riemann pour $-9,800\pi \int_{-5}^{-2} x(9 - (-2 - x)^2) dx$. Donc, si $N \rightarrow \infty$, nous obtenons que le travail pour vider le réservoir est

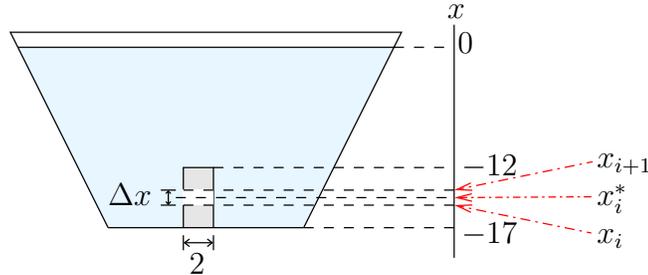
$$W = -9,800\pi \int_{-5}^{-2} x(9 - (-2 - x)^2) dx$$

$$\begin{aligned}
&= -9,800\pi \int_{-5}^{-2} (5x - 4x^2 - x^3) dx = -9,800\pi \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-5}^{-2} \\
&= 9,800\pi \times 56.25 \approx 1.731 \times 10^6 \text{ J.}
\end{aligned}$$

Question 7.25

Si l'axe des x est vertical et l'origine se trouve à trois mètres au dessus du citerne, il faut intégrer de -9 à -3 . De plus, une tranche horizontal est un disque de 2 m de rayon. Son aire est donc $A(x) = \pi \times 2^2$. Le travail pour vider le réservoir est

$$W = 9.8 \times 1000 \times \pi \times 2^2 \int_{-9}^{-3} (0 - x) dx = 39200\pi \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-9}^{-3} = 1411200\pi \text{ J.}$$

18.7.6 Force**Question 7.27**

Partageons le segment $[-17, -12]$ en N sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $\Delta x = 5/N$ où $x_i = -17 + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, N$. De plus, choisissons x_i^* entre x_i et x_{i+1} pour $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

La pression sur la petite section (en blanc) d'une largeur de 2 m et d'une hauteur de Δx à une profondeur de x_i^* est approximativement

$$9.8 \times 1000 \times \underbrace{(0 - x_i^*)}_{\text{profondeur}} \times \underbrace{2\Delta x}_{\text{aire de la section}} .$$

Comme toujours, il ne faut pas oublier que $x_i^* < 0$ par construction.

Donc la pression totale sur la porte est approximativement

$$\sum_{j=0}^{N-1} -9.8 \times 1000 \times x_i^* \times 2\Delta x = -19,600 \sum_{i=0}^{N-1} x_i^* \Delta x .$$

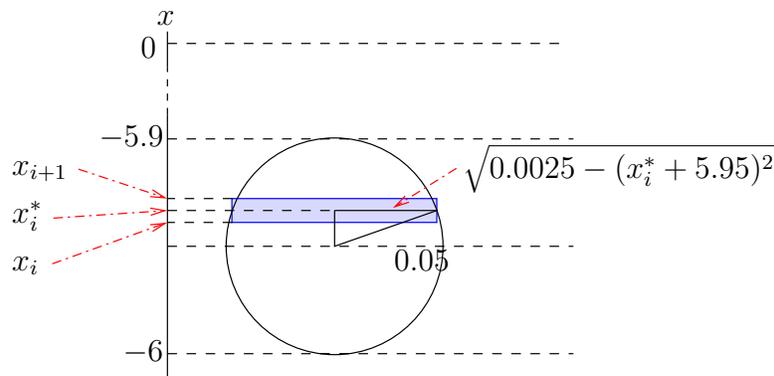
C'est une somme de Riemann pour l'intégrale $-19,800 \int_{-17}^{-12} x \, dx$. Donc, si $n \rightarrow \infty$, nous obtenons que la pression sur la porte est

$$P = -19,800 \int_{-17}^{-12} x \, dx = -9,800x^2 \Big|_{-17}^{-12} = 1.421 \times 10^6 \text{ N.}$$

Question 7.29

Supposons que l'origine est au niveau de l'eau du lac et que la direction positive est vers le haut. Il faut calculer la force exercée sur le côté du cylindre pour $-6 \leq x \leq -5.90$.

Partageons l'intervalle $[-6, -5.9]$ en k sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de longueur $\Delta x = 0.1/k$ où $x_i = -6 + i\Delta x$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$.



la pression à une profondeur de x_i^* mètres, où $x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}$, est $-9.8 \times 1000 \times x_i^* = -9800 x_i^*$. Comme toujours, il ne fait pas oublier que $x_i^* < 0$ par construction.

La force F_i exercée sur la surface entre x_i et x_{i+1} mètres est approximativement la force exercée sur le rectangle (en bleu dans la figure ci-dessus) de hauteur Δx et de longueur $2\sqrt{0.0025 - (x_i^* + 5.95)^2}$. Donc,

$$\begin{aligned} F_i &\approx \underbrace{(-9800 x_i^*)}_{\text{pression}} \underbrace{\left(2\sqrt{0.0025 - (x_i^* + 5.95)^2} \Delta x\right)}_{\text{aire}} \\ &= -19600 x_i^* \sqrt{0.0025 - (x_i^* + 5.95)^2} \Delta x . \end{aligned}$$

Ainsi, la force F à une des extrémités est approximativement

$$F \approx \sum_{i=0}^{k-1} F_i = -19600 x_i^* \sqrt{0.0025 - (x_i^* + 5.95)^2} \Delta x .$$

Cette somme approche la valeur de F si $k \rightarrow \infty$. Comme c'est aussi une somme de Riemann pour $-19600 \int_{-6}^{-5.9} x \sqrt{0.0025 - (x + 5.95)^2} \, dx$, nous obtenons

$$F = -19600 \int_{-6}^{-5.9} x \sqrt{0.0025 - (x + 5.95)^2} \, dx$$

lorsque $k \rightarrow \infty$.

Si $u = x + 5.95$, alors $du = dx$, $u = -0.05$ lorsque $x = -6$ et $u = 0.05$ lorsque $x = -5.95$.
Donc

$$\begin{aligned} F &= -19600 \int_{-0.05}^{0.05} (u - 5.95) \sqrt{0.0025 - u^2} \, du \\ &= -19600 \int_{-0.05}^{0.05} u \sqrt{0.0025 - u^2} \, du + 19600 \times 5.95 \int_{-0.05}^{0.05} \sqrt{0.0025 - u^2} \, du . \end{aligned}$$

Puisque la première intégrale est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique à l'origine, cette intégrale est nul. La deuxième intégrale est l'aire d'un demi-disque de rayon 0.05, donc sa valeur est $\pi \frac{0.0025}{2}$.

$$\text{Donc } F = 19600 \times 5.95 \times \frac{0.0025}{2} = 145.775\pi \text{ N.}$$

18.7.7 Centre de masse

Question 7.31

La masse de la région est

$$m = 3 \int_0^2 e^x \, dx = 3e^x \Big|_0^2 = 3(e^2 - 1) .$$

Le moment par rapport à l'axe des y est

$$M_y = 3 \int_0^2 x e^x \, dx .$$

Utilisons la méthode d'intégration par parties pour évaluer cette intégrale. Si $f(x) = x$ et $g'(x) = e^x$, alors $f'(x) = 1$ et $g(x) = e^x$. Donc

$$M_y = 3 \left(x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x \, dx \right) = 3 \left(2e^2 - e^x \Big|_0^2 \right) = 3(2e^2 - e^2 + 1) = 3(e^2 - 1) .$$

Le moment par rapport à l'axe des x est

$$M_x = \frac{3}{2} \int_0^2 (e^x)^2 \, dx = \frac{3}{4} e^{2x} \Big|_0^2 = \frac{3(e^4 - 1)}{4} .$$

Ainsi, le centre de masse est

$$\left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right) = \left(\frac{3(e^2 - 1)}{3(e^2 - 1)}, \frac{3(e^4 - 1)/4}{3(e^2 - 1)} \right) = \left(1, \frac{e^2 + 1}{4} \right) \approx (1, 2.097265) .$$

18.7.8 Applications à l'économie

18.7.9 Test de l'intégrale

Question 7.36

a) Nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = g(n)$ pour $g(x) = xe^{-2x^2}$.

Puisque g est une fonction positive et décroissante pour $x > 0.5$ car $g'(x) = (1 - 4x^2)e^{-2x^2} < 0$ pour $x > 0.5$, nous pouvons utiliser le test de l'intégrale.

Évaluons l'intégrale

$$\int_1^N xe^{-2x^2} dx .$$

Soit $u = -2x^2$, alors $du = -4x dx$, $u = -2N^2$ lorsque $x = N$ et $u = -2$ lorsque $x = 1$. Donc

$$\int_1^N xe^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int_1^{-2N^2} e^u du = \frac{1}{4} \int_{-2N^2}^{-2} e^u du = \frac{1}{4} e^u \Big|_{-2N^2}^{-2} = \frac{1}{4} (e^{-2} - e^{-2N^2}) .$$

Ainsi,

$$\int_1^{\infty} xe^{-2x^2} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N xe^{-2x^2} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (e^{-2} - e^{-2N^2}) = \frac{e^{-2}}{4} .$$

Donc, puisque l'intégrale $\int_1^{\infty} xe^{-2x^2} dx$ converge, la série converge.

Question 7.38

Nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ où $a_n = f(n)$ pour $f(x) = \frac{1}{x^{8/3}}$.

Puisque $f(x)$ est une fonction positive décroissante qui converge vers 0 lorsque $x \rightarrow \infty$ et $\int_1^{\infty} f(x) dx = \frac{3}{5}$, il découle du test de l'intégrale que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}}$ converge car $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

De plus,

$$0 \leq S - S_N \leq \int_N^{\infty} \frac{1}{x^{8/3}} dx = \left(-\frac{3}{5x^{5/3}} \right) \Big|_N^{\infty} = \frac{3}{5N^{5/3}} .$$

Il faut choisir N assez grand (mais pas inutilement grand) pour que $\frac{3}{5N^{5/3}} < 10^{-3}$. Donc, il faut avoir

$$600 < N^{5/3} \Rightarrow (600)^{3/5} \approx 46.4398 < N .$$

Nous pouvons prendre $N = 47$.

18.8 Séries entières

18.8.1 Convergence des séries entières

Question 8.1

a) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{n^2}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + 1/n} \right)^2 = 1,$$

le rayon de convergence est 1.

Il faut considérer les extrémités de l'intervalle $] -1, 1[$. Pour $x = 1$, nous avons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

qui converge (le cas $p > 1$ de la proposition 2.2.16). De même, pour $x = -1$, nous avons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

qui converge (c'est une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ avec $b_n = \frac{1}{n^2}$ qui satisfait $b_n > b_{n+1} \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$). L'intervalle de convergence est donc $[-1, 1]$.

b) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{n^2}{10^n}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 10^n}{n^2 10^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{10},$$

le rayon de convergence est 10.

Il faut considérer les extrémités de l'intervalle $[-10, 10]$. Pour $x = 10$, nous avons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2$$

qui diverge car n^2 ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. De même, Pour $x = -10$, nous avons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$$

qui diverge car $\{(-1)^n n^2\}_{n=1}^{\infty}$ ne converge pas vers 0. L'intervalle de convergence est donc $] -10, 10[$.

c) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{1}{n!}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

le rayon de convergence est $+\infty$ et l'intervalle de convergence est \mathbb{R} .

d) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+2)^n$ avec $a_n = \sqrt{n}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1,$$

le rayon de convergence est 1.

Il faut considérer les extrémités de l'intervalle $] -3, -1[$. Ne pas oublier que cette série est centrée à $x = -2$. Pour $x = -1$, nous avons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$$

qui ne converge pas car $\sqrt{n} \not\rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De même, pour $x = -3$, nous avons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$$

qui ne converge pas car $(-1)^n \sqrt{n} \not\rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. L'intervalle de convergence est $] -3, -1[$.

e) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ avec $a_n = (-1)^n \frac{1}{n 4^n}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n 4^n}{(-1)^n (n+1) 4^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 + 4/n} = \frac{1}{4},$$

le rayon de convergence est 4.

Il faut considérer les extrémités de l'intervalle $] -3, 5[$. Pour $x = 5$, nous avons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

qui converge (c'est une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ avec $b_n = \frac{1}{n}$ qui satisfait $b_n > b_{n+1} \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$). Par contre, pour $x = -3$, nous avons la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

qui ne converge pas (le cas $p = 1$ de la proposition 2.2.16). L'intervalle de convergence est donc $] -3, 5]$.

f) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ avec

$$a_n = \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1+1/n}{1+2/n} \right) = 0, \end{aligned}$$

le rayon de convergence est $+\infty$. L'intervalle de convergence est toute la droite réelle.

i) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+3)^n$ avec $a_n = \frac{(-5)^n}{n}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 5^{n+1}}{(n+1) 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{1+1/n} = 5,$$

le rayon de convergence est $1/5$.

Il faut analyser les extrémités de l'intervalle $] -16/5, -14/5[$. Pour $x = -16/5$, nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui diverge. C'est la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ avec $p \leq 1$ qui diverge.

Pour $x = -14/5$, nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. C'est une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ avec $b_n = 1/n$, une suite de termes positifs décroissante qui converge vers 0. La série alternée converge donc.

l'intervalle de convergence est $] -16/5, -14/5]$.

j) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ avec $a_n = \frac{3^n}{n^2}$. Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \right) \left(\frac{3^n}{n^2} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \right) \left(\frac{n^2}{3^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{1}{1 + 2/n + 1/n^2} \right) = 3, \end{aligned}$$

le rayon de convergence est $1/3$.

Il faut analyser les extrémités de l'intervalle $]5/3, 7/3[$. Pour $x = 5/3$, nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ qui converge. C'est une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ avec $b_n = 1/n^2$, une suite de termes positifs décroissante qui converge vers 0. La série alternée converge donc.

Pour $x = 7/3$, nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. C'est la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ avec $p > 1$ qui converge.

l'intervalle de convergence est $[5/3, 7/3]$.

k) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ avec $a_n = \frac{1}{3^n \sqrt{n}}$. Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^{n+1} \sqrt{n+1}} \right) \left(\frac{1}{3^n \sqrt{n}} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \sqrt{n}}{3^{n+1} \sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

le rayon de convergence est 3.

Il faut analyser les extrémités de l'intervalle $] -1, 5[$. Pour $x = -1$, nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. C'est une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, une suite de termes positifs décroissante qui converge vers 0. La série alternée converge donc.

Pour $x = 5$, Nous avons la séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Cette série divergence selon la proposition 2.2.16 avec $p = 1/2 \leq 1$.

L'intervalle de convergence est $[-1, 5]$.

Question 8.2

a) Nous devons retourner au Test de d'Alembert car nous n'avons pas exactement une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Soit $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1} (2n-1)!}{(-1)^n x^{2n-1} (2n+1)!} \right| = |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ converge donc pour tout x . Ainsi, le rayon de convergence est $+\infty$ et l'intervalle de convergence est toute la droite réelle.

b) Nous devons retourner au Test de d'Alembert car nous n'avons pas exactement une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Soit $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3} (2n+1)}{(-1)^n x^{2n+1} (2n+3)} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{2+3/n} = x^2.$$

Il découle du Test de d'Alembert que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge si $x^2 < 1$ et diverge si $x^2 > 1$. En d'autres mots, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Le rayon de convergence est 1.

Il faut considérer les extrémités de l'intervalle $] -1, 1[$. Pour $x = 1$, nous avons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

qui converge (c'est une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ avec $b_n = 1/(2n+1)$ qui satisfait $b_n > b_{n+1} \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$). De même, pour $x = -1$, nous avons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

qui converge comme nous venons de le voir. L'intervalle de convergence est donc $[-1, 1]$.

18.8.2 Fonctions définies par des séries

Question 8.3

a) Si nous multiplions la série géométrique

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1,$$

par x , nous obtenons la série

$$\frac{x}{1-x} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}, \quad |x| < 1,$$

grâce au théorème 2.2.11. Ainsi, le rayon et l'intervalle de convergence de cette dernière série sont identiques à ceux de la série géométrique. Plus précisément, le rayon de convergence est 1 et l'intervalle de convergence est $] -1, 1[$.

b) Si nous substituons u par x^2 dans la série géométrique

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1,$$

nous obtenons

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad |x^2| < 1 \quad (\text{i.e. } |x| < 1).$$

Ainsi, la somme de la série est

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

Nous obtenons de plus que le rayon de convergence est 1 et l'intervalle de convergence est $] - 1, 1[$.

Question 8.4

Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^{n+1} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^{n+1} . \quad (18.8.1)$$

Cela suggère premièrement de substituer u par $2x$ dans la série géométrique

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n , \quad |u| < 1 ,$$

pour obtenir

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n , \quad |2x| < 1 \quad (\text{i.e. } |x| < 1/2) .$$

La présence du coefficient n dans la séries en (18.8.1) (et le fait que la série débute à $n = 1$) suggère de dériver la série précédente pour obtenir

$$\frac{2}{(1-2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2x)^{n-1} , \quad |x| < \frac{1}{2} .$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^{n-1} , \quad |x| < \frac{1}{2} .$$

Il suffit de multiplier la série précédente par $x^2 = (2x)^2/4$ pour obtenir

$$\frac{x^2}{(1-2x)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^{n+1} , \quad |x| < \frac{1}{2} .$$

Nous ne pouvons pas conclure que le rayon de convergence de la série (18.8.1) est $1/2$ et l'intervalle de convergence est $] - 1/2, 1/2[$ car le théorème 8.2.1 dit que le rayon de convergence de la série obtenue de la dérivée d'une autre série sera au moins égale à celui de la série qui a été dérivée, il pourrait être plus grand.

Il faut utiliser le test du quotient pour trouver le rayon de (18.8.1). C'est une série au voisinage de l'origine dont le terme général est $a_n = n2^{n-1}x^{n+1}$. Cette série va converger pour x tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)2^n x^{n+2}}{n2^{n-1}x^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2|x| \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2|x| < 1 .$$

Le rayon de convergence de la série (18.8.1) est donc bien $1/2$. Pour déterminer l'intervalle de convergence, il faut étudier la convergence de la série à $x = -1/2$ et $x = 1/2$. Pour $x = 1/2$, nous avons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4}$$

qui diverge car $n/4 \not\rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour $x = -1/2$, nous avons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{4}$$

qui diverge car $(-1)^{n+1}n/4 \not\rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. L'intervalle de convergence de la série (18.8.1) est donc $] -1/2, 1/2[$.

Question 8.5

a) Nous avons une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_n = n/3^n$. Puisque,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3},$$

le rayon de convergence est 3.

Il faut considérer les extrémités de l'intervalle $] -3, 3[$. Pour $x = 3$ nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} n$ qui diverge car le terme général n ne converge pas vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour $x = -3$,

nous avons la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ qui aussi diverge pour la même raison que la série précédente.

L'intervalle de convergence, et donc le domaine de g , est $] -3, 3[$.

b) Grâce au théorème 8.2.1, nous avons que $g'(x)$ existe pour $-3 < x < 3$ et est donné par la série que nous obtenons après avoir dérivé chacun des termes de la série (8.6.1). Donc

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{nx^n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{3^n}.$$

En particulier, cette série converge pour $-3 < x < 3$. Ainsi,

$$g'(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}.$$

c) De même, grâce au théorème 8.2.1, nous avons que $\int_0^2 g(x) dx$ existe car l'intervalle d'intégration $[0, 2]$ est inclus dans l'intervalle de convergence $] -3, 3[$ de la série de $g(x)$. Il suffit d'intégrer chacun des termes de la série (8.6.1) entre 0 et 2 pour obtenir la série qui représente $\int_0^2 g(x) dx$. Ainsi,

$$\int_0^2 g(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^2 \frac{nx^n}{3^n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nx^{n+1}}{(n+1)3^n} \right) \Big|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^{n+1}}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n+1} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

et cette série converge.

Question 8.6

Si nous substituons u par $-x^2$ dans la série géométrique

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1,$$

nous obtenons

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad , \quad |x^2| < 1 \quad (\text{i.e. } |x| < 1) .$$

Si nous multiplions cette dernière égalité des deux côtés par $2x$, nous obtenons

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \quad , \quad |x| < 1 .$$

Si nous intégrons les deux côtés de cette égalité de 0 à t où $|t| < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \ln(1+t^2) &= \int_0^t \frac{2x}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^{2n+1} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{n+1} \quad , \quad |t| < 1 , \end{aligned} \quad (18.8.2)$$

grâce au théorème 8.2.1.

(18.8.2) démontre que le rayon de convergence est au moins 1. Est-ce qu'il est plus grand que 1. Pour déterminer le rayon de convergence de la série en (18.8.2), nous utilisons le test de d'Alembert. Nous avons une série au voisinage de l'origine dont le terme général est $a_n = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{n+1}$. Cette série va converger pour t tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+4} (n+1)}{(-1)^n t^{2n+2} (n+2)} \right| = t^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = t^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n}{1+2/n} = t^2 < 1 .$$

Le rayon de convergence¹ est donc 1.

Nous avons

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)2^{2n+2}} . \quad (18.8.3)$$

C'est une série alternée de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ où les termes $b_n = \frac{1}{(n+1)2^{2n+2}}$ forment une suite décroissante de termes positifs qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Si S est la somme de

1. Notez que même si nous avons démontré que le rayon de convergence était plus grand que 1, cela n'aurait pas été suffisant pour affirmer que la série en (18.8.2) converge vers $\ln(1+t^2)$ pour certaines valeurs de t telles que $|t| \geq 1$.

Pour $t = 1$ ou -1 , nous avons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

qui converge (c'est une série alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ avec $b_n = \frac{1}{n+1}$ qui satisfait $b_n > b_{n+1} \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$). L'intervalle de convergence de la série en (18.8.2) est donc $[-1, 1]$. Est-ce que $\ln(2)$ peut être exprimé par cette série avec $t = 1$? La réponse est affirmative mais la démonstration fait appelle à un résultat que nous n'avons pas présenté dans le text.

cette série alternée et S_N est la N^e somme partielle, alors

$$|S - S_N| \leq b_{N+1} = \frac{1}{(N+2)2^{2N+4}}.$$

Il suffit de choisir N tel que $b_{N+1} < 5 \times 10^{-5}$. Puisque $b_5 = 4.0690 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5}$ et $b_4 = 1.9531 \times 10^{-4} > 5 \times 10^{-5}$, Il faut utiliser les quatre premiers termes de la série en (18.8.3) pour obtenir la précision requise.

Question 8.7

a) La série de Taylor de e^u à l'origine est $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$ pour tout u . Ainsi $e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{3n}$ pour tout x .

Nous savons que le coefficient de x^9 (i.e. $1/3!$) dans la série de Taylor de e^{x^3} est donné par la formule $\frac{1}{9!} \frac{d^9 f}{dx^9}(0)$. Donc

$$\frac{1}{9!} \frac{d^9 f}{dx^9}(0) = \frac{1}{3!} \Rightarrow \frac{d^9 f}{dx^9}(0) = \frac{9!}{3!} = 60480.$$

Question 8.8

Il y a deux façons de résoudre ce problème.

i) Les séries de MacLaurin de e^{x^2} et $\cos(x)$ sont

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \dots$$

et

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots$$

Pour obtenir les trois premiers termes non nuls de $f(x)$, nous multiplions $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \dots$ et $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$ pour obtenir $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$. Tout les autres termes sont de degrés plus grand que 4. Les trois premiers termes non nuls sont donc $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.

ii) Nous savons que la série de MacLaurin d'une fonction $f(x)$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(0) x^n.$$

Ainsi, pour trouver les trois premiers termes non nuls, il faut calculer les dérivées $f^{(n)}(0)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ jusqu'à ce que nous ayons obtenu trois dérivées non nuls. Cette approche est beaucoup plus longue car il faut calculer les quatre premières dérivées de $f(x)$.

Question 8.9

a) La série de Maclaurin de $\sin(x)$ est

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\sin(2x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{6n+3}}{(2n+1)!}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) La série de MacLaurin de $\cos(x)$ est

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ainsi, la série de MacLaurin de $\cos(2x)$ est

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Question 8.10

Si nous substituons $u = -x^2$ dans la série géométrique

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, \quad |u| < 1,$$

nous trouvons

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2}, \quad |x| < 1.$$

L'intervalle de convergence de cette série est $] -1, 1[$ comme c'est le cas pour la séries géométrique.

De plus,

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n+2} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+3} x^{2n+3} \quad (18.8.4)$$

où C est une constante d'intégration.

Nous avons une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ avec $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n+3} x^{2n+3}$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+5} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3/n}{2+5/n} x^2 = x^2,$$

il découle du Test de d'Alembert que la série (18.8.4) converge si $x^2 < 1$ et diverge si $x^2 > 1$. En d'autres mots, la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Le rayon de convergence de la série (18.8.4) est donc 1.

Il faut considérer les extrémités de l'intervalle $] -1, 1[$. Pour $x = 1$, nous avons la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+3}$. C'est une série alternée de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ avec $b_n = 1/(2n+3)$. Comme la suite des b_n est une suite décroissante de termes positifs qui converge vers 0, la série converge. Pour $x = -1$, nous avons la série alternée $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+3}$ qui, comme la séries précédente, converge.

L'intervalle de convergence de la série (18.8.4) est donc $[-1, 1]$.

Question 8.11

Si nous remplaçons z par $-u^2$ dans la série géométrique

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

nous obtenons

$$\frac{1}{1+u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n}, \quad |u| < 1.$$

Si nous intégrons les deux côtés de cette égalité de 0 à v où $|v| < 1$, nous obtenons

$$\arctan(v) = \int_0^v \frac{1}{1+u^2} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^v u^{2n} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{v^{2n+1}}{2n+1}, \quad |v| < 1,$$

grâce au théorème 8.2.1. Si nous substituons v par x^2 dans l'expression précédente et multiplions le résultat par x^2 , nous obtenons

$$x^2 \arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+4}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Il découle du théorème 8.2.1 que

$$\int_0^{0.5} x^2 \arctan(x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{0.5} \frac{x^{4n+4}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0.5^{4n+5}}{(2n+1)(4n+5)}. \quad (18.8.5)$$

C'est une série convergente car nous avons intégré sur une intervalle inclus dans l'intervalle $] -1, 1[$.

La série (18.8.5) est une série alternée de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ où les termes $b_n = \frac{0.5^{4n+5}}{(2n+1)(4n+5)}$ forment une suite décroissante de termes positifs qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Si S est la somme de cette série alternée et S_N est sa N^e somme partielle, alors

$$|S - S_N| \leq b_{N+1} = \frac{1}{2^{4N+9}(2N+3)(4N+9)} .$$

Il suffit de choisir N tel que $b_{N+1} < 10^{-5}$. Puisque $b_2 \approx 1.87800 \times 10^{-6} \not< 10^{-6}$ et $b_3 \approx 6.4112559 \times 10^{-8} < 10^{-6}$, un bon choix est $N = 2$. Donc S_2 fournit une approximation de l'intégrale donnée avec la précision demandée.

$$\int_0^{0.5} x^2 \arctan(x^2) dx \approx S_2 = \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^9}{27} + \frac{0.5^{13}}{65} \approx 0.006179540042 .$$

18.8.3 Série du binôme

Question 8.15

La série du binôme de $(1+u)^{3/5}$ est

$$(1+u)^{3/5} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3/5}{n} u^n \quad , \quad |u| < 1 .$$

Ainsi, la série de MacLauren de $(1+x^3)^{3/5}$ est

$$\begin{aligned} (1+x^3)^{3/5} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3/5}{n} x^{3n} = 1 + \frac{3/5}{1!} x^3 + \frac{(3/5)(3/5-1)}{2!} x^6 + \dots \\ &= 1 + \frac{3}{5} x^3 - \frac{3}{25} x^6 + \dots \quad , \quad |x| < 1 . \end{aligned}$$

Donc $b_6 = 3/25$.

Question 8.16

Considérons la fonction $f(x) = 2\sqrt{2} \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^{1/2}$.

La série du binôme est

$$(1+u)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} u^n \quad , \quad |u| < 1 ,$$

où

$$\binom{p}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+1)}{n!} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Avec $p = 1/2$, nous obtenons la série de MacLaurin de $\sqrt{1+u}$; c'est-à-dire,

$$\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} u^n, \quad |u| < 1,$$

où les premiers coefficients sont

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{0} &= 1, \\ \binom{1/2}{1} &= \frac{1/2}{1!} = \frac{1}{2}, \\ \binom{1/2}{2} &= \frac{1/2(1/2-1)}{2!} = \frac{-1}{2^2 2!}, \\ \binom{1/2}{3} &= \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \frac{(-1)(-3)}{2^3 3!}, \\ \binom{1/2}{4} &= \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)}{4!} = -\frac{(-1)(-3)(-5)}{2^4 4!}, \\ \binom{1/2}{5} &= \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)(1/2-4)}{5!} = \frac{(-1)(-3)(-5)(-7)}{2^5 4!}, \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Par induction, nous obtenons que

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(1)(-1)(-3)(-5)\dots(3-2n)}{2^n n!}$$

pour $n > 0$. Donc

$$\sqrt{1+u} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(-1)(-3)(-5)\dots(3-2n)}{2^n n!} u^n, \quad |u| < 1.$$

Si nous substituons u par $(x/2)^3$ dans l'expression précédente et multiplions le résultat par $2\sqrt{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(-1)(-3)(-5)\dots(3-2n)}{2^n n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{3n} \right) \\ &= 2\sqrt{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(-1)(-3)(-5)\dots(3-2n)\sqrt{2}}{2^{4n-1} n!} x^{3n} \\ &= 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^3} x^3 - \frac{\sqrt{2}}{2^8} x^6 + \frac{\sqrt{2}}{2^{12}} x^9 - \frac{5\sqrt{2}}{2^{18}} x^{12} + \frac{7\sqrt{2}}{2^{22}} x^{15} + \dots \end{aligned}$$

pour $|x/2| < 1$.

Question 8.17

La série du binôme est

$$(1+u)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} u^n, \quad |u| < 1,$$

où

$$\binom{p}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+1)}{n!} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Avec $p = 1/3$, nous obtenons

$$(1+u)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} u^n, \quad |u| < 1$$

où

$$\begin{aligned} \binom{1/3}{0} &= 1, \\ \binom{1/3}{1} &= \frac{1/3}{1!} = \frac{1}{3}, \\ \binom{1/3}{2} &= \frac{(1/3)(1/3-1)}{2!} = \frac{(-2)}{3^2 2!}, \\ \binom{1/3}{3} &= \frac{(1/3)(1/3-1)(1/3-2)}{3!} = \frac{(-2)(-5)}{3^3 3!}, \\ \binom{1/3}{4} &= \frac{(1/3)(1/3-1)(1/3-2)(1/3-3)}{4!} = \frac{(-2)(-5)(-8)}{3^4 4!}, \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Par induction, nous trouvons que

$$\binom{1/3}{n} = \frac{(1)(-2)(-5)(-8)\dots(4-3n)}{3^n n!}$$

pour $n > 0$. Donc

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(-2)(-5)(-8)\dots(4-3n)}{3^n n!} u^n, \quad |u| < 1.$$

Si nous substituons $u = x^2$, nous trouvons

$$\begin{aligned} f(x) = (1+x^2)^{1/3} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)(-2)(-5)(-8)\dots(4-3n)}{3^n n!} x^{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3^2}x^4 + \frac{5}{3^4}x^6 - \frac{10}{3^5}x^8 + \dots, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

Question 8.18

a) La série du binôme est

$$(1+u)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} u^n, \quad |u| < 1,$$

où

$$\binom{p}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)\dots(p-n+1)}{n!} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Avec $p = -1/2$, nous obtenons la série de MacLaurin de $\frac{1}{\sqrt{1+u}}$; c'est-à-dire,

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} u^n, \quad |u| < 1,$$

où les premiers coefficients sont

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{0} &= 1, \\ \binom{-1/2}{1} &= \frac{-1/2}{1!} = \frac{-1}{2}, \\ \binom{-1/2}{2} &= \frac{-1/2(-1/2-1)}{2!} = \frac{(-1)(-3)}{2^2 2!}, \\ \binom{-1/2}{3} &= \frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)}{3!} = \frac{(-1)(-3)(-5)}{2^3 3!}, \\ \binom{-1/2}{4} &= \frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)(-1/2-3)}{4!} = \frac{(-1)(-3)(-5)(-7)}{2^4 4!}, \\ \binom{-1/2}{5} &= \frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)(-1/2-3)(-1/2-4)}{5!} = \frac{(-1)(-3)(-5)(-7)(-9)}{2^5 5!}, \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Par induction, nous trouvons que

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)(-3)(-7)(-9)\dots(1-2n)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(1)(3)(7)(9)\dots(2n-1)}{2^n n!}$$

pour $n > 0$. Nous avons donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)(3)(7)(9)\dots(2n-1)}{2^n n!} u^n, \quad |u| < 1.$$

Si nous substituons u par x^3 dans la série ci-dessus, nous trouvons

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)(3)(7)(9)\dots(2n-1)}{2^n n!} x^{3n}, \quad |x| < 1.$$

b) Nous avons

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int_0^{0.1} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)(3)(7)(9)\dots(2n-1)}{2^n n!} \int_0^{0.1} x^{3n} dx$$

$$\begin{aligned}
&= x \Big|_0^{0.1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)(3)(7)(9) \dots (2n-1)}{2^n n!} \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right) \Big|_0^{0.1} \\
&= \frac{1}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)(3)(7)(9) \dots (2n-1)}{(3n+1) 2^n 10^{3n+1} n!}.
\end{aligned}$$

C'est une série convergente car nous avons intégré sur une intervalle inclus dans l'intervalle $] -1, 1[$.

Nous avons une série alternée $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, où $a_0 = 1/10$ et $a_n = \frac{(1)(3)(7)(9) \dots (2n-1)}{(3n+1) 2^n 10^{3n+1} n!}$ pour $n > 0$. Les termes a_n forment une suite décroissante (fastidieux à vérifier) de termes positifs qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Si S est la somme de cette série et S_n est sa n^e somme partielle (C'est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite car nous commençons avec a_0), alors

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} = \frac{(1)(3)(7)(9) \dots (2n+1)}{(3n+4) 2^{n+1} 10^{3n+4} (n+1)!}.$$

Il faut choisir n tel que $a_{n+1} < 10^{-8}$. Puisque $a_2 \approx 5.357142857 \times 10^{-9} < 10^{-8}$ et $a_1 = 1.25 \times 10^{-5} > 10^{-8}$, il suffit de choisir $n = 1$. Donc S_1 fournit une approximation de l'intégrale donnée avec une précision d'au moins 10^{-8} .

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx \approx S_1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{8 \times 10^4} \approx 0.0999875.$$

18.9 Équations différentielles

18.9.1 Introduction

Question 9.1

La fonction $y(t) = t^2 \sin(t)$ est une solution car

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{d}{dt} (t^2 \sin(t)) = \left(\frac{d}{dt} t^2 \right) \sin(t) + t^2 \left(\frac{d}{dt} \sin(t) \right) = 2t \sin(t) + t^2 \cos(t)$$

pour tout t .

Question 9.2

a) (1)

$$L(t) = \int 6.48e^{-0.09t} dt = -72e^{-0.09t} + C.$$

Nous obtenons $5 = -72 + C$ de la condition initiale $L(0) = 5$. Donc $C = 77$. Ainsi $L(t) = -72e^{-0.09t} + 77$ et $L(5) - L(1) \approx 19.89$.

(2) Il découle du Théorème fondamental du calcul que

$$L(5) - L(1) = \int_1^5 \frac{dL}{dt} dt = \int_1^5 6.48e^{-0.09t} dt = -72e^{-0.09t} \Big|_1^5$$

$$= -72e^{-0.45} + 72e^{-0.09} \approx 19.89 .$$

b) (1)

$$P(t) = \int 5.0e^{-2.0t} dt = -2.5e^{-2t} + C .$$

Nous obtenons $2 = -2.5 + C$ de la condition initiale $P(0) = 2$. Donc $C = 4.5$. Ainsi, $P(t) = -2.5e^{-2t} + 4.5$ et $P(10) - P(5) \approx 0.000113495$.

(2) Il découle du Théorème fondamental du calcul que

$$\begin{aligned} P(10) - P(5) &= \int_5^{10} \frac{dP}{dt} dt = \int_5^{10} 5.0e^{-2.0t} dt = -2.5e^{-2t} \Big|_5^{10} \\ &= -2.5e^{-20} + 2.5e^{-10} \approx 0.000113495 . \end{aligned}$$

c) (1)

$$A(t) = \int 523.8(t - 1981)^2 dt = 174.6(t - 1981)^3 + C .$$

Nous obtenons $C = 13,400$ de la condition initiale $A(1981) = 13,400$. Ainsi, $A(t) = 174.6(t - 1981)^3 + 13,400$ et $A(1987) - A(1985) \approx 26,539.2$.

(2) Il découle du Théorème fondamental du calcul que

$$\begin{aligned} A(1987) - A(1985) &= \int_{1985}^{1987} \frac{dA}{dt} dt = \int_{1985}^{1987} 523.8(t - 1981)^2 dt = 174.6(t - 1981)^3 \Big|_{1985}^{1987} \\ &= 174.6 \times 6^3 - 174.6 \times 4^3 \approx 26,539.2 . \end{aligned}$$

Question 9.3

Nous sommes intéressé à la variation d'une fonction (L , P et A) sur un intervalle de temps. Nous ne sommes pas intéressé à trouver la valeur de la fonction à un temps donné.

Si $F(t) + C$ est une primitive de $f(t)$ où C est une constante quelconque, alors

$$\int_a^b f(t) dt = (F(t) + C) \Big|_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) .$$

Donc l'intégrale ne dépend pas de la constante d'intégration qui elle dépend de la condition initiale.

Question 9.4

Soit $x(t)$ le nombre moyen de moustiques par km^2 au temps t . L'énoncé de la question dit que $x'(t) = 2200 + 10e^{0.8t}$. L'augmentation cherché est la différence entre le nombre moyen de moustiques au 9^e jour et le nombre moyen de moustiques au 5^e jour. Notons que $\int_5^9 x'(t) dt = x(9) - x(5)$ est la variation du nombre moyen de moustiques entre $t = 5$ et $t = 9$ jours. Ainsi, l'augmentation cherché est de

$$x(9) - x(5) = \int_5^9 x'(t) dt = \int_5^9 (2200 + 10e^{0.8t}) dt$$

$$= (2200t + 12.5e^{0.8t}) \Big|_5^9 \approx 24860.41 \text{ moustiques.}$$

Question 9.5

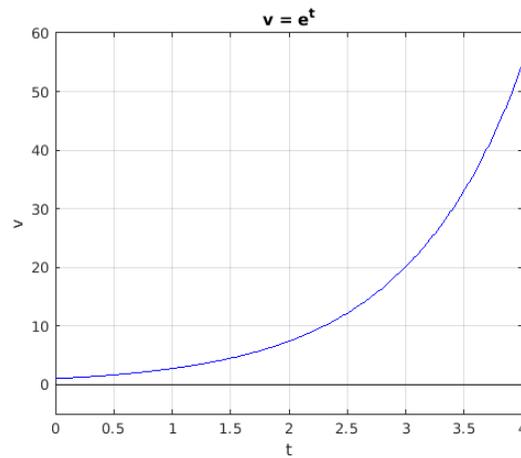
La distance parcourue par la pierre est

$$p(5) - p(1) = \int_1^5 \frac{dp}{dt}(t) dt = \int_1^5 (-9.8t - 5.0) dt = (-4.9t^2 - 5.0t) \Big|_1^5 = -137.60 \text{ m.}$$

La distance est négative car le déplacement positif est vers le haut.

Question 9.6

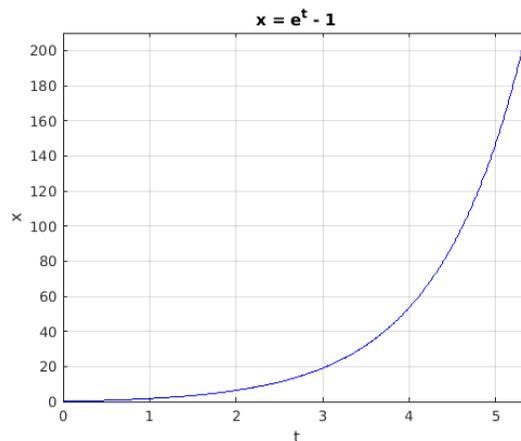
a) Graphe de $v(t) = e^t$.



b) Puisque $\frac{dx}{dt}(t) = v(t)$, nous obtenons $\frac{dx}{dt}(t) = e^t$.

c) $x(t) = \int v(t) dt = \int e^t dt = e^t + C$ où C est une constante. Si $x(0) = 0$, alors $0 = 1 + C$. Ce qui donne $C = -1$ et donc $x(t) = e^t - 1$.

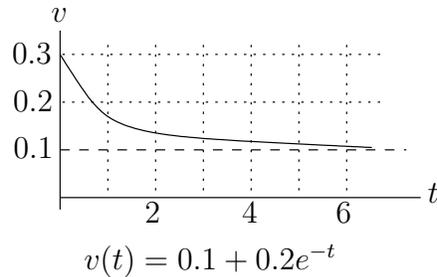
d) Graphe de $x(t) = e^t - 1$.



e) Nous cherchons t tel que $x(t) = e^t - 1 = 200$. Donc, $t = \ln(201) \approx 5.3033$ s.

Question 9.7

a)



b) Puisque $\frac{dx}{dt}(t) = v(t)$, nous avons $\frac{dx}{dt}(t) = 0.1 + 0.2e^{-t}$.

c)

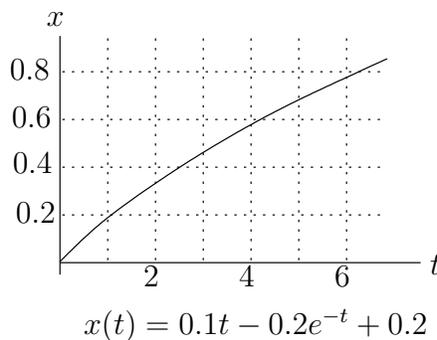
$$x(t) = \int (0.1 + 0.2e^{-t}) dt = 0.1t - 0.2e^{-t} + C .$$

La condition initiale $x(0) = 0$ donne $-0.2 + C = 0$. Donc $C = 0.2$. La position en mètres de l'escargot en fonction du temps en minutes est $x(t) = 0.1t - 0.2e^{-t} + 0.2$.

d) Nous avons $x(t) = 0.1t - 0.2e^{-t} + 0.2$, $x'(t) = 0.1 + 0.2e^{-t}$ et $x''(t) = -0.2e^{-t}$. Le tableau suivant résume l'information que nous avons pour x .

t	0	$0 < t < +\infty$	$+\infty$
$x(t)$	0	+	$+\infty$
$x'(t)$	0.3	+	
$x''(t)$	-0.2	-	
		croît et concave	

Le graphe de $x = x(t)$ aura l'allure suivante.



e) Il faut trouver t tel que $x(t) = 0.1t - 0.2e^{-t} + 0.2 = 1$. Le seul outil que nous possédons pour résoudre cette équation est la méthode de Newton. Posons

$$f(t) = x(t) - 1 = 0.1t - 0.2e^{-t} - 0.8 .$$

Le problème est maintenant de trouver t tel que $f(t) = 0$. Nous avons $f'(t) = 0.1 + 0.2x^{-t}$. Il découle du Théorème des valeurs intermédiaire que $f(x) = 0$ pour une valeur de x entre 8 et 9 car $f(8) < 0$ et $f(9) > 0$. Prenons $t_0 = 8.5$. Le méthode de Newton produit la suite donnée dans le tableau ci-dessous.

n	t_n	$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$
0	8.5	8.000610156811808
1	8.000610156811808	8.000670475566364
2	8.000670475566364	8.000670475567583
3	8.000670475567583	8.000670475567581
4	8.000670475567581	

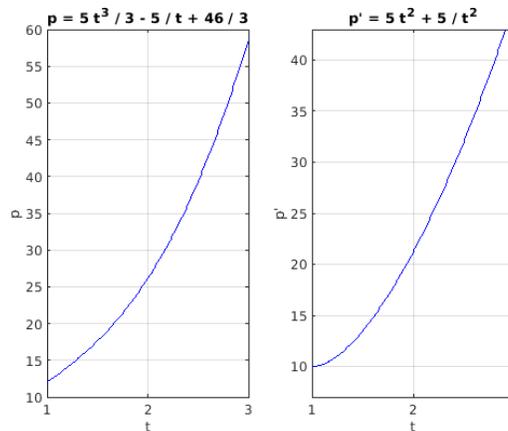
Donc, il faut une petit peu plus de 8 minutes à l'escargot pour traverser le trottoir.

Question 9.8

a)

$$p(t) = \int (5t^2 + 5t^{-2}) dt = \frac{5}{3}t^3 - 5t^{-1} + C.$$

Si $p(1) = 12$, alors $\frac{5}{3} - 5 + C = 12$ et ainsi $C = \frac{46}{3}$. Nous avons tracé le graphe de $p(t) = \frac{5}{3}t^3 - 5t^{-1} + \frac{46}{3}$ et celui de $p'(t) = 5t^2 + \frac{5}{t^2}$ ci-dessous.



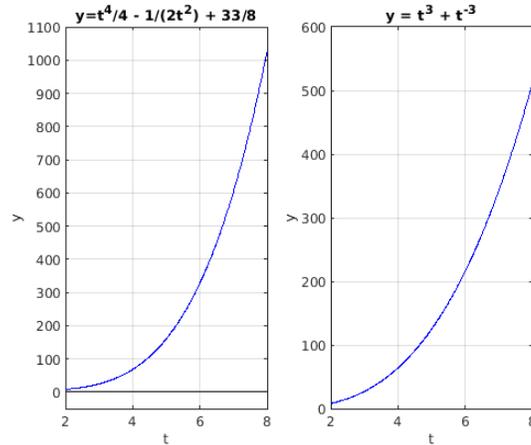
b)

$$M(t) = \int M'(t) dt = \int (t^3 + t^{-3}) dt = \int t^3 dt + \int t^{-3} dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^{-2}}{-2} + C.$$

Si $M(2) = 8$, alors $8 = \frac{2^4}{4} + \frac{2^{-2}}{-2} + C = \frac{31}{8} + C$ et ainsi $C = \frac{33}{8}$. Nous obtenons la solution

$$M(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{t^{-2}}{-2} + \frac{33}{8}.$$

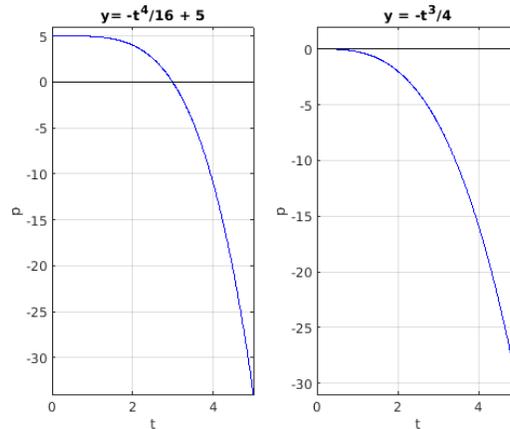
Nous avons tracé les graphes de M et M' ci-dessous.



c)

$$p(t) = \int p'(t) dt = -0.25 \int t^3 dt = -\frac{t^4}{16} + C.$$

De plus, la condition initiale $p(0) = 5$ nous donne que $C = 5$. La solution cherchée est donc $p(t) = -\frac{t^4}{16} + 5$. Le graphe de p et celui de p' sont donnés ci-dessous.

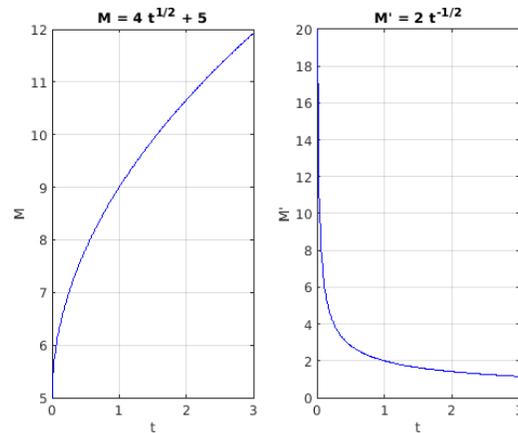


La fonction $p(t)$ est de plus en plus décroissante lorsque $t > 0$ augmente car $p'(t) = -0.25t^3 < 0$ diminue lorsque $t > 0$ augmente.

d)

$$M(t) = \int 2t^{-1/2} dt = 4t^{1/2} + C$$

où C est une constante. Il découle de $M(0) = 5$ que $C = 5$. Ainsi, $M(t) = 4t^{1/2} + 5$. Les graphes de $M(t)$ et $M'(t)$ sont donnés ci-dessous.



La fonction $M(t)$ est de moins en moins croissante lorsque $t > 0$ augmente car $M'(t) = 2/\sqrt{t} > 0$ diminue lorsque t augmente.

Question 9.9

$$L(t) = \int L'(t) dt = \int 10^{-3}t(365 - t) dt = 10^{-3} \int (365t - t^2) dt = \frac{365}{2000}t^2 - \frac{1}{3000}t^3 + C .$$

La condition initiale $L(100) = 1000$ donne

$$\frac{365}{2000} \times 100^2 - \frac{1}{3000} \times 100^3 + C = 1825 - \frac{1000}{3} + C = 1000 \Rightarrow C = \frac{1475}{3} = 491.\bar{6} .$$

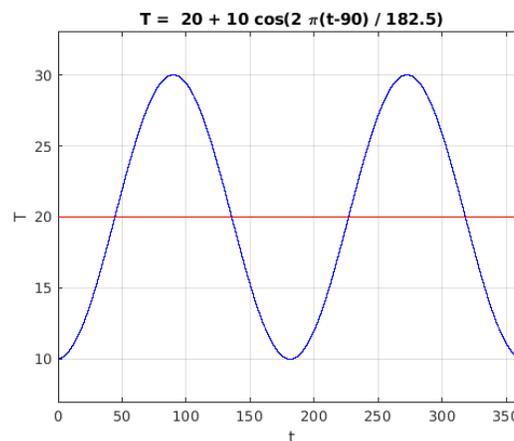
Ainsi,

$$L(t) = \frac{365}{2000}t^2 - \frac{1}{3000}t^3 + \frac{1475}{3}$$

et $L(200) = 5125$

Question 9.10

a) Puisque T est une fonction sinusoidale de moyenne 20, d'amplitude 10, de période 182.5 et de phase 90, nous obtenons le graphe suivant.



b) Il faut déterminer $L(t)$. C'est-à-dire, il faut résoudre

$$\frac{dL}{dt} = 0.001 T(t) = 0.02 + 0.01 \cos\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right).$$

Nous avons

$$L(t) = \int L'(t) dt = \int \left(0.02 + 0.01 \cos\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)\right) dt.$$

Si $y = 2\pi(t-90)/182.5$, alors $dy = (2\pi/182.5) dt$ et

$$\begin{aligned} L(t) &= \frac{182.5}{2\pi} \int \left(0.02 + 0.01 \cos\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)\right) \left(\frac{2\pi}{182.5}\right) dt \\ &= \frac{182.5}{2\pi} \int (0.02 + 0.01 \cos(y)) dy = \frac{182.5}{2\pi} (0.02y + 0.01 \sin(y)) + C \\ &= \frac{182.5}{2\pi} \left(0.02 \left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right) + 0.01 \sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right)\right) + C \\ &= 0.02(t-90) + \frac{1.825}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right) + C. \end{aligned}$$

Il faut utiliser la condition initiale $L(0) = 0.1$ cm pour déterminer C ; c'est-à-dire,

$$-1.8 + \frac{1.825}{2\pi} \sin\left(-\frac{180\pi}{182.5}\right) + C = 0.1 \Rightarrow C \approx 1.9125.$$

Donc

$$L(t) = 0.02(t-90) + \frac{1.825}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right) + 1.9125$$

et $L(30) = 0.4569$.

c) Il faut utiliser la condition $L(150) = 0.1$ cm pour déterminer la valeur de C dans la solution générale

$$L(t) = 0.02(t-90) + \frac{1.825}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right) + C.$$

Nous obtenons

$$1.2 + \frac{1.825}{2\pi} \sin\left(\frac{120\pi}{182.5}\right) + C = 0.1 \Rightarrow C \approx -1.3556.$$

Donc

$$L(t) = 0.02(t-90) + \frac{1.825}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi(t-90)}{182.5}\right) - 1.3556$$

et $L(300) = 3.0801$.

Question 9.11

a) Nous avons $P(t) = \int \frac{5}{1+2t} dt$. Si $u = 1+2t$, alors $du = 2 dt$ et

$$P(t) = \int \frac{5}{1+2t} dt = \frac{5}{2} \int \frac{1}{1+2t} (2) dt = \frac{5}{2} \int \frac{1}{u} du \Big|_{u=1+2t}$$

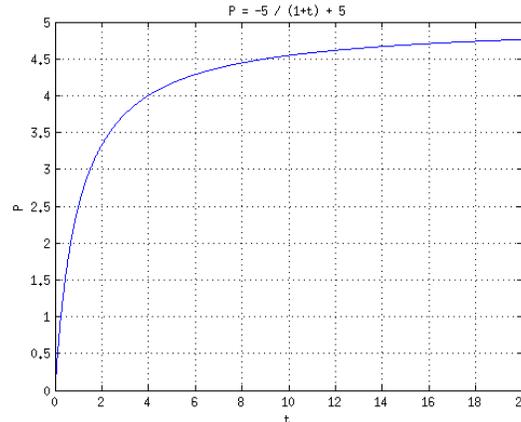
$$= \frac{5}{2} \ln |u| \Big|_{u=1+2t} + C = \frac{5}{2} \ln |1+2t| + C .$$

La condition initiale $P(0) = 5$ nous donne que $C = 5$. Donc $P(t) = \frac{5}{2} \ln |1+2t| + 5$. Nous avons que $P(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

b) Nous avons $P(t) = \int \frac{5}{(1+t)^2} dt$. Si $y = 1+t$, alors $dy = dt$ et

$$P(t) = \int \frac{5}{(1+t)^2} dt = \int \frac{5}{y^2} dy = -\frac{5}{y} + C = -\frac{5}{1+t} + C .$$

La condition initiale $p(0) = 0$ nous donne $C = 5$. Donc $P(t) = -\frac{5}{1+t} + 5$. La figure ci-dessous contient le graphe de P sur l'intervalle $[0, 20]$.



La fonction $P(t)$ est de moins en moins croissante lorsque $t > 0$ augmente car $P'(t) = 5/(1+t)^2 > 0$ diminue lorsque t augmente. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{1+t} + 5 \right) = 5 .$$

Question 9.12

a)

$$W(t) = \int W'(t) dt = \int (4t - t^2)e^{-3t} dt .$$

Pour évaluer cette dernière intégrale, nous utilisons la méthode d'intégration par parties. Nous avons $f(t)g'(t) = (4t - t^2)e^{-3t}$ avec $f(t) = 4t - t^2$ et $g'(t) = e^{-3t}$. Donc, $f'(t) = 4 - 2t$, $g(t) = -e^{-3t}/3$ et

$$\begin{aligned} W(t) &= \int (4t - t^2)e^{-3t} dt = \int f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t) dt \\ &= -\frac{1}{3}(4t - t^2)e^{-3t} + \frac{1}{3} \int (4 - 2t)e^{-3t} dt . \end{aligned}$$

Nous utilisons la méthode d'intégration par parties une deuxième fois pour évaluer l'intégrale à droite ci-dessus. Nous avons $f(t)g'(t) = (4 - 2t)e^{-3t}$ avec $f(t) = (4 - 2t)$ et $g'(t) = e^{-3t}$. Donc, $f'(t) = -2$, $g(t) = -e^{-3t}/3$ et

$$\begin{aligned} \int (4 - 2t)e^{-3t} dt &= \int f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t) dt \\ &= -\frac{1}{3}(4 - 2t)e^{-3t} - \frac{2}{3} \int e^{-3t} dt = -\frac{1}{3}(4 - 2t)e^{-3t} + \frac{2}{9}e^{-3t} + C. \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} W(t) &= -\frac{1}{3}(4t - t^2)e^{-3t} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}(4 - 2t)e^{-3t} + \frac{2}{9}e^{-3t} + C \right) \\ &= -\frac{1}{3}(4t - t^2)e^{-3t} - \frac{1}{9}(4 - 2t)e^{-3t} + \frac{2}{27}e^{-3t} + D \end{aligned}$$

où $D = C/3$. Il découle de $W(0) = 0$ que

$$-\frac{4}{9} + \frac{2}{27} + D = 0 \Rightarrow D = 10/27.$$

Ainsi,

$$W(t) = -\frac{1}{3}(4t - t^2)e^{-3t} - \frac{1}{9}(4 - 2t)e^{-3t} + \frac{2}{27}e^{-3t} + \frac{10}{27}$$

et $W(2) = -\frac{34}{27}e^{-6} + \frac{10}{27} \approx 0.36725$.

b) Il faut trouver la valeur de $t > 0$ (s'il y en a une) à laquelle $W'(t)$ atteint son maximum absolu. Nous avons

$$W''(t) = (4 - 2t)e^{-3t} - 3(4t - t^2)e^{-3t} = (3t^2 - 14t + 4)e^{-3t}.$$

Les points critiques de W' sont les racines du polynôme $3t^2 - 14t + 4$; c'est-à-dire,

$$t_+ = \frac{14 + \sqrt{14^2 - 4 \times 3 \times 4}}{2 \times 3} \approx 4.3609 \quad \text{et} \quad t_- = \frac{14 - \sqrt{14^2 - 4 \times 3 \times 4}}{2 \times 3} \approx 0.3057.$$

Nous avons l'information suivante pour la fonction $W'(t)$.

t	0	$0 < t < t_-$	t_-	$t_- < t < t_+$	t_+	$t_+ < t < +\infty$	$+\infty$
$W'(t)$	0	+	+	+ -	-	-	0
$W''(t)$	+	+	0	-	0	+	0
comportement de W'		croît	max. local	décroît	min. local	croît	asymptote horizontale

La fonction W' passe de positive à négative au point $t = 4$ d'où le symbole +|- . Donc, le maximum global pour $W'(t)$ est à $t = t_-$ où $W'(t_-) \approx 0.4514$.

c) Si $W'(t) = 0.4514$ pour tout t , alors $W(t) = 0.4514t + C$. Nous obtenons de $W(0) = 0$ que $C = 0$. Donc $W(t) = 0.4514t$ et $W(2) = 0.9028$.

Question 9.13

a) $M(t) = \int (1 + t^2)e^{-2t} dt$. Si $u = -2t$, alors $du = -2 dt$, $t^2 = u^2/4$ et

$$\begin{aligned} M(t) &= -\frac{1}{2} \int (1 + t^2)e^{-2t}(-2) dt = -\frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{u^2}{4}\right) e^u du \Big|_{u=-2t} \\ &= -\frac{1}{2} \int e^u du \Big|_{u=-2t} - \frac{1}{8} \int u^2 e^u du \Big|_{u=-2t} \end{aligned}$$

Nous avons montré à la question 6.4 (b) que

$$\int u^2 e^u du = u^2 e^u - 2ue^u + 2e^u + C.$$

Donc,

$$\begin{aligned} M(t) &= -\frac{1}{2} e^u \Big|_{u=-2t} - \frac{1}{8} (u^2 e^u - 2ue^u + 2e^u) \Big|_{u=-2t} + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{8} ((-2t)^2 e^{-2t} - 2(-2t)e^{-2t} + 2e^{-2t}) + C = -\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) e^{-2t} + C. \end{aligned}$$

Il découle de la condition initiale $M(0) = 1$ que $C = 7/4$. Donc,

$$M(t) = -\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) e^{-2t} + \frac{7}{4}.$$

et $M(1) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) e^{-2} + \frac{7}{4} \approx 1.51316$.

b) Il faut trouver le maximum absolu de $M'(t) = (1 + t^2)e^{-2t}$ pour $t \geq 0$. Nous avons $M''(t) = -2(t^2 - t + 1)e^{-2t} < 0$ pour tout $t \geq 0$ car $t^2 - t + 1 > 0$ pour tout t ; ce polynôme n'a pas de racines réelles. Donc M' est une fonction décroissante. Ainsi, le maximum absolu de M' est à $t = 0$ où $M'(0) = 1$.

c) Si $M'(t) = 1$ pour tout t , alors $M(t) = t + C$. Nous obtenons $C = 1$ de la condition initiale $M(0) = 1$. Donc $M(t) = t + 1$ et $M(1) = 2$.

Question 9.14

a) Soit $x(t)$ la distance entre le sol et l'objet au temps t . L'accélération est $x''(t) = -10.5$. La vitesse est $x'(t) = \int x''(t) dt = -10.5t + C$ où C est une constante qui est déterminée à l'aide de la vitesse initiale. La distance entre l'objet et le sol est $x(t) = \int x'(t) dt = -\frac{10.5}{2} t^2 + Ct + D$ où D est une constante qui est déterminée par la hauteur initiale de l'objet lorsqu'il est lancé.

Nous obtenons $C = 5$ de $x'(0) = 5$ et $D = 100$ de $x(0) = 100$. La distance entre l'objet et le sol est donc $x(t) = -\frac{10.5}{2} t^2 + 5t + 100$.

b) La hauteur maximale atteint par l'objet est lorsque $x'(t) = -10.5t + 5 = 0$; c'est-à-dire, $t = 5/10.5 \approx 0.47619$ s. À ce moment, l'objet sera à sa hauteur maximale de $x(5/10.5) \approx 101.1905$ m.

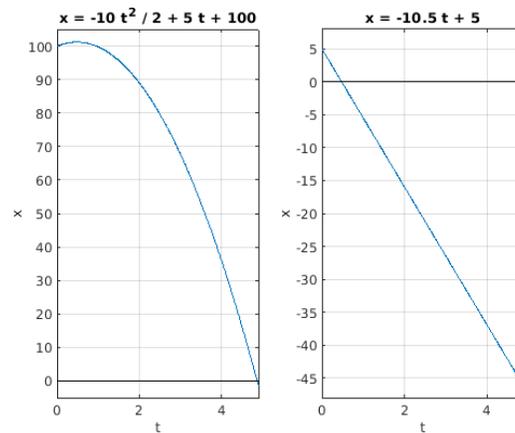
c) Il faut trouver $t > 0$ tel que $x(t) = 100$; c'est-à-dire, tel que

$$x(t) = -\frac{10.5}{2} t^2 + 5t + 100 = 100 \Rightarrow -\frac{10.5}{2} t^2 + 5t = 0 \Rightarrow -\frac{10.5}{2} t + 5 = 0$$

car nous pouvons ignorer le cas où $t = 0$ qui correspond au moment où l'objet est lancé vers le haut. Ainsi, à $t = 10/10.5 \approx 0.95238$ s, l'objet sera à une hauteur de 100 m. Sa vitesse à ce moment sera $x'(10/10.5) = -5$ m/s. Le signe négatif indique que l'objet se dirige vers le sol.

d) L'objet frappe le sol au temps t où $x(t) = 0$. Or $-\frac{10.5}{2} t^2 + 5t + 100$ a une seule racine positive qui est $t_s = \frac{-5 - \sqrt{5^2 - 4 \times (-10.5/2) \times 100}}{2(-10.5/2)} \approx 4.8664497$. Donc l'objet frappe le sol après t_s s à une vitesse de $x'(t_s) \approx -46.097722$ m/s.

e) Le graphe de la position x et celui de la vitesse x' sont donnés ci-dessous.



Question 9.15

Soit $C(t)$ la concentration en $\mu\text{mol/l}$ au temps t en secondes. Nous avons dans l'énoncé du problème que $C(0) = 10$ et $C'(t) = 50 e^{-2t}$. Donc,

$$C(s) - C(0) = \int_0^s C'(t) dt = \int_0^s 50 e^{-2t} dt = -25 e^{-2t} \Big|_0^s = 25(1 - e^{-2s}).$$

En substituant la condition initiale $C(0) = 10$ dans cette équation, nous obtenons

$$C(s) = 10 + 25 \left(1 - \frac{1}{e^{2s}}\right)$$

pour $s \geq 0$. Notons que C est une fonction croissante car $C'(t) = 50 e^{-2t} > 0$ pour tout t . La concentration maximale de toxine dans la cellule, si elle pouvait vivre indéfiniment, est

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(10 + 25 \left(1 - \frac{1}{e^{2s}}\right)\right) = 10 + 25 = 35.$$

Donc la cellule va mourir empoisonnée après un certain temps t donné par

$$30 = 10 + 25 \left(1 - \frac{1}{e^{2t}}\right) \Rightarrow t = \frac{1}{2} \ln(5) \approx 0.8047 \text{ seconde}$$

Question 9.17

$x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}$ est une solution car

$$x'(t) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}\right) = 3e^{2t} \quad \text{et} \quad 1 + 2x(t) = 1 + 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}\right) = 3e^{2t} .$$

Donc $x'(t) = 1 + 2x(t)$ pour tout t . De plus, la condition initial $x(0) = 1$ est satisfaite car $x(0) = -1/2 + 3/2e^0 = 1$.

Question 9.18

À $t = 0$, nous avons $g'(0) = g^2(0) + 2 \times 0 = 1 > 0$. Donc la fonction g est croissante à $t = 0$.

Question 9.19

$b(t) = \ln(t)$ est une solution car

$$b'(t) = \frac{d}{dt} (\ln(t)) = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad e^{-b(t)} = e^{-\ln(t)} = e^{\ln(t^{-1})} = t^{-1} = \frac{1}{t} .$$

Donc $b'(t) = e^{-b(t)}$ pour tout t .

Puisque $b'(t) = e^{-b(t)} > 0$ pour tout $t > 0$, la fonction b est strictement croissante.

Question 9.20

La fonction b est une solution car

$$b'(t) = \frac{d}{dt} (3e^{2t} - 0.5) = 6e^{2t} = 1 + 2(3e^{2t} - 0.5) = 1 + 2b(t)$$

pour tout t et $b(0) = 3 - 0.5 = 2.5$.

Il faut premièrement noter que $b(t) = -1/2$ pour tout t est une solution de l'équation différentielle. Puisque $b(0) = 2.5 > -1/2$, nous avons que $b'(t) > 0$ pour tout $t > 0$ car $b'(t)$ peut changer de signe seulement lorsque t satisfait $b'(t) = 1 + 2b(t) = 0$; c'est-à-dire, lorsque t satisfait $b(t) = -1/2$. Comme les solutions ne peuvent pas se couper par unicité des solutions, la solution $b(t)$ qui satisfait $b(0) = 2.5$ doit satisfaire $b(t) > -1/2$ pour tout t et donc $b'(t) = 1 + 2b(t) > 0$ pour tout t . Nous avons que $b(t)$ est strictement croissante pour $t > 0$.

Question 9.21

La fonction b est une solution car

$$b'(t) = \frac{d}{dt} (e^{-t}) = -e^{-t} = -b(t)$$

pour tout t et $b(0) = e^0 = 1$.

Premièrement, il faut noter que $b(t) = 0$ pour tout t est une solution de l'équation différentielle. Puisque $b(0) = 1 > 0$, nous avons que $b'(t) < 0$ pour tout $t > 0$ car $b'(t)$ peut changer de signe seulement lorsque t satisfait $b'(t) = -b(t) = 0$; c'est-à-dire, lorsque $b(t) = 0$. Comme les solutions ne peuvent pas se couper par unicité des solutions, la solution $b(t)$ qui satisfait $b(0) = 1$ doit satisfaire $b(t) > 0$ pour tout t et donc $b'(t) = -b(t) < 0$ pour tout t . Nous avons que $b(t)$ est strictement décroissante.

Question 9.22

La fonction $b(t) = 5 + 20e^{-2t}$ est une solution car

$$b'(t) = \frac{d}{dt} (5 + 20e^{-2t}) = -40e^{-2t} \quad \text{et} \quad 10 - 2b(t) = 10 - 2(5 + 20e^{-2t}) = -40e^{-2t} .$$

Donc $b'(t) = 10 - 2b(t)$ pour tout t . De plus la condition initial $b(0) = 25$ est satisfaite car $b(0) = 5 + 20e^0 = 25$.

Puisque e^{-2t} est une fonction décroissante, $b(t) = 5 + 20e^{-2t}$ est aussi une fonction décroissante.

Notons premièrement que $b(t) = 5$ pour tout t est une solution de l'équation différentielle.. Puisque $b(0) = 25 > 5$, nous avons que $b'(t) < 0$ pour tout $t > 0$ car $b'(t)$ peut changer de signe seulement lorsque t satisfait $b'(t) = 10 - 2b(t) = 0$; c'est-à-dire, lorsque t satisfait $b(t) = 5$. Comme les solutions ne peuvent pas se couper par unicité des solutions, la solution $b(t)$ qui satisfait $b(0) = 25$ doit satisfaire $b(t) > 5$ pour tout t et donc $b'(t) = 10 - 2b(t) < 0$ pour tout t . Nous avons que $b(t)$ est strictement décroissante.

18.9.2 Équations différentielles séparables

Question 9.25

La phrase «le taux de décomposition du Césium 137 est proportionnel à la quantité de Césium 137 présent» se traduit par l'expression mathématique $q'(t) = kq(t)$ où k est la constante de proportionnalité et $q(t)$ est la quantité de Césium 137 au temps t . La solution générale de cette équation différentielle est $q(t) = q_0 e^{kt}$ où q_0 est la quantité de Césium 137 au temps $t = 0$.

Pour déterminer la valeur de k , il faut utiliser le fait que la demie-vie du Césium 137 est 30 ans. Donc

$$\frac{q_0}{2} = q_0 e^{30k} .$$

Si nous résolvons pour k , nous trouvons $k = \frac{1}{30} \ln(1/2) \approx -0.023104906$.

Si la quantité initiale de Césium 137 est $q_0 = 50$ mg, il restera $q(50) = 50e^{50k} \approx 15.749013$ mg après 50 ans.

Question 9.26

a) Puisque $y'(t) = 2y(t)$, nous obtenons

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int 2 dt .$$

Donc

$$\ln |y(t)| = 2t + C \Rightarrow e^{\ln |y(t)|} = e^{2t+C} \Rightarrow |y(t)| = e^{2t+C} = e^{2t} e^C \Rightarrow y(t) = D e^{2t},$$

où $D = \pm e^C$. Notons que $D = 0$ est aussi acceptable car l'équation différentielle $y'(t) = 2y(t)$ est satisfaite par $y(t) = 0$ pour tout t . La condition initiale $y(0) = 3$ donne $D e^0 = D = 3$. La solution cherchée est $y(t) = 3e^{2t}$.

b)

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int 3t dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{3}{2}t^2 + D.$$

Ainsi

$$x = \frac{-1}{(3/2)t^2 + D} = \frac{-2}{3t^2 + 2D}.$$

La condition initiale $x(1) = -2/5$ nous donne $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{3 + 2D}$. Nous obtenons $D = 1$ et donc

$$x(t) = \frac{-2}{3t^2 + 2}.$$

c) Si nous séparons les variables, nous obtenons

$$\int \frac{1}{1000 - h} dh = \int dt. \quad (18.9.1)$$

Si $u = 1000 - h$, alors $du = -dh$ et

$$\int \frac{1}{1000 - h} dh = - \int \frac{1}{1000 - h} (-1) dh = - \int \frac{1}{u} du = - \ln |u| + E = - \ln |1000 - h| + E$$

où E est une constante. Nous déduisons de (18.9.1) que

$$- \ln |1000 - h| = t + C$$

où C est une constante. Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln |1000 - h| = -t - C &\Rightarrow |1000 - h| = e^{-t-C} = e^{-C} e^{-t} \\ &\Rightarrow 1000 - h = D e^{-t} \end{aligned}$$

où $D = \pm e^{-C}$. Notons que $D = 0$ est aussi valable car $h(t) = 1000$ pour tout t est une solution de $\frac{dh}{dt} = 1000 - h$. Nous obtenons donc

$$h(t) = 1000 - D e^{-t}$$

avec D une constante réelle. Pour satisfaire $h(0) = 500$, nous devons choisir D tel que $500 = 1000 - D$; c'est-à-dire, $D = 500$. Finalement, nous trouvons $h(t) = 1000 - 500e^{-t}$.

d) Si nous séparons les variables, nous obtenons

$$\int (1 + 2g) dg = \int 5 dt \Rightarrow g + g^2 = 5t + C$$

pour une constante C . Il faut utiliser la condition initiale $g(0) = 0$ pour déterminer C . Si nous substituons $t = 0$ dans la relation $g(t) + g^2(t) = 5t + C$, nous obtenons $g(0) = 0 = C$.

La solution implicite de l'équation différentielle est $g + g^2 = 5t$. Il n'est pas toujours possible de trouver une forme explicite pour la solution. Dans le cas présent, il existe une forme explicite pour g grâce à la formule pour trouver les racines d'un polynôme de degré deux. En effet, nous déduisons de $g^2 + g - 5t = 0$ que

$$g(t) = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 20t} \right) .$$

Notez que $g(t) = \frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{1 + 20t} \right)$ ne satisfait pas $g(0) = 0$.

f) Si nous séparons les variables, nous avons

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx \Rightarrow \ln |y| = \arctan(x) + C .$$

Donc $y = De^{\arctan(x)}$ où $D = \pm e^C$ est une constante. Notons que $D = 0$ est aussi acceptable car nous obtenons la solution triviale $y(x) = 0$ pour tout x . La condition initiale $y(0) = 2$ donne $D = 2$. La solution particulière est donc $y = 2e^{\arctan(x)}$.

g) Si nous séparons les variables, nous avons

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y-1} dy &= \int (x+2) dx \Rightarrow \ln |y-1| = \frac{x^2}{2} + 2x + C \Rightarrow |y-1| = e^C e^{x^2/2+2x} \\ &\Rightarrow y = 1 + De^{x^2/2+2x} \end{aligned}$$

où $D \equiv \pm e^C$ est une constante. Notons que $D = 0$ est aussi acceptable car nous obtenons la solution triviale $y(x) = 1$ pour tout x . La condition $y(1) = 0$ nous donne $0 = 1 + De^{2.5}$ et donc $D = -e^{-2.5}$. Nous obtenons la solution particulière $y = 1 - e^{x^2/2+2x-2.5}$.

h) Si nous séparons les variables, nous avons

$$\int \frac{1}{6y^2} dy = \int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx .$$

Si $u = 3x$ dans l'intégrale à droite, alors $du = 3 dx$ et

$$\int \frac{1}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{3} \arctan(u) + E = \frac{1}{3} \arctan(3x) + E$$

où E est une constante arbitraire. Donc,

$$-\frac{1}{6y} = \frac{1}{3} \arctan(3x) + C \Rightarrow y = \frac{1}{-2 \arctan(3x) - 6C}$$

où C est une constante arbitraire. Si nous substituons $x = 0$ dans cette dernière équation, nous obtenons $1 = \frac{1}{-6C}$ car $y(0) = 1$. Donc $C = -1/6$ et $y = \frac{1}{-2 \arctan(3x) + 1}$.

Question 9.27

a)

$$\frac{dx}{dt} = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}.$$

Si nous séparons les variables, nous obtenons

$$\int \frac{x}{2x^2 + 1} dx = \int dt. \quad (18.9.2)$$

Si $u = 2x^2 + 1$, alors $du = 4x dx$ et

$$\int \frac{x}{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2x^2 + 1} (4x) dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln |u| + E = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 1) + E$$

où E est une constante. Nous obtenons de (18.9.2) que

$$\frac{1}{4} \ln(2x^2 + 1) = t + C$$

où C est une constante. Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(2x^2 + 1) = 4t + 4C &\Rightarrow 2x^2 + 1 = e^{4t+4C} = e^{4C} e^{4t} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} (e^{4C} e^{4t} - 1) \\ &\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (e^{4C} e^{4t} - 1)}. \end{aligned}$$

Si $D = e^{4C}$ (notez que cette constante est positive), alors

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (D e^{4t} - 1)}.$$

Cette solution est valable seulement si $D e^{4t} - 1 \geq 0$; c'est-à-dire, $t \geq -\ln(D)/4$.b) Si $y = x^2$, nous avons

$$\frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} = 2x \left(2x + \frac{1}{x} \right) = 4x^2 + 2 = 4y + 2. \quad (18.9.3)$$

c) (18.9.3) est une équation différentielle séparable pour y , nous avons

$$\int \frac{1}{4y + 2} dy = \int dt. \quad (18.9.4)$$

Si $u = 4y + 2$, alors $du = 4 dy$ et

$$\int \frac{1}{4y + 2} dy = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{4y + 2} \right) 4 dy = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln |u| + E = \frac{1}{4} \ln |4y + 2| + E$$

où E est une constante. Nous obtenons de (18.9.4) que

$$\frac{1}{4} \ln |4y + 2| = t + C$$

où C est une constante. Donc,

$$\ln |4y + 2| = 4t + 4C \Rightarrow |4y + 2| = e^{4t+4C} = e^{4C} e^{4t} \Rightarrow 4y + 2 = Ee^{4t} \Rightarrow y = \frac{Ee^{4t} - 2}{4}$$

où $E = \pm e^{4C}$. Notons que $E = 0$ est aussi acceptable car $y(t) = -1/2$ pour tout t est aussi une solution de (18.9.3).

d) Si nous substituons y par x^2 dans $y = \frac{Ee^{4t} - 2}{4}$, nous obtenons

$$x^2 = \frac{Ee^{4t} - 2}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{De^{4t} - 1}{2}}$$

pour $D = E/2 > 0$. Cette formule est valide seulement si $De^{4t} - 1 \geq 0$; c'est-à-dire, $t > -\ln(D)/4$ comme nous avons vu précédemment.

Question 9.28

Utilisons la méthode de séparation des variables pour trouver $c(t)$ qui satisfait

$$\frac{dc}{dt} = \frac{kA}{V} (C - c) . \quad (18.9.5)$$

La méthode de séparation des variables nous donne

$$\int \frac{1}{C - c} dc = \int \frac{kA}{V} dt .$$

Donc,

$$\begin{aligned} -\ln |C - c| &= \frac{kAt}{V} + D \Rightarrow \ln |C - c| = -\frac{kAt}{V} - D \Rightarrow |C - c| = e^{-kAt/V} e^{-D} \\ &\Rightarrow C - c = Ee^{-kAt/V} \Rightarrow c = C - Ee^{-kAt/V} \end{aligned}$$

où $E = \pm e^{-D}$. Notons que $E = 0$ est aussi acceptable car $c(t) = C$ pour tout t est une solution de (18.9.5). E est une constante que nous devons déterminer à l'aide de la condition initiale. Nous avons

$$c(0) = c_0 \Rightarrow C - E = c_0 \Rightarrow E = C - c_0 .$$

La solution est donc $c(t) = C - (C - c_0)e^{-kAt/V}$.

Question 9.30

En séparant les variables, nous trouvons

$$\int y^{-1.1} dy = \int dt .$$

Donc,

$$-10y^{-0.1} = t + C \Rightarrow y^{0.1} = -\frac{10}{t + C} .$$

Cette dernière relation impose une condition sur les valeurs de t . Puisque $y^{0,1} \geq 0$, nous devons avoir $t + C < 0$ pour satisfaire l'équation. Nous assumons que $t < -C$ par la suite. Nous pouvons alors résoudre pour y pour obtenir

$$y = \left(\frac{10}{t + C} \right)^{10}.$$

Pour déterminer C , il faut utiliser la condition initiale $y(0) = 100$ pour obtenir $100 = (10/C)^{10}$. Ainsi, $C = \pm 10^{4/5}$. Nous devons choisir $C = -10^{4/5}$ car la condition $t < -C$ n'inclut pas $t = 0$ si $C = 10^{4/5}$. La solution est

$$y = \left(\frac{10}{t - 10^{4/5}} \right)^{10} \quad \text{pour } t < 10^{4/5}.$$

Notons que $\lim_{t \rightarrow (10^{4/5})^-} y(t) = \infty$.

Cette équation est plus délicate à résoudre car elle ne satisfait pas le théorème d'existence et d'unicité des équation différentielle. La fonction $y^{1,1}$ n'est pas définie pour $y < 0$.

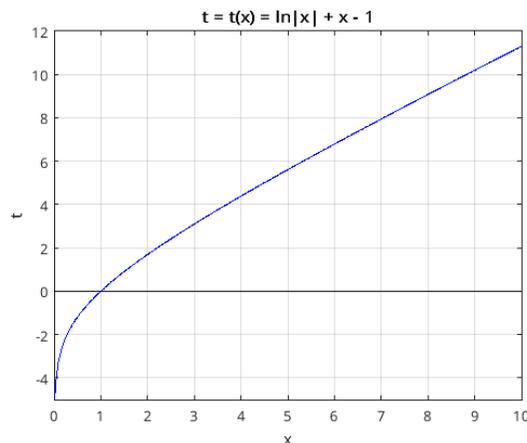
Question 9.31

a)

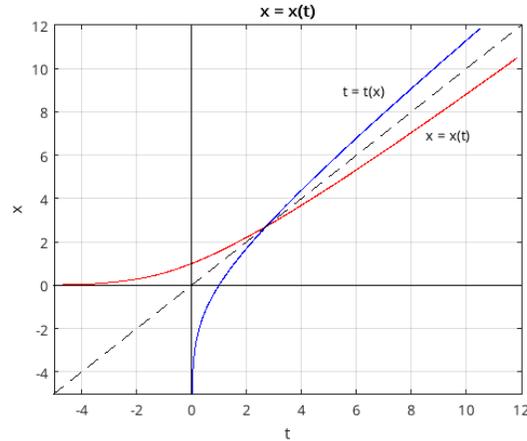
$$\int \frac{1+x}{x} dx = \int dt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx = \int dt \Rightarrow \ln|x| + x = t + C.$$

Il faut utiliser la condition initiale $x(0) = 1$ pour déterminer la valeur de C . Si nous substituons $x = 1$ et $x = 0$ dans $\ln|x| + x = t + C$, nous obtenons $\ln(1) + 1 = 0 + C$; c'est-à-dire, $C = 1$. La solution est donnée dans la forme implicite $\ln|x| + x = t + 1$. Il est impossible d'écrire x en fonction de t .

b) Le graphe de $t = t(x) = \ln|x| + x - 1$ pour $0 \leq x \leq 10$ est donné ci-dessous.



c) Le graphe de $x = x(t)$ est obtenu du graphe de $t = t(x)$ par une réflexion de ce dernier par rapport à l'axe $x = t$.

**Question 9.32**

Si $y = 2x - 1$, alors

$$y' = 2x' = 2(2x - 1) = 2y .$$

Cette dernière équation différentielle est bien connue. Sa solution générale est $y(t) = y_0 e^{2t}$ où y_0 est la condition initiale à $t = 0$.

La solution générale de $\frac{dx}{dt} = 2x - 1$ est donc

$$x = \frac{y + 1}{2} = \frac{y_0 e^{2t} + 1}{2} = \frac{(2x_0 - 1)e^{2t} + 1}{2}$$

où x_0 est la condition initiale à $t = 0$ pour $\frac{dx}{dt} = 2x - 1$.

Question 9.33

a) la température $T(t)$ du café au temps t satisfait l'équation différentielle $\frac{dT}{dt} = K(M - T)$ où la constante M est la température ambiante et la constante positive K est associée à la conductivité thermique du café. Le temps est mesuré en minutes et la température en degré Celsius.

b) Utilisons la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation différentielle en (a).

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{M - T} dT &= \int K dt \Rightarrow -\ln |M - T| = Kt + C \Rightarrow \ln |M - T| = -Kt - C \\ &\Rightarrow |M - T| = e^{-C} e^{-Kt} \Rightarrow M - T = D e^{-Kt} \end{aligned}$$

où $D = \pm e^{-C}$. Notons que $D = 0$ est aussi acceptable car $T(t) = M$ pour tout t est une solution ; le café est à la température ambiante. Donc la solution générale est

$$T(t) = M - D e^{-Kt} \quad , \quad t \geq 0 .$$

Si $t = 0$, alors $T_0 = M - D$ et ainsi $D = M - T_0$. La solution est donc

$$T(t) = M - (M - T_0) e^{-Kt} \quad , \quad t \geq 0 ,$$

où T_0 est la température initiale à $t = 0$.

c) Il est donné dans l'énoncé de la question que $T_0 = 60^\circ\text{C}$ et $M = 22^\circ\text{C}$. Pour déterminer K , nous utilisons l'information qui vient de nous être fournie. À savoir que $T(20) = 40^\circ\text{C}$. Ainsi,

$$40 = T(20) = 22 - (22 - 60)e^{-20K} \Rightarrow K = -\frac{1}{20} \ln\left(\frac{9}{19}\right) \approx 0.03736072 .$$

Donc, la température du café après une heure est

$$T(60) = 22 - (22 - 60)e^{-0.03736072 \times 60} \approx 26.038781^\circ\text{C} .$$

Question 9.34

a) Si $T(t)$ est la température au temps t , nous avons alors $\frac{dT}{dt} = K(M - T)$ où M est la température à l'extérieur de la maison, que nous assumons constante, et K est une constante positive. Dans le cas présent $M = -12^\circ\text{C}$.

b) Nous utilisons la méthode de séparation des variables. Nous avons

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{-12 - T} dT &= \int K dt \Rightarrow -\ln|-12 - T| = Kt + C \\ &\Rightarrow |-12 - T| = e^{-Kt - C} = e^{-C} e^{-Kt} \Rightarrow T = -12 - D e^{-Kt} \end{aligned}$$

où $D = \pm e^{-C}$. Notons que $D = 0$ est aussi acceptable car $T(t) = -12$ pour tout t est une solution.

Pour simplifier nos calculs, nous assumons que 13h00 correspond à $t = 0$. Donc 22h00 correspond à $t = 9$. Nous obtenons des conditions $T(0) = 20$ et $T(9) = 15$ que $20 = -12 - D$ et $15 = -12 - D e^{-9K}$. La première équation nous donne $D = -32$ et la deuxième équation nous donne

$$15 = -12 + 32e^{-9K} \Rightarrow e^{9K} = \frac{32}{27} \Rightarrow K = \frac{1}{9} \ln\left(\frac{32}{27}\right) = \frac{1}{9} (5 \ln(2) - 3 \ln(3)) .$$

La solution est donc

$$T = -12 + 32e^{-(5 \ln(2) - 3 \ln(3))t/9} .$$

À sept heures le matin suivant, donc à $t = 18$ (18 heures après le début de la panne), la température dans la maison est de

$$T(18) = -12 + 32e^{-2(5 \ln(2) - 3 \ln(3))} = 10.78^\circ\text{C} .$$

c) Comme la température durant la nuit est probablement inférieure à la température de -12°C observée durant la journée, nous devons donc s'attendre à ce que la température à l'intérieure de la maison soit inférieure à 10.78°C .

Question 9.35

a) Nous obtenons de

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{1+t} b \tag{18.9.6}$$

que

$$\int \frac{1}{b} db = \int \frac{1}{1+t} dt .$$

Ainsi,

$$\ln |b| = \ln |1+t| + C \Rightarrow |b| = e^C |1+t| \Rightarrow b = D(1+t)$$

où $D = \pm e^C$ est une constante. Notons que $D = 0$ est aussi acceptable car $b(t) = 0$ pour tout t (aucun individu) est une solution.

b) Si $b(0) = 10^6$, alors $D = 10^6$. La solution de (18.9.6) avec la condition initiale $b(0) = 10^6$ est

$$y = 10^6(1+t) = 10^6 t + 10^6 .$$

C'est une droite de pente 10^6 qui passe par $(0, 10^6)$.

Question 9.36

a) Nous pouvons séparer les variables dans l'équation

$$\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{y}$$

pour obtenir

$$\int y^{-1/2} dy = - \int 2 dt .$$

Donc

$$2y^{1/2} = -2t + E \Rightarrow y^{1/2} = -t + \frac{E}{2} .$$

Puisque $y^{1/2}(t) \geq 0$, nous devons donc avoir $t \leq D = E/2$. Ainsi,

$$y = (-t + D)^2 \quad \text{pour } t \leq D .$$

Remarquons que le côté droit de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = F(y) = -2\sqrt{y}$$

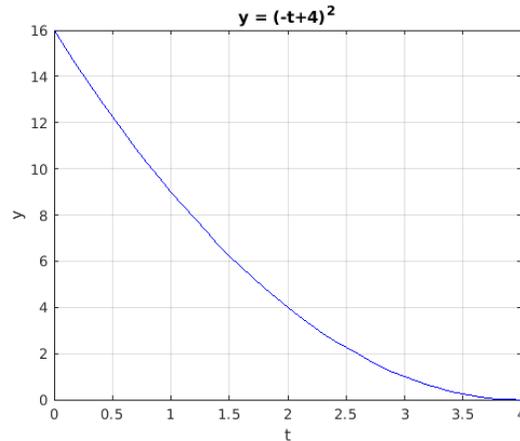
ne satisfait pas le théorème d'existence et d'unicité des solutions car $F'(y) = -y^{-1/2}$ n'est pas définie à $y = 0$. Nous pouvons aussi vérifier que nous avons bien trouvé une solution. Nous avons

$$y' = -2(-t + D) \quad \text{et} \quad -2\sqrt{y} = -2\sqrt{(-t + D)^2} = -2|-t + D| = -2(-t + D)$$

car $t \geq D$. Donc $\frac{dy}{dt} = -2\sqrt{y}$ pour $t \leq D$.

b) la condition initiale $y(0) = 16$ donne $16 = D^2$ et ainsi $D = 4$ ou $D = -4$. La solution $y = (-t + D)^2$ avec $D = -4$ n'est pas acceptable car elle est valable seulement pour $t \leq -4$, un intervalle qui ne contient pas l'origine.

La solution de l'équation différentielle qui satisfait la condition initiale $y(0) = 16$ est donc donnée par $D = 4$. Nous obtenons $y = (-t + 4)^2$ pour $t \leq 4$. Le graphe de la solution de l'équation différentielle avec $y(0) = 16$ est donné ci-dessous.



- c) Si $y(t) = (-t + 4)^2$, alors $y(t) = 0$ pour $t = 4$ secondes.
 d) La solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

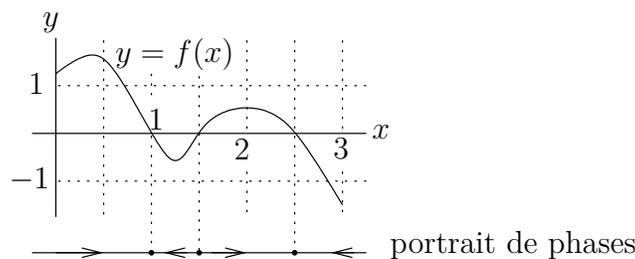
est $y = Ce^{-2t}$. La condition initiale $y(0) = 16$ donne $C = 16$. Donc, la solution de cette équation différentielle qui satisfait la condition initiale $y(0) = 16$ est $y = 16e^{-2t}$.

D'après ce modèle, la profondeur de l'eau dans le cylindre après 4 secondes serait $y(4) = 16e^{-8} = 0.0053674\dots$ cm.

18.9.3 Équations différentielles autonomes

Question 9.37

- a) Le portrait de phases est donné ci-dessous.



Les points d'équilibre sont $x = 1, 1.5$ et 2.5 car $f(x) = 0$ pour ces valeurs de x . La direction des flèches est déterminée par l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$. Sur les intervalles où la fonction f est positive, nous avons $x'(t) > 0$. Donc, la solution $x(t)$ est croissante. Par contre, sur les intervalles où la fonction f est négative, nous avons $x'(t) < 0$ et la solution x est décroissante.

Question 9.38

- a) Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = 1 - x^2 = 0$. Donc 1 et -1 sont les

deux seuls points d'équilibre. Nous avons que $f'(x) = -2x$. Ainsi, le point d'équilibre $x = 1$ est stable car $f'(1) = -2 < 0$. Par contre, le point d'équilibre $x = -1$ est instable car $f'(-1) = 2 > 0$.

b) Les points d'équilibre sont les solutions de $f(y) = \alpha e^{\beta y} - 1 = 0$. Donc $y = -\ln(\alpha)/\beta$ est le seul point d'équilibre. Notons que la condition $\alpha > 0$ est nécessaire pour que $\ln(\alpha)$ soit définie. Nous avons $f'(y) = \alpha\beta e^{\beta y} < 0$ pour tout y car $\alpha > 0$ et $\beta < 0$. En particulier, $f'(-\ln(\alpha)/\beta) < 0$. Le point d'équilibre $y = -\ln(\alpha)/\beta$ est donc stable quels que soient $\alpha > 0$ et $\beta < 0$.

Question 9.39

a)

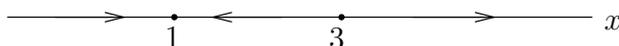
I: Nous avons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

où $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Les points d'équilibres sont les valeurs de x telles que $f(x) = 0$. L'équation $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$ a deux racines, $x = 1$ et $x = 3$. Ce sont donc nos deux points d'équilibre.

Nous savons qu'un point d'équilibre p est (asymptotiquement) stable si $f'(p) < 0$ et instable si $f'(p) > 0$. Puisque $f'(x) = 2x - 4$, nous avons que $x = 3$ est instable car $f'(3) = 2 > 0$ et $x = 1$ est (asymptotiquement) stable car $f'(1) = -2 < 0$.

II:



III: L'équation différentielle est séparable. La méthode de séparation des variables nous donne

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int dt. \quad (18.9.7)$$

Il faut utilisé la méthode des fractions partielles pour évaluer l'intégrale du coté gauche de l'égalité. Nous avons

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)}.$$

Donc $1 = B(x - 3) + A(x - 1)$. Si nous substituons $x = 3$ dans $1 = B(x - 3) + A(x - 1)$, nous obtenons $1 = 2A$ et ainsi $A = 1/2$. Si nous substituons $x = 1$ dans $1 = B(x - 3) + A(x - 1)$, nous obtenons $1 = -2B$ et ainsi $B = -1/2$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x - 3| - \frac{1}{2} \ln|x - 1| + E = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|x - 3|}{|x - 1|} \right) + E \end{aligned}$$

où E est une constante. Il découle de (18.9.7) que

$$\ln \left(\frac{|x-3|}{|x-1|} \right) = 2t + 2C$$

où C est une constante. Après avoir évalué l'exponentiel des deux cotés de l'égalité, nous obtenons

$$\frac{|x-3|}{|x-1|} = e^{2t+2C} = e^{2C} e^{2t} \Rightarrow \frac{x-3}{x-1} = D e^{2t}$$

où $D = \pm e^{2C}$. Si nous substituons $x = 5$ et $t = 0$ donnés par $x(0) = 5$ dans cette équation, nous obtenons $D = 1/2$. La solution implicite est donc

$$\frac{x-3}{x-1} = \frac{e^{2t}}{2}.$$

Si nous résolvons l'équation précédente pour x , nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x-1} = \frac{e^{2t}}{2} &\Rightarrow 2(x-3) = e^{2t}(x-1) \Rightarrow 2x-6 = xe^{2t} - e^{2t} \\ &\Rightarrow 2x - xe^{2t} = 6 - e^{2t} \Rightarrow x = \frac{6 - e^{2t}}{2 - e^{2t}}. \end{aligned}$$

b)

I: Nous avons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

où $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Les points d'équilibre sont les valeurs de x telles que $f(x) = 0$. L'équation $f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) = 0$ a deux racines, $x = 2$ et $x = 5$. Ce sont donc nos deux points d'équilibre.

Nous savons qu'un point d'équilibre p est (asymptotiquement) stable si $f'(p) < 0$ et instable si $f'(p) > 0$. Puisque $f'(x) = 2x - 7$, nous avons que $x = 5$ est instable car $f'(5) = 3 > 0$ et $x = 2$ est (asymptotiquement) stable car $f'(2) = -3 < 0$.

II: Le tableau ci-dessous donne le signe de f sur chacun des intervalles délimités par les points d'équilibre.

intervalle	$x < 2$	$2 < x < 5$	$5 < x$
signe de $f(x)$	+	-	+

Nous obtenons le portrait de phase suivant.



III: L'équation différentielle est séparable. La méthode de séparation des variables nous donne

$$\int \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx = \int dt = t + C. \quad (18.9.8)$$

Il faut utilisé la méthode des fractions partielles pour évaluer l'intégrale du coté gauche de l'égalité. Nous avons

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 5)}{(x - 2)(x - 5)}.$$

Donc $1 = A(x - 2) + B(x - 5)$. Si nous substituons $x = 2$ dans $1 = A(x - 2) + B(x - 5)$, nous obtenons $1 = -3B$ et ainsi $B = -1/3$. Si nous substituons $x = 5$ dans $1 = A(x - 2) + B(x - 5)$, nous obtenons $1 = 3A$ et donc $A = 1/3$. En conséquence,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 5} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |x - 5| - \frac{1}{3} \ln |x - 2| + E = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{|x - 5|}{|x - 2|} \right) + E \end{aligned}$$

où E est une constante. Il découle de (18.9.8) que

$$\ln \left(\frac{|x - 5|}{|x - 2|} \right) = 3t + 3C$$

où C est une constante. Après avoir évalué l'exponentiel des deux cotés de l'égalité, nous obtenons

$$\frac{|x - 5|}{|x - 2|} = e^{3t+3C} = e^{3C} e^{3t} \Rightarrow \frac{x - 5}{x - 2} = D e^{3t}$$

où $D = \pm e^{3C}$. Si nous substituons $x = 7$ et $t = 0$ donnés par $x(0) = 7$ dans cette équation, nous obtenons $D = 2/5$. La solution implicite est donc

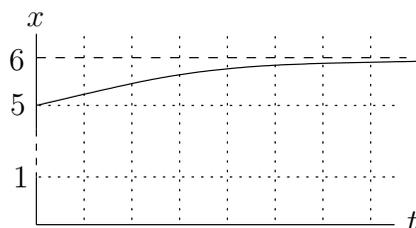
$$\frac{x - 5}{x - 2} = \frac{2e^{3t}}{5}.$$

Si nous résolvons l'équation précédente pour x , nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{x - 5}{x - 2} = \frac{2e^{3t}}{5} &\Rightarrow 5(x - 5) = 2(x - 2)e^{3t} = 2xe^{3t} - 4e^{3t} \Rightarrow 5x - 25 = 2xe^{3t} - 4e^{3t} \\ &\Rightarrow (5 - 2e^{3t})x = 25 - 4e^{3t} \Rightarrow x = \frac{5 - 4e^{3t}}{5 - 2e^{3t}}. \end{aligned}$$

Question 9.40

À partir du portrait de phases donné dans l'énoncé de la question, nous concluons que la solution $x(t)$ de l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ avec la condition initiale $x(0) = x_0 = 5 \in]4, 6[$ est une fonction croissante telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 6$. Le graphe de $x(t)$ pourrait avoir l'allure suivante.



Question 9.41

a) Nous avons l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} = f(y)$ avec $f(x) = y(y^2 - 6y + 5) = y(y-5)(y-1)$. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(y) = 0$. Nous avons trois points d'équilibre : $y = 0$, $y = 1$ et $y = 5$.

b) La dérivée de f est $f'(y) = 3y^2 - 12y + 5$. Puisque $f'(0) = 5 > 0$, $f'(1) = -4 < 0$ et $f'(5) = 20 > 0$, nous avons que les points d'équilibre $y = 0$ et $y = 5$ sont instables alors que le point d'équilibre $y = 1$ est (asymptotiquement) stable.

c) Le tableau ci-dessous donne le signe de f sur chacun des intervalles délimités par les points d'équilibre.

intervalle	$y < 0$	$0 < y < 1$	$1 < y < 5$	$5 < y$
signe de $f(y)$	-	+	-	+

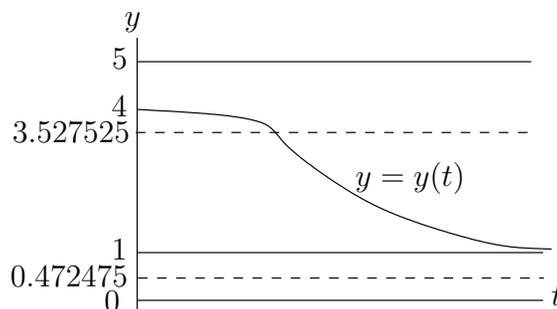
Nous obtenons le portrait de phase suivant.



d) Pour déterminer les points d'inflexion de y , il faut trouver les points où f a un maximum local ou un minimum local. Les points critiques de f sont les solutions de $f'(y) = 3y^2 - 12y + 5 = 0$; c'est-à-dire,

$$y_+ = \frac{1}{3} (6 + \sqrt{21}) \approx 3.527525 \quad \text{et} \quad y_- = \frac{1}{3} (6 - \sqrt{21}) \approx 0.472475 .$$

Comme f' est un polynôme de degré deux avec un coefficient positif pour y^2 , nous concluons que f' passe de positif à négatif au point x_- et de négatif à positif au point x_+ quand y augmente. Donc f a un maximum local à x_- et un minimum local à x_+ . La solution avec la condition initiale $y(0) = 4$ a donc un point d'inflexion lorsque $y(t) = x_+ \approx 3.527525$. Nous obtenons le graphe suivant pour la solution $y = y(t)$ avec $y(0) = 4$.

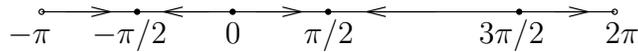
**Question 9.42**

Les points d'équilibre sont les valeurs de θ telles que $f(\theta) = \theta \cos(\theta) = 0$. Nous trouvons $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Les points d'équilibre dans l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$ sont $-\pi/2$, 0 , $\pi/2$ et $3\pi/2$. Le tableau ci-dessous donne le signe de f sur chacun des intervalles délimités par les points d'équilibre.

intervalle	$-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
signe de $f(\theta)$	+	-	+	-	+

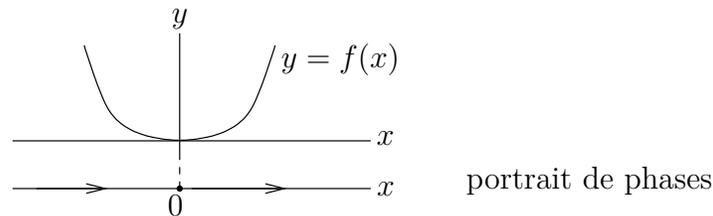
Nous obtenons le portrait de phases suivant.



Question 9.43

Les points d'équilibre sont les valeurs de x telles que $f(x) = x^2 = 0$. Il y a un seul point d'équilibre qui est $x = 0$.

Puisque $f(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, nous obtenons le portrait de phases suivant.



À partir du portrait de phases ci-dessus, nous pouvons conclure que le point d'équilibre $x = 0$ n'est pas stable. Puisque $f'(x) = 2x$, nous avons que $f'(0) = 0$. Le théorème de stabilité des points d'équilibre ne s'applique pas dans ce cas.

Question 9.44

Soit p_1 et p_2 deux points d'équilibre asymptotiquement stables et côte à côte pour une équation différentielle $x' = f(x)$. Puisqu'ils sont asymptotiquement stables, nous avons que f est décroissante au voisinage de p_1 et il en est de même au voisinage de p_2 .

Puisque $f(p_1) = 0$, nous avons que $f(x) < 0$ pour $x > p_1$ et x suffisamment près de p_1 . Soit $x_1 \in]p_1, p_2[$ tel que $f(x_1) < 0$.

De même, puisque $f(p_2) = 0$, nous avons que $f(x) > 0$ pour $x < p_2$ et x suffisamment près de p_2 . Soit $x_2 \in]p_1, p_2[$ tel que $f(x_2) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, il existe p entre x_1 et x_2 tel que $f(p) = 0$. Nous avons donc trouver un point d'équilibre entre p_1 et p_2 . Ce qui contredit que p_1 et p_2 sont deux points d'équilibre asymptotiquement stable et côte à côte. Donc l'hypothèse que p_1 et p_2 sont deux points d'équilibre asymptotiquement stables et côte à côte n'est pas possible.

18.9.4 Applications

Question 9.48

Nous avons l'équation différentielle $\frac{dC}{dt} = f(C)$ où $f(C) = 5 - C + \frac{C}{2 + C}$ car $\beta = 1$ et $\gamma = 5$.

Les points d'équilibre sont les solutions de $f(C) = 0$; c'est-à-dire, les solutions de

$$5 - C + \frac{C}{2 + C} = 0 \Rightarrow (5 - C)(2 + C) + C = 0 \Rightarrow -C^2 + 4C + 10 = 0 .$$

Les solutions de cette dernière équation sont $C_{\pm} = 2 \pm \sqrt{14}$. Ce sont les deux seules points d'équilibre. La concentration $C_- = 2 - \sqrt{14} < 0$ n'a pas de sens physique.

La dérivée de f est $f'(C) = -1 + \frac{2}{(2 + C)^2}$. Ainsi, C_+ est un point d'équilibre stable car $f'(C_+) \approx -0.966629547 < 0$. Par contre, C_- est instable car $f'(C_-) \approx 28.966629547 > 0$.

Question 9.49

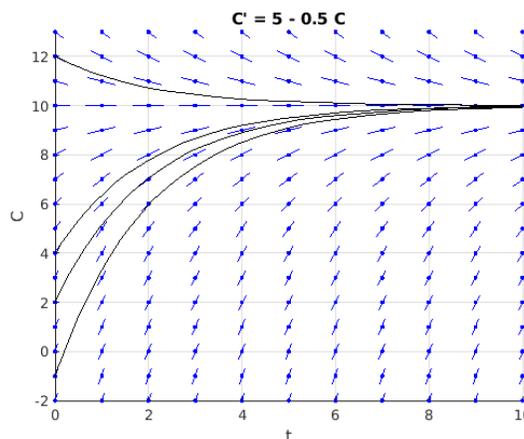
Pour $\beta = 1.0$ et $\Gamma = 5.0$, l'équation (9.9.1) devient

$$\frac{dC}{dt} = (5 - C) + 0.5C = 5 - 0.5C .$$

- a) Nous avons une équation différentielle de la forme $\frac{dC}{dt} = F(C)$ où $F(C) = 5 - 0.5C$. Les points d'équilibre sont les valeurs de C telles que $F(C) = 0$. Le seul point d'équilibre est $C_e = 10$.
- b) Puisque $F'(C) = -0.5$, le point d'équilibre C_e est (asymptotiquement) stable car $F'(C_e) = -0.5 < 0$.
- c) Le portrait de phases de l'équation différentielle ordinaire (9.9.1) est donné ci-dessous.



- d) Le champ de pentes pour l'équation différentielle ordinaire (9.9.1) est donné ci-dessous.



- e) Nous aurions une équation différentielle ordinaire de la forme $\frac{dC}{dt} = F(C)$ où $F(C) = 5 - C$. Les points d'équilibre sont les valeurs de C telles que données par $F(C) = 0$. Le seul point d'équilibre est $C_e = 5$.

Question 9.50

Supposons que $P(t)$ est le nombre de gnous au temps t en années. La solution de l'équation logistique $P'(t) = KP(t)(1 - P(t)/M)$ est $P(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-Kt}}$ où C est une constante.

Il est dit dans l'énoncé du problème que $M = 1800$. De plus, $P(0) = 1000$ et $P(1) = 1100$. Utilisons cette information pour trouver les valeurs de K et C . Les variables C et K sont déterminés par les équations $1000 = P(0) = \frac{1800}{1 + C}$ (qui provient de $P(0) = 1000$) et $1100 = P(1) = \frac{1800}{1 + Ce^{-K}}$ (qui provient de $P(1) = 1100$). La solution de la première équation est $C = 4/5$. Si nous substituons cette valeur de C dans la deuxième équation, nous obtenons $1100 = \frac{1800}{1 + 4e^{-K}/5}$. La solution de cette dernière équation est $K = -\ln\left(\frac{35}{44}\right) \approx 0.22884$.
Donc

$$P(t) \approx \frac{1800}{1 + 4e^{-0.22884t}/5}.$$

Pour trouver la valeur de t telle que $P(t) = 1500$, il faut résoudre pour t l'équation $1500 = \frac{9000}{5 + 4e^{-Kt}}$. Nous obtenons $t = \ln(4)/K \approx 6.0579$ années.

Question 9.51

a) Nous avons une équation différentielle de la forme $\frac{dN}{dt} = F(N)$ où

$$F(N) = \frac{5N^2}{1 + N^2} - 2N = \frac{-2N^3 + 5N^2 - 2N}{1 + N^2}.$$

Les points d'équilibre sont les valeurs de N telles que

$$0 = F(N) = \frac{-2N^3 + 5N^2 - 2N}{1 + N^2};$$

c'est-à-dire, les valeurs de N telles que

$$-2N^3 + 5N^2 - 2N = N(-2N^2 + 5N - 2) = -2N\left(N - \frac{1}{2}\right)(N - 2) = 0.$$

Nous trouvons trois points d'équilibre : $N_1 = 0$, $N_2 = 1/2$ et $N_3 = 2$.

b) La dérivée de F est

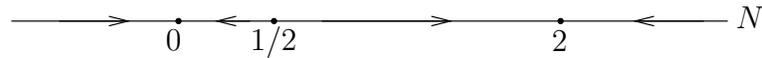
$$\begin{aligned} F'(N) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{5N^2}{1 + N^2} - 2N \right) = \frac{10N(1 + N^2) - 5N^2(2N)}{(1 + N^2)^2} - 2 \\ &= \frac{10N}{(1 + N^2)^2} - 2 = \frac{-2N^4 - 4N^2 + 10N - 2}{(1 + N^2)^2}. \end{aligned}$$

Le point d'équilibre $N_1 = 0$ est asymptotiquement stable car $F'(0) = -2 < 0$. De même, le point d'équilibre $N_3 = 2$ est asymptotiquement stable car $F'(2) = -6/5 < 0$. Par contre, le point d'équilibre $N_2 = 1/2$ est instable car $F'(1/2) = 6/5 > 0$.

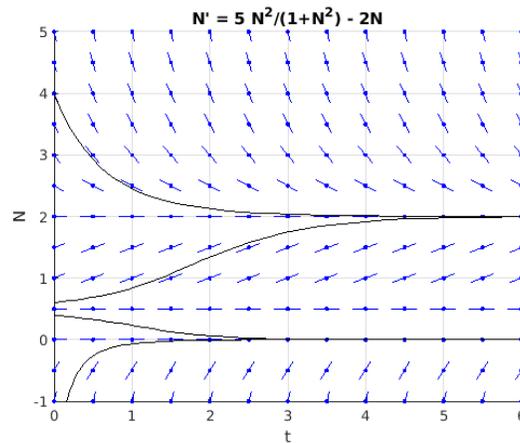
c) Le tableau ci-dessous donne le signe de F sur chacun des intervalles délimités par les points d'équilibre.

intervalle	$N < 0$	$0 < N < 1/2$	$1/2 < N < 2$	$2 < N$
signe de $F(N)$	+	-	+	-

Nous obtenons le portrait de phase suivant.



d) Le champ de pentes pour l'équation différentielle ordinaire (9.9.2) est donné ci-dessous.



e) En supposant que $N \geq 0$ (ce qui est raisonnable pour une population), nous avons que la population va augmenter si $1/2 < N(0) < 2$. Dans ce cas $N(t) \rightarrow 2$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Dans les autres cas, si $N(0) < 1/2$ alors N est une fonction décroissante et $N(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. La population va disparaître. Si $N(0) > 2$ alors N est aussi une fonction décroissante mais $N(t) \rightarrow 2$ lorsque $t \rightarrow \infty$. La population approche un état d'équilibre stable; c'est-à-dire, $N(t) = 2$ pour tout t .

Question 9.52

a) Nous avons une équation différentielle de la forme $\frac{dp}{dt} = f(p)$ où $f(p) = 2p(1-d-p) - p$. Les points d'équilibre sont les solutions de

$$f(p) = 2p(1-d-p) - p = p(1-2p-2d) = 0.$$

Nous trouvons deux points d'équilibre : $p = 0$ et $p = (1-2d)/2$. Pour que $0 \leq p \leq 1$, il faut que $-1/2 \leq d \leq 1/2$. Nous ne pouvons pas avoir $-1/2$ des sections habitées comme nous ne pouvons pas avoir $3/2$ des sections habitées.

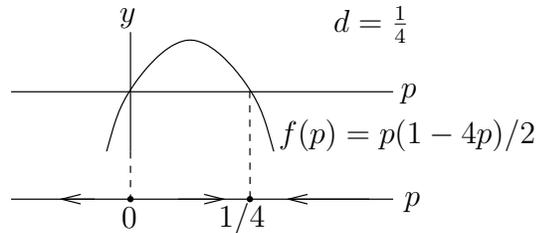
b) L'équation différentielle lorsque $d = 1/4$ est

$$f(p) = p(1-2p-1/2) = p(1-4p)/2. \quad (18.9.9)$$

C'est un polynôme qui est concave. Le graphe de cette fonction est donné dans la figure ci-dessous. Les points d'équilibre $p = 0$ et $p = 1/4$ sont les racines de ce polynôme.

- $f(p) > 0$ pour $0 < p < 1/4$. Donc $p'(t) > 0$ lorsque $p(t)$ se trouve entre 0 et $1/4$. C'est-à-dire que p est une fonction croissante lorsque $p(t)$ se trouve entre 0 et $1/4$.
- $f(p) < 0$ pour $p < 0$ et $p > 1/4$. Donc $p'(t) < 0$ lorsque $p(t)$ est inférieur à 0 ou supérieur à $1/4$. C'est-à-dire que p est une fonction décroissante lorsque $p(t)$ est inférieur à 0 ou supérieur à $1/4$. Seul $1/4 < p(t) \leq 1$ est intéressant.

Le portrait de phases pour $d = 1/4$ est donné dans la figure ci-dessous. Le point d'équilibre $p = 0$ est instable alors que le point d'équilibre $p = 1/4$ est asymptotiquement stable.



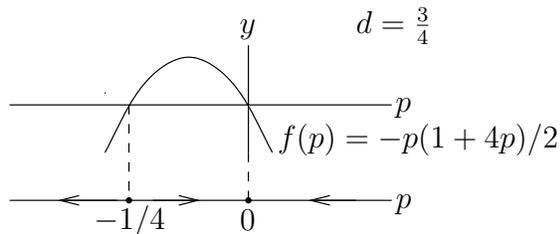
L'équation différentielle lorsque $d = 3/4$ est

$$f(p) = p(1 - 2p - 3/2) = -p(1 + 4p)/2. \quad (18.9.10)$$

C'est un polynôme qui est concave. Le graphe de cette fonction est donnée dans la figure ci-dessous. Les points d'équilibre $p = 0$ et $p = -1/4$ sont les racines de ce polynôme.

- $f(p) > 0$ pour $-1/4 < p < 0$. Donc $p'(t) > 0$ lorsque $p(t)$ se trouve entre $-1/4$ et 0. C'est-à-dire que p est une fonction croissante lorsque $p(t)$ se trouve entre $-1/4$ et 0. Ces valeurs de p n'ont pas d'intérêt car elles sont négatives.
- $f(p) < 0$ pour $p > 0$ et $p < -1/4$. Donc $p'(t) < 0$ lorsque $p(t)$ est inférieur à $-1/4$ ou supérieur à 0. C'est-à-dire que p est une fonction décroissante lorsque $p(t)$ est inférieur à $-1/4$ ou supérieur à 0. Seules les valeurs de $p(t)$ entre 0 et 1 sont intéressantes.

Le portrait de phases pour $d = 3/4$ est donné dans la figure ci-dessous. Le point d'équilibre $p = 0$ est asymptotiquement stable alors que le point d'équilibre $p = -1/4$ est instable.



c) Puisque $f(p) = p(1 - 2p - 2d)$, nous avons $f'(p) = 1 - 4p - 2d$.

le point d'équilibre $p = 0$ est asymptotiquement stable pour $d > 1/2$ car $f'(0) = 1 - 2d < 0$ pour $d > 1/2$. Par contre, ce point d'équilibre est instable pour $d < 1/2$ car $f'(0) = 1 - 2d > 0$ pour $d < 1/2$.

Pour le point d'équilibre $p = (1 - 2d)/2$, nous avons

$$f' \left(\frac{1 - 2d}{2} \right) = 1 - 4 \left(\frac{1 - 2d}{2} \right) - 2d = -1 + 2d.$$

Ainsi, le point d'équilibre $p = (1 - 2d)/2$ est asymptotiquement stable pour $d < 1/2$ car $f'((1 - 2d)/2) < 0$ pour $d < 1/2$. Par contre, le point d'équilibre $p = (1 - 2d)/2$ est instable pour $d > 1/2$ car $f'((1 - 2d)/2) > 0$ pour $d > 1/2$.

Les points d'équilibre 0 et $(1 - 2d)/2$ échangent leur stabilité lorsque $d = 1/2$.

d) Lorsque $d = 1/4$ (1/4 des sections sont détruites), la fraction des sections habitées approche 1/4 (soit 25% du territoire) lorsque t tend vers plus l'infini. La population va survivre. Par contre, lorsque $d = 3/4$ (3/4 des sections sont détruites), la fraction des sections habitées approche 0 (soit 0% du territoire) lorsque t tend vers plus l'infini. La population ne survivra pas.

Question 9.53

Si $Q(t)$ est la quantité de sel dans l'eau du réservoir au temps t , alors

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{0.01 \times 10}_{\text{quantité de sel ajoutée par minute}} - \underbrace{0.01Q(t)}_{\text{quantité de sel perdue par minute}} .$$

Utilisons la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation différentielle.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{0.1 - 0.01Q} dQ &= \int dt \Rightarrow -100 \ln |0.1 - 0.01Q| = t + C \\ &\Rightarrow |0.1 - 0.01Q| = e^{-0.01C} e^{-0.01t} \\ &\Rightarrow 0.1 - 0.01Q = D e^{-0.01t} \Rightarrow Q = 10 - 100D e^{-0.01t} \end{aligned}$$

où $D = \pm e^{-0.01C}$. Notons que $D = 0$ est aussi acceptable car $Q(t) = 10$ pour tout t est un solution.

La concentration initiale est de 0.025 kg/l, donc $Q(0) = 25$ g/l. La condition initiale $Q(0) = 25$ donne $25 = 10 - 100D$ et ainsi $D = -0.15$.

Si la concentration de sel est de 0.02 kg/l, nous avons 20 kg de sel dans l'eau du réservoir. Il faut trouver t tel que $20 = 10 + 15e^{-0.01t}$. Ce qui donne $t = -100 \ln(2/3) = 40.5465 \dots$ minutes.

Question 9.54

Soit $Q(t)$ la quantité de sel (en kg) dans le réservoir au temps t (en minutes). La fonction Q satisfait l'équation différentielle suivante.

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{0.1 \times 5 + 0.05 \times 15}_{\text{quantité de sel ajoutée par minute}} - \underbrace{0.02Q(t)}_{\text{quantité de sel perdue par minute}} .$$

Nous allons résoudre l'équation différentielle $Q' = 1.25 - 0.02Q$ avec la condition initiale $Q(0) = Q_0$; c'est-à-dire, Q_0 kg de sel au temps $t = 0$. Utilisons la méthode de séparation des variables pour résoudre ce problème.

$$\int \frac{1}{1.25 - 0.02Q} dQ = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{0.02} \ln |1.25 - 0.02Q| = t + C$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ln |1.25 - 0.02Q| &= -0.02t - 0.02C \\ \Rightarrow 1.25 - 0.02Q &= De^{-0.02t}\end{aligned}$$

où $D = \pm e^{-0.02C}$. Notons que $D = 0$ est aussi acceptable car, pour $D = 0$, nous obtenons le point d'équilibre $Q(t) = 1.25/0.02 = 62.5$ kg pour tout t . Ainsi, $Q(t) = 62.5 - 50De^{-0.02t}$ avec $D \in \mathbb{R}$. La condition initiales $Q(0) = Q_0$ donne $D = 0.02(62.5 - Q_0)$.

La quantité de sel dans le réservoir après t minutes est donc

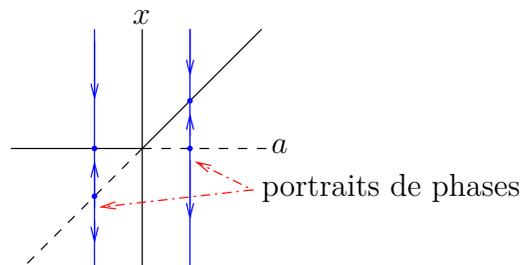
$$Q(t) = 62.5 - (62.5 - Q_0)e^{-0.02t} .$$

Nous remarquons que le volume du liquide dans le réservoir ne change pas. À chaque minute, il y a 20 litres de saumure qui est ajoutée et 20 litres du liquide dans le réservoir qui est retiré. Le volume de liquide dans le réservoir demeure donc à 1000 litres. Ainsi, la concentration de sel dans le réservoir après t minutes est $C(t) = Q(t)/1000$ kg/l.

Question 9.55

a) Nous avons une équation différentielle de la forme $\frac{dx}{dt} = f(x) = ax - x^2$ où a est un paramètre. Les points d'équilibre sont les solutions de $f(x) = 0$; c'est-à-dire, $x = 0$ et $x = a$.

b) Nous avons que $f'(x) = a - 2x$. Puisque $f'(0) = a$, le point d'équilibre $x = 0$ est stable pour $a < 0$ et instable pour $a > 0$. De même, puisque $f'(a) = -a$, le point d'équilibre $x = a$ est stable pour $a > 0$ et instable pour $a < 0$. Nous obtenons le diagramme de bifurcation suivant.



Nous avons ajouté quelques portraits de phases au diagramme de bifurcation ci-dessus pour illustrer comment le diagramme de bifurcation résume l'évolution des portraits de phases lorsque a traverse l'origine.

c) Lorsque a traverse l'origine, la stabilité des points d'équilibre $x = 0$ et $x = a$ change.

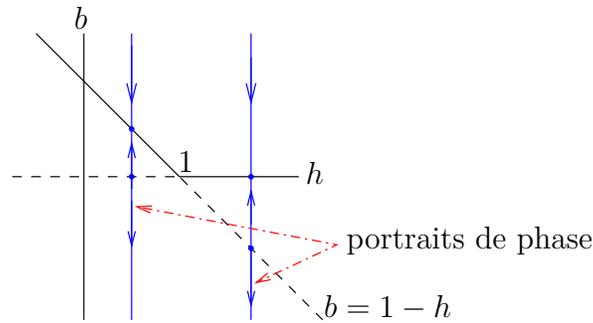
Question 9.56

a) Nous avons une équation différentielle de la forme

$$\frac{db}{dt} = f(b) = b(1 - b) - hb = (1 - h)b - b^2 .$$

Les points d'équilibre sont les solutions de $f(b) = 0$; c'est-à-dire, $b = 0$ et $b = 1 - h$.

b) Nous avons que $f'(b) = (1 - h) - 2b$. Puisque $f'(0) = 1 - h$, le point d'équilibre $b = 0$ est stable pour $h > 1$ et instable pour $h < 1$. De même, puisque $f'(1 - h) = -(1 - h)$, le point d'équilibre $b = 1 - h$ est stable pour $h < 1$ et instable pour $h > 1$. Nous obtenons le diagramme de bifurcation suivant.



Nous avons ajouté quelques portraits de phases au diagramme de bifurcation ci-dessus pour illustrer comment le diagramme de bifurcation résume l'évolution des portraits de phases lorsque h traverse $h = 1$.

c) Nous avons une bifurcation transcritique lorsque h traverse la valeur 1.

18.9.5 Méthode d'Euler

Question 9.59

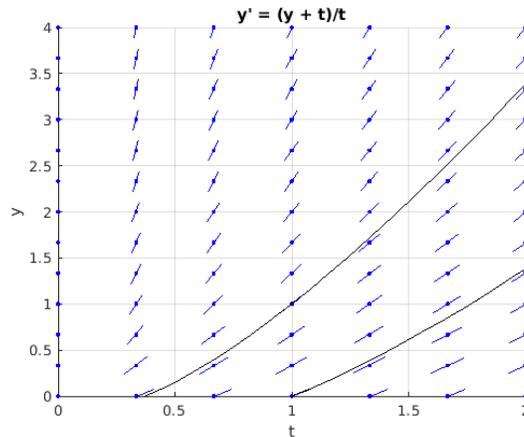
Nous avons $h = (2 - 1)/10 = 0.1$ et $t_i = 1 + hi = 1 + 0.1i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$.

L'équation différentielle est de la forme $y' = f(t, y)$ où $f(t, y) = (y+t)/t$. Soit y , la solution de l'équation différentielle ci-dessus avec la condition initiale $y(1) = 0$. Les approximations w_i de $y(t_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ sont donc données par $w_0 = y_0 = y(t_0) = y(1) = 0$ et $w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) = w_i + 0.1(w_i + t_i)/t_i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 9$. Ainsi,

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + 0.1 \frac{w_0 + t_0}{t_0} = 0 + 0.1 \frac{0 + 1}{1} = 0.1 \\ w_2 &= w_1 + 0.1 \frac{w_1 + t_1}{t_1} = 0.1 + 0.1 \frac{0.1 + 1.1}{1.1} = 0.2\overline{09} \\ w_3 &= w_2 + 0.1 \frac{w_2 + t_2}{t_2} = 0.2\overline{09} + 0.1 \frac{0.2\overline{09} + 1.2}{1.2} = 0.326\overline{51} \\ w_4 &= w_3 + 0.1 \frac{w_3 + t_3}{t_3} = 0.326\overline{51} + 0.1 \frac{0.326\overline{51} + 1.3}{1.3} = 4.516317\overline{0} \\ w_5 &= 0.5838911\dots \\ w_6 &= 0.7228171\dots \\ w_7 &= 0.8679932\dots \\ w_8 &= 1.0190516\dots \\ w_9 &= 1.1756656\dots \\ w_{10} &= 1.3375428\dots \end{aligned}$$

Pour déterminer si les approximations sont des surestimations ou sous-estimation des valeurs $y(t_i)$, il faut déterminer à l'aide du champ de pentes si les solutions seront convexe ou concave (figure 9.18). Le champ de pentes de l'équation différentielle $y' = (y + t)/t$ est

donné dans la figure ci-dessous. Nous voyons que les solutions seront convexe et donc nos approximations seront des sous-estimations des valeurs exactes.



Question 9.60

a) Nous avons $h = (1 - 0)/10 = 0.1$ et $x_i = h i = 0.1 i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$.

L'équation différentielle est de la forme $y' = f(x, y)$ où $f(x, y) = \frac{3x^2}{2y}$. Soit y la solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ avec la condition initiale $y(1) = 1$. Les approximations w_i de $y(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ sont données par $w_0 = y_0 = y(x_0) = y(0) = 1$ et $w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) = w_i + \frac{0.3x_i^2}{2w_i}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, 9$. Ainsi,

$$w_1 = w_0 + \frac{0.3x_0^2}{2w_0} = 1 + \frac{0.3 \times 0^2}{2 \times 1} = 1$$

$$w_2 = w_1 + \frac{0.3x_1^2}{2w_1} = 1 + \frac{0.3 \times 0.1^2}{2 \times 1} = 1.0015$$

$$w_3 = w_2 + \frac{0.3x_2^2}{2w_2} = 1.0015 + \frac{0.3 \times 0.2^2}{2 \times 1.0015} \approx 1.007491013479780$$

$$w_4 = w_3 + \frac{0.3x_3^2}{2w_3} \approx 1.020890636721453$$

$$w_5 \approx 1.044399521156984$$

$$w_6 \approx 1.080305320844116$$

$$w_7 \approx 1.130291189614814$$

$$w_8 \approx 1.195318680473207$$

$$w_9 \approx 1.275631990696047$$

$$w_{10} \approx 1.370878896454269$$

b) Utilisons la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation différentielle

$y' = \frac{3x^2}{2y}$ avec la condition initiale $y(1) = 1$.

$$\int 2y \, dy = \int 3x^2 \, dx \Rightarrow y^2 = x^3 + C \Rightarrow y = \sqrt{x^3 + C} .$$

Il découle de la condition initiale $y(1) = 1$ que $C = 1$. La solution cherchée est $y(x) = \sqrt{x^3 + 1}$.

c) L'erreur absolue est

$$|w_{10} - y(1)| \approx |1.370878896454269 - \sqrt{2}| \approx 0.043334665918826 .$$

Si nous comparons avec la valeur de $y(1) = \sqrt{2} \approx 1.414213562373095$, l'erreur absolue est acceptable. L'erreur relative (relative à la valeur estimée) est donnée par

$$\frac{|w_{10} - y(1)|}{|y(1)|} \approx 0.030642236131655 .$$

Ceci représente une erreur relative d'environ 3.06 %.

18.10 Vecteurs

18.10.1 Équation d'une droite

Question 10.1

La direction de la droite est donnée par le vecteur $\mathbf{q} = (2, -5, 5) - (-4, 3, 4) = (6, -8, 1)$. Si nous choisissons $\mathbf{p} = (2, -5, 5)$ comme point sur la droite, nous obtenons la représentation vectorielle

$$(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{q}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. La représentation paramétrique correspondante est

$$x_1 = 6\alpha + 2 \quad , \quad x_2 = -8\alpha - 5 \quad \text{et} \quad x_3 = \alpha + 5$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Une représentation standard est donnée par

$$\frac{x_1 - 2}{6} = \frac{x_2 + 5}{-8} = x_3 - 5 .$$

18.10.2 Équation d'un plan

Question 10.2

Le plan parallèle que nous cherchons doit être perpendiculaire au vecteur $(2, 3, -1)$. Puisque ce plan doit contenir le point $(2, 3, 2)$, le plan est décrit par l'équation

$$\langle (x_1, x_2, x_3) - (2, 3, 2), (2, 3, -1) \rangle = 2(x_1 - 2) + 3(x_2 - 3) - (x_3 - 2)$$

$$= 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 11 = 0 .$$

Question 10.3

La direction de la droite ℓ est donnée par $\mathbf{t} = (2, 3, -2)$. Comme la droite est dans le plan \mathcal{M} , le vecteur \mathbf{t} est donc parallèle au plan \mathcal{M} .

Il nous faut un autre vecteur \mathbf{s} parallèle au plan \mathcal{M} qui ne soit pas colinéaire avec \mathbf{t} pour que nous puissions trouver un vecteur perpendiculaire \mathbf{m} au plan \mathcal{M} . Le point $(2, -3, 3)$ est un point de la droite ℓ et donc du plan \mathcal{M} . Puisque $(1, 2, 1)$ est aussi un point de \mathcal{M} , nous avons que

$$\mathbf{s} = (2, -3, 3) - (1, 2, 1) = (1, -5, 2)$$

est un autre vecteur parallèle au plan \mathcal{M} . Il n'est pas colinéaire avec \mathbf{t} . Un vecteur perpendiculaire au plan \mathcal{M} est

$$\mathbf{m} = \mathbf{t} \times \mathbf{s} = (-4, -6, -13) .$$

Le plan que nous cherchons doit être perpendiculaire au vecteur $(-4, -6, -13)$ et doit contenir le point $(1, 2, 1)$, le plan est donc décrit par l'équation

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3) - (1, 2, 1), (-4, -6, -13) \rangle &= -4(x_1 - 1) - 6(x_2 - 2) - 13(x_3 - 1) \\ &= -4x_1 - 6x_2 - 13x_3 + 29 = 0 . \end{aligned}$$

Question 10.4

Le vecteur $\mathbf{m} = (2, 0, 5)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{M} donné par $2x_1 + 5x_3 + 3 = 0$ et le vecteur $\mathbf{n} = (1, -3, 1)$ est perpendiculaire au plan \mathcal{N} donné par $x_1 - 3x_2 + x_3 + 2 = 0$.

Puisque \mathbf{m} et \mathbf{n} ne sont pas colinéaires, nous avons que l'intersection des deux plans est une droite ℓ .

1^{er} méthode: Le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} = (15, 3, -6)$ est parallèle à la droite ℓ . Il est facile de vérifier que $(1, 2/3, -1)$ est un point de la droite ℓ puisque c'est une point qui appartient aux deux plans. La représentation standard de ℓ est donc

$$\frac{x_1 - 1}{15} = \frac{x_2 - 2/3}{3} = \frac{x_3 + 1}{-6} .$$

2^e méthode: Nous résolvons le système d'équations linéaires

$$2x_1 + 5x_3 + 3 = 0 \tag{18.10.1}$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 + 2 = 0 \tag{18.10.2}$$

Nous obtenons $x_3 = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5}x_1$ de l'équation (18.10.1). Si nous substituons dans l'équation (18.10.2), nous obtenons

$$x_1 - 3x_2 + \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{5}x_1\right) + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{15} + \frac{1}{5}x_1 .$$

La droite ℓ est donc donné par la représentation paramétrique

$$x_1 = \alpha \quad , \quad x_2 = \frac{7}{15} + \frac{1}{5}\alpha \quad \text{et} \quad x_3 = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\alpha \quad .$$

Nous avons bien obtenu deux représentations équivalentes de la droite ℓ . En effet, notons que les deux représentations décrivent des droites qui ont la même direction. La direction pour la représentation standard est $\mathbf{r} = (15, 3, -6)$ alors que la direction pour la représentation paramétrique est $\mathbf{s} = (1, 1/5, -2/5)$. Nous avons $\mathbf{r} = 15\mathbf{s}$. De plus, $(1, 2/3, -1)$ est un élément des deux droites. La représentation paramétrique donne $(1, 2/3, -1)$ lorsque $\alpha = 1$. Puisque nous avons deux droites parallèles qui passent par le même point, nous avons donc la même droite.

18.11 Algèbre linéaire

18.11.1 Matrices

Question 11.1

a)

$$D + E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 5+1 & 2+3 \\ -1-1 & 0+1 & 1+2 \\ 3+4 & 2+1 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad .$$

b)

$$D - E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 & 5-1 & 2-3 \\ -1+1 & 0-1 & 1-2 \\ 3-4 & 2-1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

c)

$$5C = 5 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 4 & 5 \times 2 \\ 5 \times 3 & 5 \times 1 & 5 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 15 & 5 & 25 \end{pmatrix} \quad .$$

d)

$$-7C = -7 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \times 1 & -7 \times 4 & -7 \times 2 \\ -7 \times 3 & -7 \times 1 & -7 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{pmatrix} \quad .$$

e) L'opération $2B - C$ n'est pas définie car les matrices $2B$ et C n'ont pas les mêmes dimensions.

f)

$$4E - 2D = 4 \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

g)

$$-3(D + 2E) = -3D - 6E = -3 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{pmatrix}.$$

h)

$$A - A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i)

$$\text{tr}(D) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 4 = 5.$$

j)

$$\text{tr}(D - 3E) = \text{tr} \begin{pmatrix} -17 & 2 & -7 \\ 2 & -3 & -5 \\ -9 & -1 & -5 \end{pmatrix} = -17 - 3 - 5 = -25.$$

k) $\text{tr}(A)$ n'est pas définie car A n'est pas une matrice carrée.

l)

$$2A^\top + C = 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

m)

$$\begin{aligned} D^\top - E^\top &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^\top - \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^\top \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (D - E)^\top. \end{aligned}$$

Voir (b) pour la valeur de $D - E$.

n)

$$(D - E)^\top = D^\top - E^\top = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

o) l'opération $B^\top + 5C^\top$ n'est pas définie car les matrices B^\top et $5C^\top$ n'ont pas la même dimension.

p)

$$B - B^T = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

q)

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 6 + 0 & 3 \times (-1) + 0 \\ -1 \times 6 + 0 & (-1) \times (-1) + 2 \times 2 \\ 1 \times 6 + 0 & 1 \times (-1) + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ -6 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

r) L'opération BA n'est pas définie car le nombre de colonnes de B n'est pas égale au nombre de ligne de A .

s)

$$(3E)D = 3 \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 14 & 36 & 25 \\ 4 & -1 & 7 \\ 12 & 26 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 108 & 75 \\ 12 & -3 & 21 \\ 36 & 78 & 63 \end{pmatrix}.$$

t)

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 23 & 7 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 69 & 21 \\ 9 & -19 & 13 \\ 9 & 25 & 17 \end{pmatrix}.$$

u)

$$(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 9 & 69 & 21 \\ 9 & -19 & 13 \\ 9 & 25 & 17 \end{pmatrix}.$$

v)

$$CC^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{pmatrix}.$$

w) Puisque

$$DA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 1 \\ 11 & 8 \end{pmatrix},$$

nous avons

$$(DA)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

x)

$$E^T D^T = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 32 \\ 8 & 0 & 9 \\ 19 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

y)

$$(DE)^\top = E^\top D^\top = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 32 \\ 8 & 0 & 9 \\ 19 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

z)

$$\begin{aligned} (C^\top B)A^\top &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 24 & -2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 4 & 11 \\ 72 & -28 & 22 \\ 36 & 4 & 20 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

18.11.2 Représentations matricielles des systèmes d'équations linéaires

Question 11.3

a) La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right).$$

 $R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right).$$

 $(1/2)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right).$$

 $R_3 - 3R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \right).$$

Finalement, $-2R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Il n'est pas nécessaire de complètement réduire le côté gauche de la matrice augmentée pour obtenir la matrice identité. Nous obtenons $z = 3$ de la troisième ligne. Ainsi, la deuxième ligne nous donne $y = (-17/2) + (7/2)z = 2$. Finalement, nous obtenons $x = 9 - y - 2z = 1$ de la première ligne.

b) La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

$R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 12 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

$R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 12 & 2 \\ 0 & 9 & 27 & 5 \end{array} \right).$$

$(1/9)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5/9 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_1 - 4R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 1 & 3 & 5/9 \end{array} \right).$$

Nous trouvons donc $x = -2/9$, $y = 5/9 - 3\alpha$ et $z = \alpha \in \mathbb{R}$. Il y a une infinité de solutions.

c) La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$ suivie de $R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -9 & -14 \end{array} \right).$$

$R_2 \leftrightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & -14 \end{array} \right).$$

$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & -11 \\ 0 & 3 & -9 & -14 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{array} \right).$$

$R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \end{array} \right).$$

$(1/12)R_2 \rightarrow R_2$ suivie de $R_2 \leftrightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/12 \end{array} \right).$$

En procédant à partir de la troisième ligne jusqu'à la première ligne, nous trouvons $x_3 = -5/12$, $x_2 = -3 + 7x_3 = -71/12$ et $x_1 = 6 + x_2 - 2x_3 = 11/12$.

d) La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_1 - 7R_2 \rightarrow R_1$ suivie de $R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & -27 & -3 & -2 \end{array} \right).$$

$-(1/12)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9/4 & 1/4 & 1/6 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 1 & 9/4 & 1/4 & 1/6 \end{array} \right).$$

Nous trouvons donc $x_1 = 2/3 + \alpha_1/2 + \alpha_2/2$, $x_2 = 1/6 - 9\alpha_1/4 - \alpha_2/4$, $x_3 = \alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $x_4 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

e) La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1$ suivie de $-R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 7 & 37 \\ 0 & 1 & -4 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/3)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & 37/3 \\ 0 & 1 & -4 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ainsi, $x = 37/3 - 7\alpha/3$, $y = -26 + 4\alpha$ et $z = \alpha \in \mathbb{R}$.

Question 11.4

Nous avons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array} \right).$$

$R_3 - R_1 - R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c - a - b \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & c - a - b \end{array} \right).$$

$R_1 + R_2 \rightarrow R_1$ suivie de $-R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a - b \\ 0 & 0 & 0 & c - a - b \end{array} \right).$$

La seule contrainte pour que le système ait une solution est donnée par la troisième ligne et c'est $0 = c - a - b$. Aucune autre contrainte n'est imposée au système.

Question 11.5

a) Nous avons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & b \end{array} \right).$$

$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 3 - 2a & b - 2 \end{array} \right). \quad (18.11.1)$$

I: Si $3 - 2a \neq 0$, le système a une solution unique. Nous pouvons effectuer l'opération $(1/(3 - 2a))R_2 \rightarrow R_2$ pour obtenir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & (b - 2)/(3 - 2a) \end{array} \right)$$

et $R_1 - aR_2 \rightarrow R_1$ pour obtenir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (3-ab)/(3-2a) \\ 0 & 1 & (b-2)/(3-2a) \end{array} \right).$$

Nous avons donc la solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-ab)/(3-2a) \\ (b-2)/(3-2a) \end{pmatrix}$.

II: Si $3 - 2a = 0$ et $b - 2 = 0$, alors (18.11.1) est réduit à

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Il y a une infinité de solutions de la forme $x = 1 - as$ et $y = s \in \mathbb{R}$ si $a \neq 0$, ou $x = 1$ et $y = s \in \mathbb{R}$ si $a = 0$.

III: Si $3 - 2a = 0$ et $b - 2 \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions car la dernière ligne de la matrice augmentée (18.11.1) est $0 = b - 2 \neq 0$.

b) La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ b & 5 & 2 \end{array} \right).$$

$R_2 - bR_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 5-ab & 2-b \end{array} \right). \quad (18.11.2)$$

I: Si $5 - ab \neq 0$, nous pouvons effectuer l'opération $(1/(5-ab))R_2 \rightarrow R_2$ pour obtenir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & (2-b)/(5-ab) \end{array} \right)$$

et l'opération $R_1 - aR_2 \rightarrow R_1$ pour obtenir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (5-2a)/(5-ab) \\ 0 & 1 & (2-b)/(5-ab) \end{array} \right).$$

Ainsi, il y a une solution unique donnée par $x = (5-2a)/(5-ab)$ et $y = (2-b)/(5-ab)$.

II: Si $5 - ab = 2 - b = 0$, nous obtenons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Il y a une infinité de solution de la forme $x = 1 - as$ et $y = s \in \mathbb{R}$ si $a \neq 0$, ou $x = 1$ et $y = s \in \mathbb{R}$ si $a = 0$.

III: Si $5 - ab = 0$ et $2 - b \neq 0$, il n'y a pas de solutions car la dernière ligne de la matrice augmentée (18.11.2) donne $0 = 2 - b \neq 0$.

Question 11.6

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & h \\ 2 & -3 & h & 2 \end{array} \right).$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & h \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & h & 2 \end{array} \right).$$

$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & h \\ 0 & -3 & -5 & -1 - 2h \\ 0 & -5 & h - 8 & 2 - 2h \end{array} \right).$$

$(-1/3)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & h \\ 0 & 1 & 5/3 & (1 + 2h)/3 \\ 0 & -5 & h - 8 & 2 - 2h \end{array} \right).$$

Finalement, $R_3 + 5R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & h \\ 0 & 1 & 5/3 & (1 + 2h)/3 \\ 0 & 0 & (1 + 3h)/3 & (11 + 4h)/3 \end{array} \right).$$

La dernière ligne est

$$\left(\frac{1 + 3h}{3} \right) z = \frac{11 + 4h}{3}.$$

- a) Si $h \neq -1/3$, alors il y a une seule solution avec $z = (11 + 4h)/(1 + 3h)$, $y = (2h^2 - 5h - 18)/(1 + 3h)$ et $x = (h^2 - 10h - 26)/(1 + 3h)$.
- b) Si $h = -1/3$, nous obtenons $0 = 29/9$ qui n'a pas de sens. Il n'y a donc pas de solutions.
- c) Il n'y a pas de valeurs de h pour lesquelles le système ci-dessus a un nombre infini de solutions. Nous ne pouvons pas avoir $1 + 3h = 0$ et $11 + 4h = 0$ en même temps.

Question 11.7

Si x est le nombre d'individus de l'espèce X et y est le nombre d'individus de l'espèce Y, alors x et y doivent satisfaire

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 900 \\ 3x + 4y &= 960 \end{aligned}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 900 \\ 3 & 4 & 960 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_2 \leftrightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -6 & -1020 \\ 3 & 4 & 960 \end{array} \right).$$

$R_2 + 3R_1 \rightarrow R_2$ suivi de $-R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 1020 \\ 0 & -14 & -2100 \end{array} \right).$$

$(-1/14)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 1020 \\ 0 & 1 & 150 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_1 - 6R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 150 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x = 120$ et $y = 150$.

18.11.3 Déterminant

Question 11.9

a) La matrice est inversible car $\det(A) = 3 \neq 0$. Nous avons

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice est inversible car $\det(A) = -4 \neq 0$. Nous avons

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) La matrice est inversible car $\det(A) = 3 \neq 0$. Nous avons

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

d) A n'est pas inversible car $\det(A) = 0$.

e) A n'est pas inversible car $\det(A) = 0$.

f) La matrice est inversible car $\det(A) = -1 \neq 0$. Nous avons

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

g) Si nous développons selon la deuxième ligne, nous avons

$$\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 0 - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -(4 - 2) - (1 - 2) = -1 \neq 0.$$

Puisque le déterminant de la matrice A est différent de 0, la matrice A est inversible. Nous considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_3 \rightarrow R_2$ et $R_1 + R_3 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1$ suivie de $-R_3 \rightarrow R_3$ et $-R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_2 \leftrightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Nous avons donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 11.10

a) Nous avons

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 - 9 - 6 & -5 + 24 - 2 & -3 - 4 \\ -6 + 6 & 16 + 2 & -2 + 4 \\ 44 + 6 + 30 & -20 - 16 + 10 & 2 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 17 & -7 \\ 0 & 18 & 2 \\ 80 & -26 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 33-10 & -11-5 \\ -3-4 & -9+16+2 & 3+8-5 \\ 6+16 & 18+4-8 & -6+2+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 23 & -16 \\ -7 & 9 & 6 \\ 22 & 14 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $AB \neq BA$.

b) Puisque

$$\begin{aligned} 2A - 3B^T - C &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 15 & 7 & 9 \\ -7 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 33 & -9 & 18 \\ -15 & 24 & 6 \\ 0 & -3 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 15 & 7 & 9 \\ -7 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-33-6 & 6+9+1 & -2-18 \\ 15-15 & 4-24-7 & 2-6-9 \\ 8+7 & -4+3+2 & 10-12+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 & 16 & -20 \\ 0 & -27 & -13 \\ 15 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \det(2A - 3B^T - C) &= -37 \det \begin{pmatrix} -27 & -13 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 + 15 \det \begin{pmatrix} 16 & -20 \\ -27 & -13 \end{pmatrix} \\ &= -37(-27 + 13) + 15(-16 \times 13 - 20 \times 27) = -10,702 \end{aligned}$$

où le déterminant est développé selon la première colonne.

c) Si nous calculons le déterminant de C selon la première ligne, nous trouvons

$$\begin{aligned} \det(C) &= 6 \det \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} + 0 \\ &= 6(-21 + 18) + (-45 + 63) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice C n'est pas inversible.

d) Nous considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_3 + 7R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -4 & 7 & 1 \end{array} \right).$$

$(1/16)R_3 \rightarrow R_3$ et $(1/2)R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 7/16 & 1/16 \end{array} \right).$$

$R_1 + R_3 \rightarrow R_1$ et $R_2 - (1/2)R_3 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 3/4 & 7/16 & 1/16 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & 9/32 & -1/32 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 7/16 & 1/16 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & -13/32 & 5/32 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & 9/32 & -1/32 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 7/16 & 1/16 \end{array} \right).$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & -13/32 & 5/32 \\ 1/8 & 9/32 & -1/32 \\ -1/4 & 7/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

18.11.4 Valeurs propres et vecteurs propres

Question 11.11

Pour chacune des réponses ci-dessous, nous donnons les valeurs propres de la matrice, un ensemble de vecteurs propres linéairement indépendant associé à chacune des valeurs propres, et la multiplicité algébrique des valeurs propres.

a)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
-2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1
4	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	1

b)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
4	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	1
-4	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	1

c)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
3	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	1
6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	1
9	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	1

d)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
-3	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	1
5	$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	2

Nous avons donné deux vecteurs propres, \mathbf{u} et \mathbf{v} , associés à la valeur propre 5 en prenant bien soin de choisir deux vecteurs qui ne sont pas un multiple l'un de l'autre. Toute combinaison linéaire $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est aussi un vecteur propre de A associé à la valeur propre 5. Le lecteur est invité à vérifier que cela est vrai.

e)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
$0.8 + 0.6i$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	1
$0.8 - 0.6i$	$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	1

f)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
3	$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	2

Nous ne pouvons pas trouver d'autres vecteurs propres qui ne soient pas un multiple de \mathbf{u} .

g) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbf{I}) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si nous développons selon la deuxième colonne, nous obtenons

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 + (3 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} + 0 \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4) = (3 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -2$.

Pour $\lambda_1 = 3$, les vecteurs propres \mathbf{x} doivent satisfaire $(A - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire,

$$(A - 3\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 + R_2 + R_3 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right).$$

$-(1/5)R_3 \rightarrow R_3$ suivit de $R_2 - R_3 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Ainsi, $x_1 = x_3 = 0$ et x_2 est libre. Si nous prenons $x_2 = 1$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = 2$, les vecteurs propres \mathbf{x} doivent satisfaire $(A - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 + R_1 \rightarrow R_3$ suivit de $-(1/2)R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ainsi, $x_1 - x_3 = 0$ et $x_2 + 2x_3 = 0$. Donc $x_1 = x_3$ et $x_2 = -2x_3$. Si nous prenons $x_3 = 1$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_3 = -2$, les vecteurs propres \mathbf{x} doivent satisfaire $(A - \lambda_3 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nous avons

$$(A + 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_1 \rightarrow R_3$ suivit de $(1/2)R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/5)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ainsi, $x_1 + x_3 = 0$ et $x_2 = 0$. Donc $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 0$. Si nous prenons $x_3 = 1$, nous obtenons le vecteur propre

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion,

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
$\lambda_1 = 3$	$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1
$\lambda_2 = 2$	$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	1
$\lambda_3 = 2$	$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	1

h)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
-2	$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	2
4	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	1

Nous avons donné deux vecteurs propres, \mathbf{u} et \mathbf{v} , associés à la valeur propre -2 en prenant bien soin de choisir deux vecteurs qui ne sont pas un multiple l'un de l'autre. Toute combinaison linéaire $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est aussi un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2 .

i)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	1
$2 + \sqrt{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	1
$2 - \sqrt{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	1

j)

valeur propre	vecteur propre	multiplicité algébrique
-2	$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	2
6	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	1

Nous avons donné deux vecteurs propres, \mathbf{u} et \mathbf{v} , associés à la valeur propre -2 en prenant bien soin de choisir deux vecteurs qui ne sont pas un multiple l'un de l'autre. Toute combinaison linéaire $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est aussi un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2 .

Question 11.12

a)

I: Si nous développons selon la première colonne, nous trouvons

$$\det \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -5 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 0 + 0 = -5(4 + 2) = -30 \neq 0.$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible.

II: Considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

 $R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

$(1/6)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array} \right).$$

$R_2 + 2R_3 \rightarrow R_2$ et $R_1 + 3R_3 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 2 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & 1 & -11/6 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array} \right).$$

Finalement, $(-1/5)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 11/30 & 1/30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array} \right).$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 11/30 & 1/30 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

III: Puisque A est inversible, la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Donc

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1/5 & 11/30 & 1/30 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29/15 \\ 5/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}.$$

IV: Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -5 - \lambda & 2 & -3 \\ 0 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-5 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (-5 - \lambda) ((1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2) \\ &= -(5 + \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(5 + \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

V: Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -5$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1$ et $R_2 - 6R_3 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & -56 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/21)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -56 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 + 56R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 - 9R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_3 \leftrightarrow R_1$ suivie de $R_2 \leftrightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_2 = x_3 = 0$ et x_1 libre. Avec $x_1 = 1$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 + R_2 \rightarrow R_3$ et $R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/7)R_1 \rightarrow R_1$ et $-R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_1 = -x_3$ et $x_2 = -2x_3$. Avec $x_3 = -1$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Finalement, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 + 2R_3 \rightarrow R_2$ et $R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/8)R_1 \rightarrow R_1$ et $R_2 \leftrightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_1 = -5x_3/8$ et $x_2 = -x_3$. Avec $x_3 = -8$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$.

b)

I: Si nous développons selon la première colonne, nous trouvons

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + 0 + 0 = 3(3 - 8) = -15 \neq 0.$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible.

II: Considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_3 + 4R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

$-(1/5)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/5 & -1/5 \end{array} \right).$$

$R_2 + 2R_3 \rightarrow R_2$ et $R_1 + 6R_3 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & -24/5 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/5 & -1/5 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -18/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/5 & -1/5 \end{array} \right).$$

Finalement, $(1/3)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -6/5 & -2/15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/5 & -1/5 \end{array} \right).$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -6/5 & -2/15 \\ 0 & -3/5 & -2/5 \\ 0 & -4/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

III: Puisque A est inversible, la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Donc

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/3 & -6/5 & -2/15 \\ 0 & -3/5 & -2/5 \\ 0 & -4/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

IV: Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 & -6 \\ 0 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & -4 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (3 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -4 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda) ((1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8) \\
&= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = (3 - \lambda)(\lambda - 5)(\lambda + 1) .
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 5$.

V: Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{array} \right) .$$

$R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3$ et $R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

$(1/4)R_1 \rightarrow R_1$ et $(1/2)R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

La solution de ce système est $x_2 = x_3$ et $x_1 = x_3$. Avec $x_3 = 1$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

$-(1/4)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

$R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1$ et $R_2 + 2R_3 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/2)R_2 \rightarrow R_2$ et $R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_2 = x_3 = 0$ et x_1 est libre. Avec $x_1 = 1$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Finalement, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 5$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ et $-(1/2)R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/4)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 + R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_1 = -7x_3/2$ et $x_2 = -x_3/2$. Avec $x_3 = 2$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c)

I: Si nous développons selon la première colonne, nous trouvons

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + 0 + 0 = 4(-3 - 12) = -60 \neq 0.$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible.

II: Considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ et $R_3 - 6R_2 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -9 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & -6 & 1 \end{array} \right).$$

$-(1/15)R_3 \rightarrow R_3$ et $(1/4)R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -9/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/15 \end{array} \right).$$

$R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2$ et $R_1 + (9/4)R_3 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 2/5 & -3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 2/15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/15 \end{array} \right).$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/5 & -3/20 \\ 0 & 1/5 & 2/15 \\ 0 & 2/5 & -1/15 \end{pmatrix}.$$

III: Puisque A est inversible, la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Donc

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/5 & -3/20 \\ 0 & 1/5 & 2/15 \\ 0 & 2/5 & -1/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

IV: Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 & -5 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (4 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda) ((1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 12) \\ &= (4 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 15) = (4 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 5). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 4$.

V: Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -5$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/6)R_2 \rightarrow R_2$ et $(1/9)R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/9 & -5/9 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - (2/9)R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -17/27 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_1 = 17x_3/27$ et $x_2 = -x_3/3$ est libre. Avec $x_3 = 27$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 17 \\ -9 \\ 27 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 + 3R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/2)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_1 = 3x_3$ et $x_2 = x_3$. Avec $x_3 = 1$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 4$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3$ et $R_1 + R_2 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

$-R_1 \rightarrow R_1$ et $(-1/3)R_3 \leftrightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - 3R_3 \rightarrow R_1$ et $R_2 - 2R_3 \leftrightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 + 3R_1 \rightarrow R_2$ suivie de $R_2 \leftrightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_2 = x_3 = 0$ et x_1 est libre. Avec $x_1 = 1$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d)

I: Si nous développons selon la deuxième ligne, nous obtenons

$$\begin{aligned} \det A &= -a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{2,2} \det(A_{2,2}) - a_{2,3} \det(A_{2,3}) \\ &= 0 - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 0 = -4(4 - 16) = 48. \end{aligned}$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible.

II: Considérons la matrice augmentée

$$(A | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$(-1/4)R_2 \rightarrow R_2$ et $(1/2)R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$(-1/6)R_3 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array} \right).$$

Finalement, $R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -1/6 \end{array} \right).$$

L'inverse de la matrice A est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

III: Puisque A est inversible, la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

IV: Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 4 \\ 0 & -4 - \lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-4 - \lambda) \left((2 - \lambda)^2 - 16 \right) = (-4 - \lambda) (\lambda^2 - 4\lambda - 12) \\ &= (-4 - \lambda)(\lambda - 6)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 6$.

V: Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -4$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pourrions considérer la matrice augmentée de ce système d'équations linéaires pour trouver le vecteur \mathbf{v}_1 . Cependant, il est facile de voir que $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -4$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_1 \rightarrow R_3$ et $(-1/2)R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(1/4)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 0$. Avec $x_1 = 1$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 6$ est donné par la solution du système

$$(A - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système d'équations linéaires est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 + R_1 \rightarrow R_3$ et $(-1/10)R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(-1/4)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La solution de ce système est $x_1 = x_3$ et $x_2 = 0$. Avec $x_1 = 1$, nous obtenons le vecteur propre $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

18.11.5 Chaînes de Markov

Question 11.13

a) Nous avons que $x_1 = 0.7x_0 + 0.2y_0$ et $y_1 = 0.3x_0 + 0.8y_0$, ainsi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.3 \\ 0.45 & 0.7 \end{pmatrix} .$$

c) Puisque la multiplication par la matrice A donne le nombre de voitures dans chaque succursale à la fin du mois (et donc au début du mois suivant) en fonction du nombre de voitures dans chaque succursale au début du mois, nous avons que la multiplication par la matrice A^2 donne le nombre de voiture dans chaque succursale à la fin du deuxième mois en fonction du nombre de voitures dans chaque succursale au début de la période de deux mois. Nous pouvons généraliser. La matrice A^n donne le nombre de voitures dans chaque succursale à la fin du n^e mois en fonction du nombre de voitures dans chaque succursale au début de la période de n mois.

Nous avons au début de mars

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} .$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} ,$$

nous aurons 50 voitures dans la succursale S et aussi 50 voitures dans la succursale T à la fin du mois de mars (et donc au début d'avril).

Puisque

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.3 \\ 0.45 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 55 \end{pmatrix} ,$$

nous aurons 45 voitures dans la succursale S et 55 voitures dans la succursale T à la fin du mois d'avril (et donc au début du mois de mai).

Pour aller du début d'avril au début de mai, nous aurions pu procéder de la façon suivant. Si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

(50 voitures dans chaque succursale au début d'avril), alors

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 55 \end{pmatrix} .$$

Donc, au début de mai, il y aura 45 voitures dans la succursale S et 55 voitures dans la succursale T.

d) Il faut trouver un vecteur \mathbf{v} tel que $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Nous cherchons donc un vecteur propre non nul associé à la valeur propre 1.

Comme A est une matrice de Markov, 1 est bien une valeur propre de A . Nous pouvons vérifier que 1 est une valeur propre de A en trouvant les valeurs propre de A . Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0.7 - \lambda & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (0.7 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.06 = \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.5)$$

Donc 1 est bien une valeur propre de A . Un vecteur propre \mathbf{v} de A associé à la valeur propre 1 est donné par une solution de $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous considérons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 + R_1 \rightarrow R_2$ suivit de $-(10/3)R_1 \rightarrow R_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nous avons que $v_1 = 2v_2/3$. Comme le nombre de voitures est constant, nous devons aussi avoir $v_1 + v_2 = 100$. Si $v_1 = 2v_2/3$, alors $v_1 + v_2 = 100$ donne $v_2 = 60$. Donc $v_1 = 40$. Il faut qu'il y est 40 voitures à la succursale S et 60 voitures à la succursale T.

Question 11.14

a) Si x_i et y_i dénotent le nombre de lots qui ont été choisis et le nombre de lots qui n'ont pas été choisis à la i^e année respectivement, alors la chaîne de Markov est décrite par

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots$ avec la matrice de transition

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

b) Puisque

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 590 \end{pmatrix},$$

410 lots seront choisis après un an.

c) Puisque

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 377 \\ 623 \end{pmatrix},$$

377 lots seront choisis après deux ans.

d) Il faut trouver un vecteur propre $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de la matrice A associé à la valeur propre 1 de A , et tel que $v_1 + v_2 = 1000$ lots.

Pour $\lambda = 1$, les vecteurs propres \mathbf{v} sont les solutions de $(A - \lambda I)\mathbf{v} = (A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ où

$$A - I = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.5 \\ 0.8 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.8 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & -0.5 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 + R_1 \leftrightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.8 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$(-5/4)R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nous obtenons $v_1 = 5v_2/8$. Il découle de $1000 = v_1 + v_2 = (5v_2/8) + v_2 = 13v_2/8$ que $v_2 = 8000/13 \approx 615.38$ et donc $v_1 = 5v_2/8 = 5000/13 \approx 384.62$. Environ 385 lots seront donc choisis.

Question 11.15

Soit x_j le pourcentage de femelles du group I à la j^e génération, y_j le pourcentage de femelles du group II à la j^e génération, et z_j le pourcentage de femelles du group III à la j^e génération. la chaîne de Markov est décrite par

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \\ z_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.3 \\ 0.45 & 0.5 & 0.3 \\ 0.05 & 0.25 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots$. D'après la proposition 11.8.3, quelle que soit la condition initiale $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$,

le vecteur $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$ tend vers un vecteur propre associée à la valeur propre 1 lorsque j tend vers l'infini. Trouvons ce vecteur propre.

Pour trouver les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.3 \\ 0.45 & 0.5 & 0.3 \\ 0.05 & 0.25 & 0.4 \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 & 0.3 \\ 0.45 & -0.5 & 0.3 \\ 0.05 & 0.25 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0.25 & 0.3 & 0 \\ 0.45 & -0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.05 & 0.25 & -0.6 & 0 \end{array} \right).$$

$R_2 + 0.9R_1 \rightarrow R_1$ et $R_3 + 0.1R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0.25 & 0.3 & 0 \\ 0 & -0.275 & 0.57 & 0 \\ 0 & 0.275 & -0.57 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 + R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0.25 & 0.3 & 0 \\ 0 & -0.275 & 0.57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$-2R_1 \rightarrow R_1$ et $(-40/11)R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -114/55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 + (1/2)R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -18/11 & 0 \\ 0 & 1 & -114/55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{v} du système $(A-I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfont donc $v_1 - (18/11)v_3 = 0$ et $v_2 - (114/55)v_3 = 0$; c'est-à-dire, $v_1 = (18/11)v_3$ et $v_2 = (114/55)v_3$.

Puisque les v_j 's représentent des pourcentages de la population totale de femelles, nous avons

$$1 = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{18}{11}v_3 + \frac{114}{55}v_3 + v_3 = \frac{259}{55}v_3.$$

Donc $v_3 = \frac{55}{259} = 0.212355\dots$, $v_2 = \frac{114}{55}v_3 = \frac{114}{259} = 0.44015\dots$ et $v_1 = \frac{18}{11}v_3 = \frac{90}{259} = 0.34749\dots$ La tendance à long terme est donc qu'approximativement 34.75% des femelles appartiennent au groupe I à la naissance, 44.02% appartiennent au groupe II et 21.24% appartiennent au groupe III.

Question 11.16

Soit x_j la probabilité que les pommes Spartan soient en vente à la j^e journée, y_j la probabilité que les pommes Cortland soient en vente à la j^e journée, et z_j la probabilité que les pommes McIntosh soient en vente à la j^e journée. La chaîne de Markov est décrite par

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \\ z_{j+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$a_{1,3}$, $a_{2,3}$ et $a_{3,3}$ proviennent des énoncés (1) et (2) de la question, $a_{1,1}$ et $a_{2,2}$ proviennent de l'énoncé (3), $a_{3,1}$ et $a_{3,2}$ proviennent de l'énoncé (4). Les autres éléments de A proviennent du fait que la somme sur chaque colonne doit être 1 ; il y a 100% de chance qu'un item soit en vente chaque jour.

La probabilité qu'un item soit en vente après 100 jours est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_{100} \\ y_{100} \\ z_{100} \end{pmatrix} = A^{100} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

D'après la Proposition 11.8.3, quelle que soit la condition initiale $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, nous avons que

$\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$ tend vers un vecteur propre associé à la valeur propre 1 lorsque j tend vers l'infini.

Trouvons ce vecteur propre.

Pour trouver les vecteurs propres de la matrice A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, il faut résoudre le système d'équations linéaires $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$; c'est-à-dire,

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 1/6 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

$-6R_1 \rightarrow R_1$, $6R_2 \rightarrow R_2$ et $3R_3 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - 3R_3 \rightarrow R_1$ et $R_2 - R_3 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$ suivie de $(-1/4)R_2 \rightarrow R_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

$R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 1 & 0 & -3/2 & 0 \end{array} \right).$$

Les solutions \mathbf{v} du système $(A - \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfont donc $v_1 - (3/2)v_3 = 0$ et $v_2 - (3/2)v_3 = 0$; c'est-à-dire, $v_1 = (3/2)v_3$ et $v_2 = (3/2)v_3$.

Puisque les v_j 's représentent les probabilités d'être en vente pour chaque item et qu'il est certain à 100% qu'un item est en vente à chaque jour, nous avons

$$1 = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2}v_3 + \frac{3}{2}v_3 + v_3 = 4v_3.$$

Donc $v_3 = \frac{1}{4} = 0.25$, $v_2 = \frac{3}{2}v_3 = \frac{3}{8} = 0.375$ et $v_1 = \frac{3}{2}v_3 = \frac{3}{8} = 0.375$. Nous pouvons conclure que dans un future éloigné, il y aura 37.5% des chances que les pommes Spartan soient en vente, 37.5% des chances que les pommes Cortland soient en vente et 25% des chances que les pommes McIntosh soient en vente.

18.12 Représentations paramétriques des courbes

18.12.1 Droite tangente à une courbe

18.12.2 Longueur d'une courbe

Question 12.2

Pour aller de $(0, 1)$ à $(4, 9)$ le long de la courbe, il faut que $0 \leq t \leq 2$. Donc

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} dt = \int_0^2 t\sqrt{4 + 9t^2} dt.$$

Si $u = 4 + 9t^2$, alors $du = 18t dt$, $u = 4$ pour $t = 0$ et $u = 40$ pour $t = 2$. Donc

$$L = \frac{1}{18} \int_4^{40} u^{1/2} du = \frac{1}{18} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \Big|_4^{40} = 9.07 \dots$$

Question 12.4

La longueur de la courbe est donnée par

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + (3x^{1/2})^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + 9x} dx.$$

Si $u = 1 + 9x$, alors $du = 9 dx$, $u = 28$ lorsque $x = 3$ et $u = 10$ lorsque $x = 1$. Donc

$$L = \frac{1}{9} \int_{10}^{28} u^{1/2} du = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \Big|_{10}^{28} = \frac{2}{27} (56\sqrt{7} - 10\sqrt{10}) .$$

18.13 Fonctions de plusieurs variables

18.13.1 Fonctions de plusieurs variables

Question 13.2

Les courbes de niveau sont les courbes $y - x^2 = k$ où k est une constante. Ce sont les paraboles $y = x^2 - k$ dont l'axe majeur est l'axe des x .

Question 13.4

Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème, nous en présentons seulement une.

La forme standard de l'équation d'un plan est $z = f(x, y) = m_1x + m_2y + b$.

Comme l'intersection de deux plans non parallèles est une droite, l'intersection du graphe de f et du plan $x = 2$ est une droite qui contient les points $(y, z) = (1, 5)$ et $(6, -5)$ qui sont donnée par le diagramme de courbes de niveau dans l'énoncé de la question. C'est donc une droite de pente $\frac{-5 - 5}{6 - 1} = -2$. Or, si $x = 2$ dans $z = f(x, y) = m_1x + m_2y + b$, nous obtenons la formule $z = m_2y + 2m_1 + b$ pour la droite d'intersection. Donc $m_2 = -2$.

L'intersection du graphe de f et du plan $y = 3$ est une droite qui contient les points $(x, z) = (0, -5)$ et $(10, 25)$ qui sont donnée par le diagramme de courbes de niveau dans l'énoncé de la question. C'est donc une droite de pente $\frac{25 + 5}{10 - 0} = 3$. Or, si $y = 3$ dans $z = f(x, y) = m_1x + m_2y + b$, nous obtenons la formule $z = m_1x + 3m_2 + b$ pour la droite d'intersection. Donc $m_1 = 3$.

Il découle des deux paragraphes précédents que $z = f(x, y) = 3x - 2y + b$. Pour déterminer b , prenons le point $(2, 1, 5)$ du graphe de f . Donc $5 = f(2, 1) = 6 - 2 + b$. Ce qui donne $b = 1$.

Finalement, l'équation cherchée est $z = 3x - 2y + 1$.

Question 13.5

La forme standard de l'équation d'un plan est $z = f(x, y) = m_1x + m_2y + b$.

Nous savons qu'un plan est déterminé par trois points qui ne sont pas sur une même droite. Choisissons les trois points $(5, 10, -22)$, $(10, 10, -7)$ et $(10, 20, -47)$. Ils ne sont pas tous sur une même droite. Si nous substituons ces trois points dans la formule $z = m_1x + m_2y + b$, nous obtenons les trois équations linéaires suivantes.

$$-22 = 5m_1 + 10m_2 + b, \quad -7 = 10m_1 + 10m_2 + b \quad \text{et} \quad -47 = 10m_1 + 20m_2 + b .$$

Il faut donc résoudre ce système d'équations linéaires pour m_1 , m_2 et b . Sous la forme matricielle, nous avons

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ 10 & 20 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ -7 \\ -47 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 1 & -22 \\ 10 & 10 & 1 & -7 \\ 10 & 20 & 1 & -47 \end{array} \right).$$

$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$ et $R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 1 & -22 \\ 0 & -10 & -1 & 37 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & -10 & -1 & 37 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

$R_2 - R_3 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & -10 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

$(1/5)R_1 \rightarrow R_1$, $(-1/10)R_2 \rightarrow R_2$ et $-R_3 \rightarrow R_3$ donnent

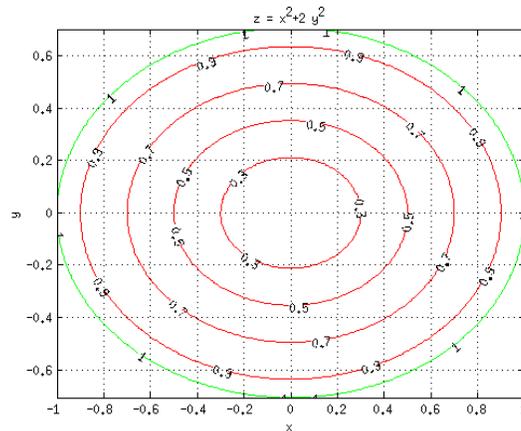
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Nous trouvons donc $m_1 = 3$, $m_2 = -4$ et $b = 3$.

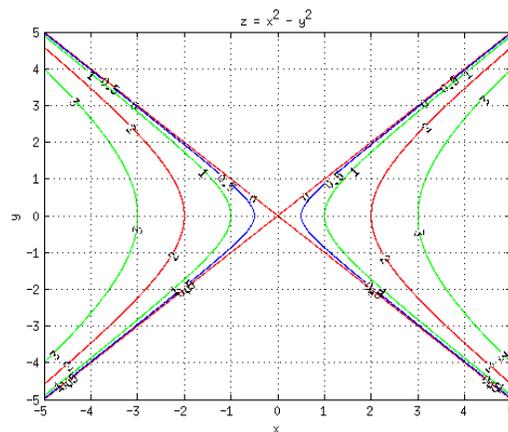
L'équation cherchée est $z = 3 - 4y + 3x$.

Question 13.6

a) Le domaine est l'ensemble des points (x, y) tels que $1 - x^2 - 2y^2 > 0$ car $\ln(z)$ n'est pas définie pour $z \leq 0$. Il faut donc avoir $x^2 + 2y^2 < 1$. Le domaine est l'intérieure de l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$ que nous retrouvons dans la figure ci-dessous dans laquelle nous avons aussi tracé quelques courbes de niveau. Ce sont les ellipses $x^2 + 2y^2 = c$ avec $0 \leq c < 1$.

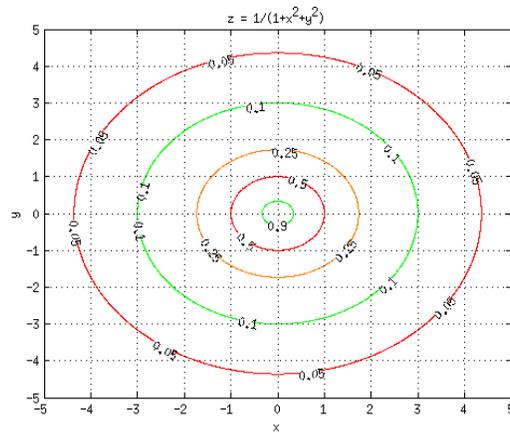


b) Le domaine est l'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 - y^2 \geq 0$ car la fonction \sqrt{z} n'est pas définie pour $z < 0$. Il faut donc avoir $x^2 \geq y^2$. Le domaine est la région bornée par les droites $y = \pm x$ et qui contient l'axe des x . Les courbes de niveau sont les hyperboles $x^2 - y^2 = c$ avec $0 \leq c$; des hyperboles dont l'axe principal est l'axe des x . Nous avons tracé quelques courbes de niveau de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ dans la figure ci-dessous.

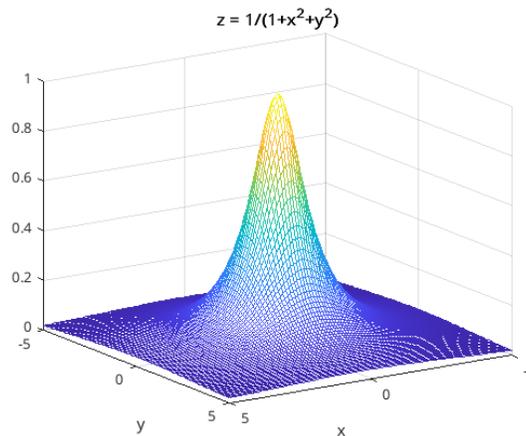


Question 13.7

Les courbes de niveau de f sont données par $\frac{1}{1 + x^2 + y^2} = C \in]0, 1]$. Ainsi, $x^2 + y^2 = D$ où $D = \frac{1}{C} - 1 \in [0, \infty[$. Les courbes de niveau sont des cercles centrés à l'origine et de rayon \sqrt{D} . La figure ci-dessous contient quelques courbes de niveau de f .



Le graphe de f au voisinage de l'origine est donné dans la figure ci-dessous.



18.13.2 Fonctions continues

Question 13.8

Puisque

$$f(x, mx^2) = \frac{x\sqrt{mx^2}}{x^2 + mx^2} = \frac{\sqrt{m}x|x|}{(1+m)x^2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{m}x^2}{(1+m)x^2} = \frac{\sqrt{m}}{1+m} & \text{si } x > 0 \\ \frac{-\sqrt{m}x^2}{(1+m)x^2} = \frac{-\sqrt{m}}{1+m} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, mx^2) = \frac{\sqrt{m}}{1+m} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, mx^2) = \frac{-\sqrt{m}}{1+m}.$$

Ainsi, $f(x, y)$ approche des valeurs différentes lorsque nous approchons l'origine le long des courbes $y = mx^2$ pour différentes valeurs de m . Même pour la même valeur non nul de m , la limite à droite est différente de la limite à gauche. La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe donc pas. Par conséquent, la fonction f n'est pas continue au point $(0, 0)$.

18.14 Dérivée de fonctions de plusieurs variables

18.14.1 Dérivées partielles

Question 14.1

a) $f_x(x, y, z, t) = y^2 z^3 t^4$ car y, z et t se comportent comme des constantes.

$f_y(x, y, z, t) = 2xyz^3 t^4$ car x, z et t se comportent comme des constantes.

$f_z(x, y, z, t) = 3xy^2 z^2 t^4$ car x, y et t se comportent comme des constantes.

$f_t(x, y, z, t) = 4xy^2 z^3 t^3$ car x, y et z se comportent comme des constantes.

b) $f_x(x, y) = \frac{2(x-y) - (2x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-3y}{(x-y)^2}$ car y se comporte comme une constante.

$f_y(x, y) = \frac{(x-y) + (2x+y)}{(x-y)^2} = \frac{3x}{(x-y)^2}$ car x se comporte comme une constante.

c) $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f(x)g(y)) = f'(x)g(y)$ car y (et donc $g(y)$) se comporte comme une constante.

$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f(x)g(y)) = f(x)g'(y)$ car x (et donc $f(x)$) se comporte comme une constante.

d) $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(xy) = f'(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy) = f'(xy)y$ car y se comporte comme une constante.

$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}f(xy) = f'(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) = f'(xy)x$ car x se comporte comme une constante.

e)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f\left(\frac{x}{y}\right) = f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)$$

car y se comporte comme une constante.

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}f\left(\frac{x}{y}\right) = f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

car x se comporte comme une constante.

Question 14.4

Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la fonction définie par

$$g(s, t) = \begin{pmatrix} s + t^2 \\ st \\ s^2 + t \end{pmatrix},$$

alors $w(s, t) = (f \circ g)(s, t) = f(g(s, t))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s}(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(s, t))\frac{\partial g_1}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s, t))\frac{\partial g_2}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial z}(g(s, t))\frac{\partial g_3}{\partial s}(s, t) \\ &= 4g_1(s, t) + 2tg_2(s, t) + 12sg_3^2(s, t) = 4(s + t^2) + 2st^2 + 12s(s^2 + t)^2. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}(s, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(s, t)) \frac{\partial g_1}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s, t)) \frac{\partial g_2}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial z}(g(s, t)) \frac{\partial g_3}{\partial t}(s, t) \\ &= 8tg_1(s, t) + 2sg_2(s, t) + 6g_3^2(s, t) = 4t(s + t^2) + 2s^2t + 6(s^2 + t)^2.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\frac{\partial w}{\partial s}(1, 2) = 136 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial t}(1, 2) = 98.$$

Question 14.5

Puisque $f_x(x, y, z) = 4xy^3z^2 + 9x^2y^2z^4$ et $f_{xy}(x, y, z) = 12xy^2z^2 + 18x^2yz^4$, nous obtenons $f_{xyy}(x, y, z) = 24xyz^2 + 18x^2z^4$ et $f_{xyz}(x, y, z) = 24xy^2z + 72x^2yz^3$.

Question 14.6

Comme nous avons toujours fait, nous supposons que les coordonnées du point \mathbf{p} sont (p_1, p_2) , les coordonnées du point \mathbf{a} sont (a_1, a_2) , etc.

a) Puisque

$$f_x(\mathbf{p}) \cong \frac{f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{p})}{b_1 - p_1} = \frac{8 - 6}{b_1 - p_1} < 0$$

car $b_1 < p_1$, nous pouvons assumer que $f_x(\mathbf{p}) < 0$. Remarquons que $f(x, p_2)$ est donc une fonction décroissante pour x au voisinage de p_1 .

b) Puisque

$$f_y(\mathbf{p}) \cong \frac{f(\mathbf{f}) - f(\mathbf{p})}{f_1 - p_1} = \frac{8 - 6}{f_1 - p_1} > 0$$

car $f_1 > p_1$, nous pouvons assumer que $f_y(\mathbf{p}) > 0$. Remarquons que $f(p_1, y)$ est donc une fonction croissante pour y près de p_2 .

c) Puisque

$$\begin{aligned}\frac{f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})}{a_1 - b_1} &= \frac{2}{a_1 - b_1} > \frac{f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{p})}{b_1 - p_1} = \frac{2}{b_1 - p_1} \\ &> \frac{f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{c})}{p_1 - c_1} = \frac{2}{p_1 - c_1} > \frac{f(\mathbf{c}) - f(\mathbf{d})}{c_1 - d_1} = \frac{2}{c_1 - d_1}\end{aligned}$$

car $a_1 - b_1 < b_1 - p_1 < p_1 - c_1 < c_1 - d_1 < 0$, nous pouvons supposer que $0 > f_x(\mathbf{b}) > f_x(\mathbf{p}) > f_x(\mathbf{c}) > f_x(\mathbf{d})$ et donc que $f_x(x, p_2)$ est décroissant lorsque x est près de p_1 . Donc $f_{xx}(\mathbf{p}) < 0$.

d) Puisque

$$\begin{aligned}\frac{f(\mathbf{g}) - f(\mathbf{j})}{g_1 - j_1} &= \frac{2}{g_1 - j_1} < \frac{f(\mathbf{f}) - f(\mathbf{i})}{f_1 - i_1} = \frac{2}{f_1 - i_1} \\ &< \frac{f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{c})}{p_1 - c_1} = \frac{2}{p_1 - c_1} < \frac{f(\mathbf{e}) - f(\mathbf{h})}{e_1 - h_1} = \frac{2}{e_1 - h_1} < 0\end{aligned}$$

car $0 > g_1 - j_1 > f_1 - i_1 > p_1 - c_1 > e_1 - h_1$, nous pouvons supposer que $f_x(\mathbf{g}) < f_x(\mathbf{f}) < f_x(\mathbf{p}) < f_x(\mathbf{e}) < 0$ et donc que $f_x(p_1, y)$ est décroissant lorsque y est près de p_2 . Donc $f_{xy}(\mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (\mathbf{p}) < 0$.

e) Puisque

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{g}) - f(\mathbf{f})}{g_2 - f_2} &= \frac{2}{g_2 - f_2} > \frac{f(\mathbf{f}) - f(\mathbf{p})}{f_2 - p_2} = \frac{2}{f_2 - p_2} \\ &> \frac{f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{e})}{p_2 - e_2} = \frac{2}{p_2 - e_2} \end{aligned}$$

car $0 < g_2 - f_2 < f_2 - p_2 < p_2 - e_2$, nous pouvons supposer que $f_y(\mathbf{f}) > f_y(\mathbf{p}) > f_y(\mathbf{e}) > 0$ et donc que $f_y(p_1, y)$ est croissante lorsque y est près de p_2 . Donc $f_{yy}(\mathbf{p}) > 0$.

18.14.2 Plan tangent à une surface

Question 14.7

a) L'approximation linéaire de $z = f(x, y)$ au point $(x, y) = (40, 20)$ est donnée par

$$z = f(40, 20) + f_x(40, 20)(x - 40) + f_y(40, 20)(y - 20) .$$

C'est aussi l'équation du plan tangent à la courbe $z = f(x, y)$ au point $(x, y, f(x, y)) = (40, 20, f(40, 20)) = (40, 20, 28)$.

Commençons par estimer les dérivées partielles.

$$f_x(40, 20) = \frac{\partial f}{\partial x}(40, 20) \approx \frac{f(45, 20) - f(40, 20)}{45 - 40} = \frac{40 - 28}{45 - 40} = 2.4 . \quad (18.14.1)$$

Nous pouvons aussi utiliser

$$f_x(40, 20) = \frac{\partial f}{\partial x}(40, 20) \approx \frac{f(35, 20) - f(40, 20)}{35 - 40} \approx \frac{25 - 28}{35 - 40} = 0.6$$

et faire la moyenne de cette pente avec la pente obtenue en (18.14.1) pour obtenir une nouvelle approximation $f_x(40, 20) \approx 1.5$. Il n'y a rien qui garantit que cette moyenne donne une meilleure approximation de $f_x(40, 20)$ mais nous pouvons espérer que c'est le cas. C'est donc l'approximation que nous allons utiliser par la suite.

De même.

$$f_y(40, 20) = \frac{\partial f}{\partial y}(40, 20) \approx \frac{f(40, 25) - f(40, 20)}{25 - 20} = \frac{25 - 28}{25 - 20} = -0.6 .$$

Nous pourrions utiliser d'autres points pour estimer les dérivées partielles mais nous allons nous contenter des valeurs que nous avons trouvées.

Ainsi, l'équation du plan tangent est approximativement

$$z = 28 + 1.5(x - 40) - 0.6(y - 20) . \quad (18.14.2)$$

b)

$$f(43, 24) \approx 28 + 1.5(43 - 40) - 0.6(24 - 20) = 30.1 .$$

Les courbes de niveau de f semblent indiquer que $f(43, 24)$ est une estimation raisonnable de $f(43, 24)$. Comme notre méthode donne seulement une approximation de l'équation du plan tangent à la courbe $z = f(x, y)$ au point $(40, 20, 28)$, il est toujours prudent de vérifier à partir de nos données que notre réponse est raisonnable.

Question 14.8

a) La forme générale de l'équation du plan tangent à une surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) est

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Dans le cas présent, $f(x, y) = \sin(xy)$ et $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy)$$

donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1 .$$

De plus $f(1, 0) = 0$. L'équation du plan tangent est donc

$$z = 0 + 0(x - 1) + 1(y - 0) = y .$$

Question 14.9

Nous avons la représentation paramétrique $\rho(u, v) = (u - v, u + v, u^2)$.

Il faut trouver (u, v) tel que $\rho(u, v) = (0, 2, 1)$. Nous obtenons de $u - v = 0$ que $u = v$. Si nous substituons $v = u$ dans $u + v = 2$, nous obtenons $2u = 2$ et donc $u = v = 1$. La relation $u^2 = 1$ est bien satisfaite.

Pour trouver un vecteur normal \mathbf{m} à la surface S au point $(0, 2, 1)$, nous utilisons les deux vecteurs suivants qui sont tangent à la surface S au point $(0, 2, 1)$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\partial \rho}{\partial u}(1, 1) = (1, 1, 2u) \Big|_{(u,v)=(1,1)} = (1, 1, 2)$$

et

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \rho}{\partial v}(1, 1) = (-1, 1, 0) \Big|_{(u,v)=(\pi,\pi)} = (-1, 1, 0) .$$

Ainsi,

$$\mathbf{m} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (-2, -2, 2)$$

où le déterminant a été développé selon la première ligne.

Ainsi, l'équation du plan tangent à la surface S au point $(0, 1, 2)$ est donnée par

$$\langle \mathbf{m}, (x, y - 2, z - 1) \rangle = -2x - 2(y - 2) + 2(z - 1) = -2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

ou simplement $x + y - z - 1 = 0$.

18.14.3 Dérivées selon un direction donnée

Question 14.10

a) Premièrement, pour calculer la dérivée dans la direction de $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})$, il nous faut le vecteur unitaire \mathbf{n} dans cette direction.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Puisque

$$\nabla f(2, 1) = (2xy, x^2 + 8y) \Big|_{(2,1)} = (4, 12),$$

nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \mathbf{n} = 2 + 6\sqrt{3}.$$

b) Avant de calculer la dérivée dans la direction du vecteur \mathbf{v} , il faut normaliser ce vecteur. Le vecteur \mathbf{n} de longueur 1 qui pointe dans la direction de \mathbf{v} est

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Puisque

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 1, 2) &= \left(yz + \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, xz + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}, xy + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \Big|_{(1,1,2)} \\ &= \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 1, 2) = \nabla f(1, 1, 2) \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \frac{16}{3\sqrt{6}}.$$

c) Premièrement, pour calculer la dérivée dans la direction de $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$, il nous faut le vecteur unitaire \mathbf{n} dans cette direction.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

Puisque

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 0, 3) &= e^{xyz} (1 + (x + y + z)yz, 1 + (x + y + z)xz, 1 + (x + y + z)xy) \Big|_{(1,0,3)} \\ &= (1, 13, 1) \quad ,\end{aligned}$$

nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 0, 3) = \nabla f(1, 0, 3) \cdot \mathbf{n} = \frac{13}{3} .$$

18.14.4 Propriétés du gradient

Question 14.14

La surface est décrite par l'équation $F(x, y, z) = x^2 - 4xy + y^2 + z^2 = 2$.

Un vecteur perpendiculaire au plan tangent à cette surface au point $(1, 1, 2)$ est donné par

$$\begin{aligned}\nabla F(1, 1, 2) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \right) \Big|_{(1,1,2)} \\ &= (2x - 4y, -4x + 2y, 2z) \Big|_{(1,1,2)} = (-2, -2, 4) .\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation du plan tangent au point $(1, 1, 2)$ est donnée par

$$0 = \langle \nabla F(1, 1, 2), (x - 1, y - 1, z - 2) \rangle = -2(x - 1) - 2(y - 1) + 4(z - 2)$$

ou, plus simplement, par $2z - x - y - 2 = 0$.

Question 14.16

Il faut trouver les points (x_0, y_0, z_0) de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ où le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) est parallèle au plan $3x - y + 3z = 1$. Ce qui revient à trouver les points (x_0, y_0, z_0) de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ où la perpendiculaire du plan tangent à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) est parallèle à la perpendiculaire au plan $3x - y + 3z = 1$.

Soit $(3, -1, 3)$ le vecteur formé des coefficients de x , y et z dans l'équation du plan $3x - y + 3z = 1$. Ce vecteur est perpendiculaire au plan $3x - y + 3z = 1$. De plus, si $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, alors $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ est un vecteur perpendiculaire au plan tangent de la surface de niveau $F(x, y, z) = 1$ au point (x_0, y_0, z_0) de cette surface, donc perpendiculaire au plan tangent de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ au point (x_0, y_0, z_0) .

Il faut donc trouver les points (x_0, y_0, z_0) tels que $F(x_0, y_0, z_0) = 1$ (les points sont sur l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$) et

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \right) \Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}$$

$$= (2x, 4y, 6z) \Big|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = (2x_0, 4y_0, 6z_0)$$

est parallèle au vecteur $(3, -1, 3)$.

Si $(2x_0, 4y_0, 6z_0)$ est parallèle au vecteur $(3, -1, 3)$, alors $(2x_0, 4y_0, 6z_0) = \lambda(3, -1, 3)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $x_0 = \frac{3}{2}\lambda$, $y_0 = -\frac{1}{4}\lambda$ et $z_0 = \frac{1}{2}\lambda$. Si nous substituons $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$ dans $F(x, y, z) = 1$, nous obtenons

$$\left(\frac{3}{2}\lambda\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\lambda\right) + 3\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 = \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\right)\lambda^2 = \frac{25}{8}\lambda^2 = 1.$$

Donc $\lambda = \pm \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Les points cherchés sont

$$(x_0, y_0, z_0) = \pm \left(\frac{3}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} \right), -\frac{1}{4} \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} \right) \right) = \pm \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{5} \right).$$

18.14.5 Approximation locale des fonctions

Question 14.18

La forme générale de l'approximation linéaire d'une fonction $f(x, y)$ près de (x_0, y_0) est

$$p(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

a) L'approximation linéaire de f près du point $(1, 1)$ est

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) \\ &= (2x^2y^2 + 3xy + x) \Big|_{(1,1)} + (4xy^2 + 3y + 1) \Big|_{(1,1)}(x - 1) \\ &\quad + (4x^2y + 3x) \Big|_{(1,1)}(y - 1) = 6 + 8(x - 1) + 7(y - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(0.9, 1.1) \approx p(0.9, 1.1) = 5.9$.

b) L'approximation linéaire de f près du point $(1, 1)$ est

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) \\ &= \left(\ln \left(\frac{2x^2 + 5y^2}{7} \right) \right) \Big|_{(1,1)} + \left(\frac{4x}{2x^2 + 5y^2} \right) \Big|_{(1,1)}(x - 1) \\ &\quad + \left(\frac{10y}{2x^2 + 5y^2} \right) \Big|_{(1,1)}(y - 1) = 0 + \frac{4}{7}(x - 1) + \frac{10}{7}(y - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(0.98, 1.01) \approx p(0.98, 1.01) \approx 0.13142857$.

c) L'approximation linéaire de $f(x, y)$ près du point $(3, 1)$ est

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(3, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)(x - 3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1)(y - 1) \\ &= \left. \left((x^2 - y^5)^{4/3} \right) \right|_{(3,1)} + \left. \left(\frac{8x}{3}(x^2 - y^5)^{1/3} \right) \right|_{(3,1)} (x - 3) \\ &\quad + \left. \left(-\frac{20y^4}{3}(x^2 - y^5)^{1/3} \right) \right|_{(3,1)} (y - 1) = 16 + 16(x - 3) - \frac{40}{3}(y - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(3.2, 1.2) \approx p(3.2, 1.2) = 16 + 16(0.2) - (40/3)(0.2) = 16 + 8/15$.

d) L'approximation linéaire de $f(x, y)$ près du point $(0, 1)$ est

$$\begin{aligned} p(x, y) &= f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1) \\ &= \left. \left(1 - \frac{2x}{y} + 3y - 4xy^2 + e^{3x} \right) \right|_{(0,1)} + \left. \left(-\frac{2}{y} - 4y^2 + 3e^{3x} \right) \right|_{(0,1)} x \\ &\quad + \left. \left(\frac{2x}{y^2} + 3 - 8xy \right) \right|_{(0,1)} (y - 1) = 5 - 3x + 3(y - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(-0.1, 0.9) \approx p(-0.1, 0.9) = 5 - 3(-0.1) + 3(-0.1) = 4.4$.

18.14.6 Points critiques et valeurs extrêmes

Question 14.19

Pour déterminer s'il y a un maximum local, un minimum local ou un col en un point, il faut utiliser la matrice Hessien. Puisque $\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 - 2xy$, nous obtenons

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det H(0, 1) = \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$, il y a un col au point $(0, 1)$.

Puisque $\det H(1/3, 1/3) = \det \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = 1/3 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/3, 1/3) = -2 < 0$, il y a un minimum local au point $(1/3, 1/3)$.

Question 14.20

a) Comme la dérivée de la fonction f existe en tout point, les points critiques sont les racines de $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 3y^2 - 12 = 0 \Rightarrow y = \pm 2 ,$$

les points critiques sont $(\pm 1, \pm 2)$. Pour déterminer si un point critique est associé à un maximum local, un minimum local ou un col, nous évaluons la matrice Hessian à ce point.

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} .$$

Puisque $\det H(1, 2) = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 72 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) = 6 > 0$, il y a un minimum local au point $(1, 2)$.

Puisque $\det H(1, -2) = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = -72 < 0$, il y a un col au point $(1, -2)$.

Puisque $\det H(-1, 2) = \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = -72 < 0$, il y a un col au point $(-1, 2)$.

Puisque $\det H(-1, -2) = \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = 72 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -2) = -6 < 0$, il y a un maximum local au point $(-1, -2)$.

c) Comme la dérivée de la fonction f existe en tout point, les points critiques sont les racines de $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y = 0 \Rightarrow y = -x^2 \tag{18.14.3}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 3x - 3y^2 = 0 \Rightarrow x = y^2 . \tag{18.14.4}$$

Si nous substituons (18.14.4) dans (18.14.3), nous obtenons $y = -y^4$. Donc $y = 0$ ou 1 . Il y a deux points critiques $(x, y) = (0, 0)$ et $(1, -1)$. Pour déterminer si un point critique est associé à un maximum local, un minimum local ou un col, nous évaluons la matrice Hessian à ce point.

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix} .$$

Puisque $\det H(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0$, il y a un col au point $(0, 0)$.

Puisque $\det H(1, -1) = \det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 27 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 6 > 0$, il y a un minimum local au point $(1, -1)$.

e) Comme la dérivée de la fonction f existe en tout point, les points critiques sont les racines de $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \quad (18.14.5)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 2xy + 2y = 0 \Rightarrow 2(x + 1)y = 0. \quad (18.14.6)$$

Nous obtenons $x = -1$ ou $y = 0$ de (18.14.6). Si $x = -1$, (18.14.5) donne $y^2 = 4$ et donc $y = \pm 2$. Nous obtenons les points critiques $(-1, \pm 2)$. Si $y = 0$, (18.14.5) donne $6x(x + 5/3) = 0$ et donc $x = 0$ ou $x = -5/3$. Nous obtenons les points critiques $(0, 0)$ et $(-5/3, 0)$. Pour déterminer si un point critique est associé à un maximum local, un minimum local ou un col, nous évaluons la matrice Hessien à ce point.

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det H(-1, 2) = \det \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -16 < 0$, il y a un col au point $(-1, 2)$.

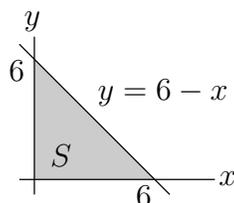
Puisque $\det H(-1, -2) = \det \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -16 < 0$, il y a un col au point $(-1, -2)$.

Puisque $\det H(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 20 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 10 > 0$, il y a un minimum local au point $(0, 0)$.

Puisque $\det H(-5/3, 0) = \det \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 40/3 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-5/3, 0) = -10 < 0$, il y a un maximum local au point $(-5/3, 0)$.

Question 14.21

Puisque f est une fonction continue sur l'ensemble fermé et borné S , nous avons que f possède un maximum absolu grâce au Théorème des valeurs extrêmes, théorème 13.4.1.



Comme le maximum absolu est aussi un maximum local, le maximum absolu de f sera atteint soit à un maximum local de f sur la frontière de la région S ou soit à un maximum local de f à l'intérieur de la région S .

Commençons par trouver les points critiques de f à l'intérieur de S . Comme la dérivée de la fonction f existe en tout point, il faut résoudre $\nabla f(x, y) = (0, 0)$; c'est-à-dire,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 4y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0 \Rightarrow (4 - 2x - y)y^2 = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 8xy - 2x^2y - 3xy^2 = 0 \Rightarrow (8 - 2x - 3y)xy = 0 .$$

Puisque $x \neq 0$ et $y \neq 0$ à l'intérieur de S , nous devons avoir $2x + y = 4$ et $2x + 3y = 8$. La solution de ce système d'équations linéaires est $(x, y) = (1, 2)$. C'est bien un point à l'intérieur de la région S .

Nous cherchons maintenant les points sur la frontière de la région S où f pourrait atteindre un maximum local.

Pour $x = 0$ et $0 \leq y \leq 6$, nous avons $f(x, y) = 0$. De même, pour $y = 0$ et $0 \leq x \leq 6$, nous avons $f(x, y) = 0$. Si nous restreignons f au segment de droite défini par $y = 6 - x$ et $0 \leq x \leq 6$, nous obtenons la fonction

$$g(x) = f(x, 6 - x) = 4x(6 - x)^2 - x^2(6 - x)^2 - x(6 - x)^3 = -2x(6 - x)^2$$

pour $0 \leq x \leq 6$. Les points critique de g sont les solutions de $g'(x) = -2(6 - x)^2 + 4x(6 - x) = 6(6 - x)(x - 2) = 0$. Les deux points critiques, $x = 2$ et $x = 6$, sont dans l'intervalle $[0, 6]$. Selon le Théorème des valeurs extrêmes pour g sur l'intervalle $[0, 6]$, le maximum de g est atteint à un des points critiques où à une des extrémités de l'intervalle $[0, 6]$.

Finalement, selon le Théorème des valeurs extrêmes pour f définie sur S , le maximum absolu de f sur S est atteint à un des points suivants : $(0, 6)$, $(2, 4)$, $(6, 0)$ et $(1, 2)$. Puisque $f(0, 6) = f(6, 0) = 0$, $f(2, 4) = -24$ et $f(1, 2) = 4$, le maximum global est 4 lorsque $(x, y) = (1, 2)$.

18.14.7 Multiplicateurs de Lagrange

Question 14.23

a) Utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$. L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \Rightarrow y = 2\lambda x \quad (18.14.7)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \Rightarrow x = 2\lambda y . \quad (18.14.8)$$

Si nous substituons (18.14.8) dans (18.14.7), nous obtenons

$$y = 4\lambda^2 y = 0 \Rightarrow (1 - 4\lambda^2)y = 0 .$$

Il y a trois possibilités : $y = 0$, $\lambda = 1/2$ ou $\lambda = -1/2$.

Si $y = 0$, alors (18.14.8) donne $x = 0$. Puisque $g(0, 0) \neq 0$, nous avons que $(0, 0)$ n'est pas un point de notre domaine.

Si $\lambda = 1/2$, alors (18.14.8) donne $x = y$. Avec $x = y$, $g(x, y) = 0$ donne $2y^2 = 2$ et ainsi $y = \pm 1$. Nous avons deux points : $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

Si $\lambda = -1/2$, alors (18.14.8) donne $x = -y$. Avec $x = -y$, $g(x, y) = 0$ donne $2y^2 = 2$ et ainsi $y = \pm 1$. Nous avons deux points : $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

Puisque $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$ et $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$, le minimum absolu est -1 aux points $(1, -1)$ et $(-1, 1)$, et le maximum absolu est 1 au point $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

b) Utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \Rightarrow 8x = 2\lambda x \quad (18.14.9)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \Rightarrow 18y = 2\lambda y . \quad (18.14.10)$$

L'équation (18.14.9) est satisfaite pour $x = 0$. Si nous substituons $x = 0$ dans $x^2 + y^2 = 1$, nous obtenons $y = \pm 1$. Nous avons donc deux points : $(0, 1)$ et $(0, -1)$. Pour accepter ces deux points, il faut que (18.14.10) soit aussi satisfait pour ces deux points. C'est le cas si $\lambda = 9$.

De même, l'équation (18.14.10) est satisfaite pour $y = 0$. Si nous substituons $y = 0$ dans $x^2 + y^2 = 1$, nous obtenons $x = \pm 1$. Nous avons donc deux points : $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Pour accepter ces deux points, il faut que (18.14.9) soit aussi satisfait pour ces deux points. C'est le cas si $\lambda = 4$.

Comme il est impossible de satisfaire (18.14.9) et (18.14.10) simultanément si x et y sont non nuls. Nous avons donc trouvé tous les points d'intérêt.

Puisque $f(0, \pm 1) = 4$ et $f(\pm 1, 0) = 9$, le maximum absolu est 9 aux points $(\pm 1, 1)$ et le minimum absolu est 4 aux points $(0, \pm 1)$.

c) Nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 17$. L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) \Rightarrow 1 = 2\lambda x \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda} , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \Rightarrow 3 = 8\lambda y \Rightarrow y = \frac{3}{8\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \Rightarrow -1 = 2\lambda z \Rightarrow y = \frac{-1}{2\lambda}$$

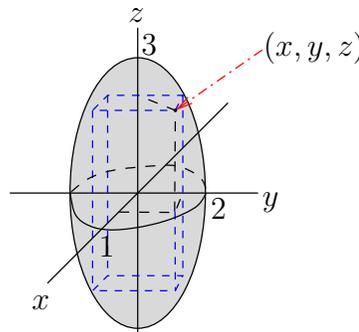
Si nous substituons ces valeurs de x , y et z dans $g(x, y, z) = 0$, nous obtenons

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{8\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 = 17 \Rightarrow \frac{17}{16\lambda^2} = 17 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{4}.$$

Nous obtenons $(x, y, z) = (2, 3/2, -2)$ pour $\lambda = 1/4$ et $(x, y, z) = (-2, -3/2, 2)$ pour $\lambda = -1/4$. Puisque $f(2, 3/2, -2) = 17/2$ et $f(-2, -3/2, 2) = -17/2$, le maximum absolu est $17/2$ et le minimum absolu est $-17/2$.

Question 14.24

Soit (x, y, z) un coin de la boîte qui se trouve naturellement sur l'ellipsoïde puisque nous cherchons la boîte de volume maximal connue dans l'ellipsoïde. Nous pouvons assumer que $x, y, z \geq 0$.



Il faut maximiser la fonction $f(x, y, z) = 8xyz$ sous la contrainte que $g(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$.

Utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) \Rightarrow 8yz = 2\lambda x, \quad (18.14.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \Rightarrow 8xz = \frac{1}{2}\lambda y \quad (18.14.12)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \Rightarrow 8xy = \frac{2}{9}\lambda z. \quad (18.14.13)$$

Si nous soustrayons y fois (18.14.12) de x fois (18.14.11), nous obtenons

$$2\lambda x^2 - \frac{1}{2}\lambda y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4x^2 \Rightarrow y = 2x$$

si $\lambda \neq 0$. Nous reviendrons sur le cas $\lambda = 0$ par la suite. Si nous soustrayons z fois (18.14.13) de x fois (18.14.11), nous obtenons

$$2\lambda x^2 - \frac{2}{9}\lambda z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 9x^2 \Rightarrow z = 3x$$

si $\lambda \neq 0$. Si nous substituons $y = 2x$ et $z = 3x$ dans l'équation de l'ellipsoïde $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, nous obtenons $3x^2 = 1$. Donc $x = 1/\sqrt{3}$. Cela donne le point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$. C'est un des huit coins d'une boîte contenue dans l'ellipsoïde.

Si $\lambda = 0$, alors $(0, 0, 3)$, $(0, 2, 0)$ et $(1, 0, 0)$ sont les seules points de l'ellipsoïde avec des coordonnées non négatives qui satisfont (18.14.11), (18.14.12) et (18.14.13). Ils sont associés aux cas extrêmes lorsque la boîte devient un des axes de l'ellipsoïde.

Le volume maximal de f est donc $\frac{16}{\sqrt{3}}$ aux points $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$, $-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$. Le minimum absolu de f est $-\frac{16}{\sqrt{3}}$ et est atteint aux autres coins de la boîte.

Question 14.25

Si la base de l'aquarium est de x unités par y unités, et sa hauteur est de z unité, alors le coût de l'aquarium est $C(x, y, z) = 5xy + 2xz + 2yz$. Il faut minimiser C sous la contrainte que $g(x, y, z) = xyz - V = 0$, le volume de l'aquarium est V .

Utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. L'équation $\nabla C(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) \Rightarrow 5y + 2z = \lambda yz \Rightarrow 5y + 2z - \lambda yz = 0, \quad (18.14.14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \Rightarrow 5x + 2z = \lambda xz \Rightarrow 5x + 2z - \lambda xz = 0 \quad (18.14.15)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \Rightarrow 2x + 2y = \lambda xy \Rightarrow 2x + 2y - \lambda xy = 0. \quad (18.14.16)$$

Si nous soustrayons x fois (18.14.14) de y fois (18.14.15), nous obtenons $2z(y - x) = 0$. Puisque $z \neq 0$ car $xyz = V$, nous avons $x = y$. Si $y = x$ dans (18.14.16), alors $(4 - \lambda)x = 0$. Comme précédemment, puisque $x \neq 0$ car $xyz = V$, nous avons $x = y = 4/\lambda$. Si nous substituons cela dans (18.14.14) ou (18.14.15), nous obtenons

$$5 \frac{4}{\lambda} + 2z - \lambda z \frac{4}{\lambda} = 0 \Rightarrow z = \frac{10}{\lambda}.$$

Finalement, si nous substituons $x = y = 4/\lambda$ et $z = 10/\lambda$ dans $xyz = V$, nous trouvons

$$\left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 \frac{10}{\lambda} = V \Rightarrow \lambda = \frac{2^{5/3} 5^{1/3}}{V^{1/3}}.$$

Il y a donc un seul point qui satisfait $\nabla C(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ et c'est

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \left(\frac{4}{\lambda}, \frac{4}{\lambda}, \frac{10}{\lambda} \right) = \left(\frac{2^{1/3}V^{1/3}}{5^{1/3}}, \frac{2^{1/3}V^{1/3}}{5^{1/3}}, \frac{5^{2/3}V^{1/3}}{2^{2/3}} \right).$$

Soit $S = \{(x, y, z) : xyz = V \text{ pour } x, y, z > 0\}$. Comme l'ensemble S sur lequel il faut maximiser la fonction C n'est pas un ensemble fermé et borné, le Théorème des valeurs extrêmes ne peut pas être utilisé. Pour déterminer si C a un minimum ou un minimum absolu au point que l'on vient de trouver, nous considérons la fonction

$$f(x, y) = C\left(x, y, \frac{V}{xy}\right) = 5xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

Puisque $f \rightarrow \infty$ lorsque $\|(x, y)\| \rightarrow 0$ ou lorsque $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ pour $(x, y, V/(xy)) \in S$, la fonction C doit donc avoir un minimum absolu au point $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Le coût minimal est donc

$$C\left(\frac{2^{1/3}V^{1/3}}{5^{1/3}}, \frac{2^{1/3}V^{1/3}}{5^{1/3}}, \frac{5^{2/3}V^{1/3}}{2^{2/3}}\right) = 2^{5/3}5^{1/3}V^{1/3}.$$

Question 14.26

Nous cherchons les points (x, y) qui satisfont $g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$ et qui donnent le maximum de $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = -2\lambda \frac{1}{x^3} \Rightarrow x = 2\lambda \quad (18.14.17)$$

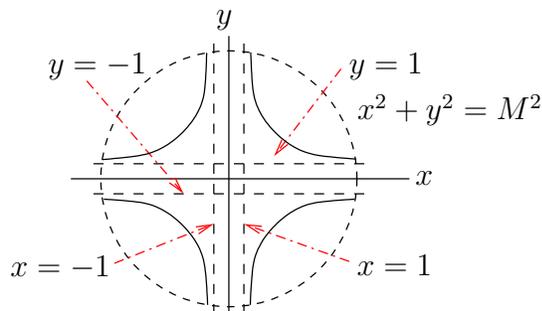
et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \Rightarrow -\frac{1}{y^2} = -2\lambda \frac{1}{x^3} \Rightarrow y = 2\lambda. \quad (18.14.18)$$

Si nous substituons (18.14.17) et (18.14.18) dans $g(x, y) = 0$, nous obtenons $\lambda^2 = 1/2$. Ainsi, nous avons $(x, y) = (2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2})$ lorsque $\lambda = 1/\sqrt{2}$ et $(x, y) = (-2/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2})$ lorsque $\lambda = -1/\sqrt{2}$.

Comme $f(2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $f(-2/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, le maximum absolu devrait être $\sqrt{2}$ au point $(2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2})$. Malheureusement, l'ensemble $E = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ n'est pas borné. Nous ne pouvons donc pas utiliser le Théorème des valeurs extrêmes, théorème 13.4.1, pour conclure que nous avons trouvé le maximum absolu.

Nous avons dessiné l'ensemble E dans la figure ci-dessous. Ce sont les quatre paraboles représentées par une ligne noire continue.



Remarquons que $f(x, y) \rightarrow 1$ sur E lorsque $(x, y) \rightarrow (\pm\infty, 1)$ avec $y > 1$ ou $(x, y) \rightarrow (1, \pm\infty)$ avec $x > 1$, et $f(x, y) \rightarrow -1$ sur E lorsque $(x, y) \rightarrow (\pm\infty, -1)$ avec $y < -1$ ou $(x, y) \rightarrow (-1, \pm\infty)$ avec $x < -1$. Nous pouvons donc utiliser le théorème 13.4.1 sur l'ensemble fermé et borné défini par $E \cap \{(x, y) : \|(x, y)\| \leq M\}$ pour M assez grand. Par exemple, nous pouvons prendre M tel que $|f(x, y)| < 1.1$ pour $(x, y) \in E$ et $\|(x, y)\| > M$.

Question 14.28

Puisque f est une fonction continue sur l'ensemble fermé et borné D , alors f possède un maximum absolu grâce au Théorème des valeurs extrêmes, théorème 13.4.1.

Comme le maximum absolu est aussi un maximum local, le maximum absolu de f sera atteint soit à un maximum absolu de f sur la frontière du disque D ou soit à un maximum local de f à l'intérieur du disque D .

Commençons par trouver les points critiques de f à l'intérieur de D . L'intérieur de D est donné par $x^2 + y^2 < 4$. Il faut donc résoudre $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ pour $x^2 + y^2 < 4$. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}.$$

Le point critique est $(0, -1/4)$ qui est bien un point à l'intérieur du disque.

Cherchons maintenant le maximum absolu de f sur la frontière du disque D . La frontière de D est le cercle $x^2 + y^2 = 4$. Posons $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Il faut donc trouver le maximum absolu de f sous la contrainte que $g(x, y) = 0$. Pour cela, utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

L'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \Rightarrow 2x = 2\lambda x \Rightarrow 2x(1 - \lambda) = 0 \quad (18.14.19)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \Rightarrow 4y + 1 = 2\lambda y \Rightarrow 2y(\lambda - 2) = 1. \quad (18.14.20)$$

Si $\lambda \neq 1$, l'équation (18.14.19) donne $x = 0$. L'équation $g(x, y) = 0$ avec $x = 0$ donne $y^2 = 4$ et ainsi $y = \pm 2$. L'équation (18.14.20) est satisfaite avec $y = 1$ si $\lambda = 1/2$, et avec $y = -1$ si $\lambda = 3/2$. Dans les deux cas, λ est différente de 1 comme il est requis. Nous obtenons donc deux points : $(0, \pm 2)$.

Si $\lambda = 1$, l'équation (18.14.19) est naturellement satisfaite et (18.14.20) donne $y = -1/2$. L'équation $g(x, y) = 0$ avec $y = -1/2$ donne $x^2 = 15/4$ et ainsi $x = \pm\sqrt{15}/2$. Nous obtenons deux autres points : $(\pm\sqrt{15}/2, -1/2)$.

Puisque $f(0, -1/4) = 7/8$, $f(0, 2) = 11$, $f(0, -2) = 7$, $f(\sqrt{15}/2, -1/2) = 35/8$ et $f(-\sqrt{15}/2, -1/2) = 35/8$, la maximum absolu est 11 au point $(x, y) = (0, 2)$.

18.14.8 Dérivées des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m

Question 14.29

a)

I) Nous avons

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

où $f_1(x, y) = x/y$ et $f_2(x, y) = 2xy$. Ainsi,

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Df(-1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

II: La formule générale pour l'approximation linéaire est

$$f(x, y) \approx p(x, y) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Pour $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx p(x, y) &= f(-1, 1) + Df(-1, 1) \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + x + y \\ 2 + 2x - 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III: La valeur exacte de f au point $(-0.9, 1.05)$ est

$$f(-0.9, 1.05) = \begin{pmatrix} -0.9/1.05 \\ 2(-0.9)(1.05) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,857142 \\ -1.89 \end{pmatrix}$$

et la valeur donnée par l'approximation linéaire de f au point $(-0.9, 1.05)$ est

$$f(-0.9, 1.05) \approx p(-0.9, 1.05) = \begin{pmatrix} -1 - 0.9 + 1.05 \\ 2 + 2(-0.9) - 2(1.05) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.85 \\ -1.9 \end{pmatrix}.$$

18.15 Intégrales multiples

18.15.1 Théorème de Fubini

Question 15.1

a) Grâce au Théorème de Fubini, nous avons

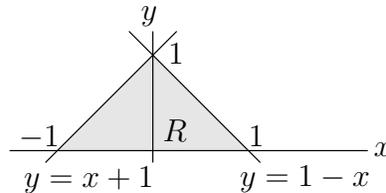
$$\begin{aligned}
 \iint_R \sin(2x + y) \, dA &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \sin(2x + y) \, dy \, dx = \int_0^{\pi/4} (-\cos(2x + y)) \Big|_{y=0}^{\pi/2} \, dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} (-\cos(2x + \pi/2) + \cos(2x)) \, dx \\
 &= \frac{-1}{2} \sin(2x + \pi/2) \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \sin(2x) \Big|_0^{\pi/4} \\
 &= \frac{-1}{2} \sin(\pi) + \frac{1}{2} \sin(\pi/2) + \frac{1}{2} \sin(\pi/2) - \frac{1}{2} \sin(0) = 1 .
 \end{aligned}$$

b) Grâce au Théorème de Fubini, nous avons

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{2+y}{3+x} \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \frac{2+y}{3+x} \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{2y + y^2/2}{3+x} \right) \Big|_{y=-1}^2 \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{6}{3+x} + \frac{3}{2(3+x)} \right) \, dx = \int_{-1}^1 \frac{15}{2(3+x)} \, dx \\
 &= \frac{15}{2} \ln(3+x) \Big|_{-1}^1 = \frac{15}{2} (\ln(4) - \ln(2)) = \frac{15}{2} \ln(2) .
 \end{aligned}$$

Question 15.2

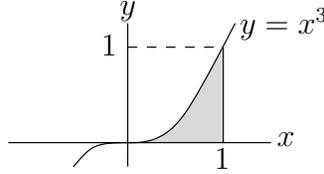
Le dessin de la région R est donné ci-dessous.



$$\begin{aligned}
 \iint_R (2x + 3y)^2 \, dA &= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (2x + 3y)^2 \, dx \, dy = \frac{1}{6} \int_0^1 (2x + 3y)^3 \Big|_{x=y-1}^{1-y} \, dy \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 \left((2 + y)^3 - (5y - 2)^3 \right) \, dy = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} (2 + y)^4 - \frac{1}{20} (5y - 2)^4 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{24} (3^4 - 2^4) - \frac{1}{120} (3^4 - (-2)^4) = \frac{13}{6} .
 \end{aligned}$$

Question 15.3

a) Le dessin du domaine d'intégration est donné ci-dessous.

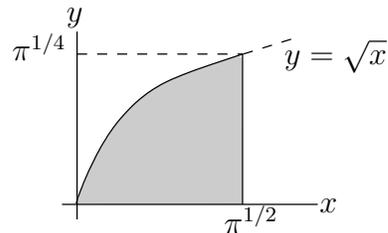


$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{y^{1/3}}^1 \sqrt{x^4 + 1} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{x^3} \sqrt{x^4 + 1} \, dy \, dx = \int_0^1 \left(y \sqrt{x^4 + 1} \right) \Big|_{y=0}^{x^3} \, dx \\ &= \int_0^1 x^3 \sqrt{x^4 + 1} \, dx . \end{aligned}$$

Si $u = x^4 + 1$, alors $du = 4x^3 \, dx$, $u = 1$ lorsque $x = 0$ et $u = 2$ lorsque $x = 1$. Donc

$$\int_0^1 \int_{y^{1/3}}^1 \sqrt{x^4 + 1} \, dx \, dy = \frac{1}{4} \int_1^2 u^{1/2} \, du = \frac{1}{6} u^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{6} .$$

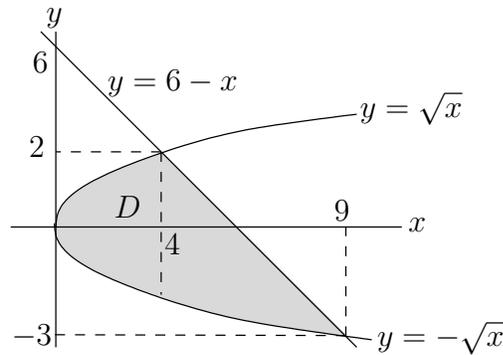
b) Le dessin du domaine d'intégration est donné ci-dessous.



$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^{1/4}} \int_{y^2}^{\pi^{1/2}} y \sin(x^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\pi^{1/2}} \int_0^{\sqrt{x}} y \sin(x^2) \, dy \, dx = \int_0^{\pi^{1/2}} \left(\frac{y^2}{2} \sin(x^2) \right) \Big|_{y=0}^{\sqrt{x}} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi^{1/2}} x \sin x^2 \, dx = -\frac{1}{4} \cos(x^2) \Big|_0^{\pi^{1/2}} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Question 15.4

a) Le dessin du domaine d'intégration est donné ci-dessous.



La valeur de x aux points d'intersection de la courbe $x = y^2$ avec la droite $y = 6 - x$ est donnée par

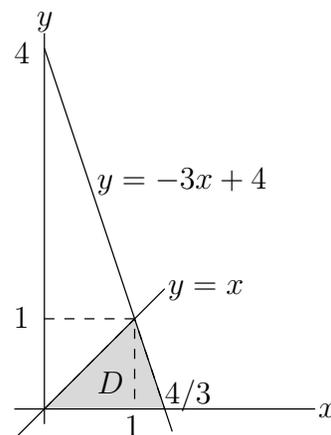
$$x = (6 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = (x - 9)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 9 .$$

Nous avons donc les points d'intersections $(4, 2)$ et $(9, -3)$.

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_4^9 \int_{-\sqrt{x}}^{6-x} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{-3}^2 \int_{y^2}^{6-y} f(x, y) \, dx \, dy .$$

Question 15.5

Le dessin de la surface plane D est donné ci-dessous.



La valeur de x au point d'intersection des deux droites est donnée par

$$x = -3x + 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 .$$

Nous trouvons le point d'intersection $(1, 1)$.

La masse de S est

$$M = \iint_D p(x, y) \, dA = \int_0^1 \int_y^{(4-y)/3} x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=y}^{(4-y)/3} \, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(4-y)^2}{18} - \frac{y^2}{2} \right) dy = -\frac{(4-y)^3}{54} \Big|_0^1 - \frac{y^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{14}{27}.$$

Cette ordre d'intégration a été choisie car elle nous évite d'avoir à découper l'intégrale en deux comme c'est le cas si l'intégration est par rapport à y en premier.

Le moment par rapport à l'axe des x est

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D yp(x, y) dA = \int_0^1 \int_y^{(4-y)/3} yx dx dy = \int_0^1 \left(y \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=y}^{(4-y)/3} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y(4-y)^2}{18} - \frac{y^3}{2} \right) dy = -\frac{4}{9} \int_0^1 (y^3 + y^2 - 2y) dy = -\frac{4}{9} \left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} - y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{27}. \end{aligned}$$

Le moment par rapport à l'axe des y est

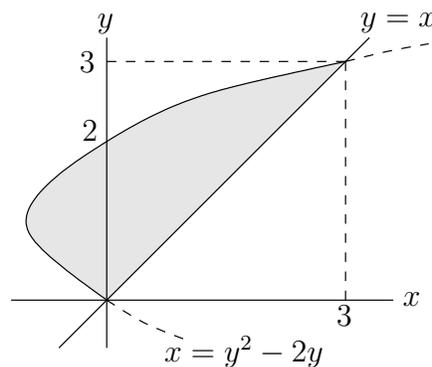
$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D xp(x, y) dA = \int_0^1 \int_y^{(4-y)/3} x^2 dx dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=y}^{(4-y)/3} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(4-y)^3}{81} - \frac{y^3}{3} \right) dy = -\frac{(4-y)^4}{324} \Big|_0^1 - \frac{y^4}{12} \Big|_0^1 = \frac{37}{81}. \end{aligned}$$

Ainsi, le centre de masse est

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right) = \left(\frac{37}{42}, \frac{5}{14} \right).$$

Question 15.6

Le dessin de la base du solide est donné ci-dessous.



La valeur de y aux points d'intersection de la droite $y = x$ et de la parabole $x = y^2 - 2y$ est donnée par

$$y = y^2 - 2y \Rightarrow 0 = y^2 - 3y = y(y - 3) \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = 3.$$

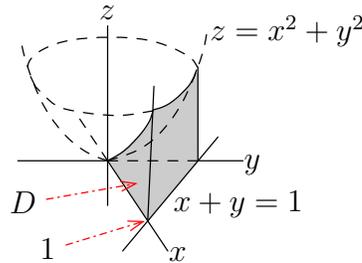
Nous trouvons donc les points d'intersection $(0, 0)$ et $(3, 3)$. Nous déduisons à partir du dessin ci-dessus qu'il est préférable d'intégrer par rapport à x en premier puis par rapport à y .

Le volume du solide est

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_{y^2-2y}^y (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{x=y^2-2y}^y dy \\ &= \int_0^3 \left(-\frac{y^6}{3} + 2y^5 - 5y^4 + 6y^3 \right) dy = \left(-\frac{y^7}{21} + \frac{y^6}{3} - y^5 + \frac{3y^4}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{3^5}{14}. \end{aligned}$$

Question 15.7

Le dessin du solide D est donné ci-dessous.

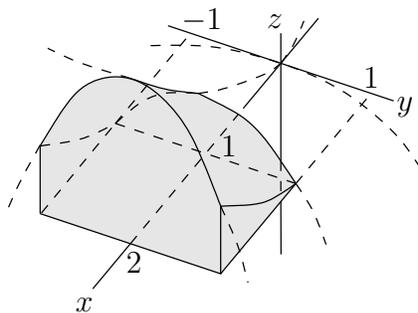


Le volume du solide est

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Question 15.8

Le dessin du solide S est donné ci-dessous.



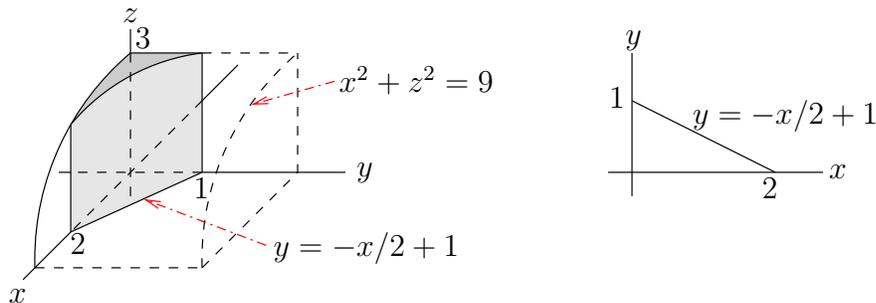
Soit $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$. Puisque $x^2 - y^2 \geq 0$ pour $(x, y) \in R$, nous pouvons calculer le volume V de S avec la formule suivante.

$$V = \iint_R (x^2 - y^2) dA = \int_1^2 \int_{-1}^1 (x^2 - y^2) dy dx = \int_1^2 \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=-1}^1 dx$$

$$= \int_1^2 \left(\left(x^2 - \frac{1}{3} \right) - \left(-x^2 + \frac{1}{3} \right) \right) dx = \int_1^2 \left(2x^2 - \frac{2}{3} \right) dx = \frac{2}{3} \left(x^3 - x \right) \Big|_1^2 = 4 .$$

Question 15.10

Le dessin du solide est donné ci-dessous.



Le volume de ce solide est

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{-x/2+1} \sqrt{9-x^2} dy dx = \int_0^2 \left(y\sqrt{9-x^2} \right) \Big|_{y=0}^{-x/2+1} dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x}{2} + 1 \right) \sqrt{9-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^2 x\sqrt{9-x^2} dx + \int_0^2 \sqrt{9-x^2} dx . \end{aligned}$$

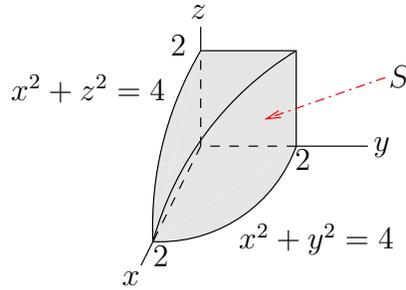
Pour calculer la première intégrale, nous utilisons la substitution $u = 9 - x^2$. Donc $du = -2x dx$, $u = 9$ lorsque $x = 0$ et $u = 5$ lorsque $x = 2$. Pour calculer la deuxième intégrale, nous utilisons la substitution trigonométrique $x = 3 \cos(\theta)$. Donc $dx = -3 \sin(\theta) d\theta$, $\theta = \pi/2$ lorsque $x = 0$ et $\theta = \arccos(2/3)$ lorsque $x = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} \int_9^5 u^{1/2} du - 9 \int_{\pi/2}^{\arccos(2/3)} \sin^2(\theta) d\theta = -\frac{1}{4} \int_5^9 u^{1/2} du + \frac{9}{2} \int_{\arccos(2/3)}^{\pi/2} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\ &= -\frac{1}{6} u^{3/2} \Big|_{u=5}^9 + \frac{9}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) \Big|_{\theta=\arccos(2/3)}^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{6} (27 - 5^{3/2}) + \frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(2/3) + \frac{1}{2} \sin(2 \arccos(2/3)) \right) \\ &= -\frac{1}{6} (27 - 5^{3/2}) + \frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(2/3) + \frac{2\sqrt{5}}{9} \right) = -\frac{9}{2} + \frac{19\sqrt{5}}{18} + \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} \arccos(2/3) . \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$ pour évaluer $\sin(2 \arccos(2/3))$.

Question 15.11

Le dessin de la partie du solide S qui se trouve dans la région définie par $x, y, z \geq 0$ est présenté ci-dessous.

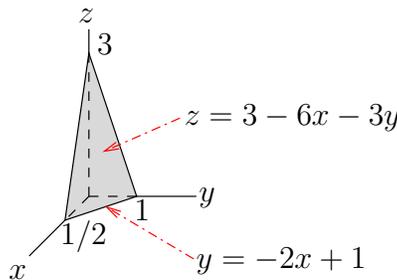


Le solide S est formé de huit pièces de cette forme. Le volume du solide est

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz \, dy \, dx = 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2} \, dy \, dx \\ &= 8 \int_0^2 (4-x^2) \, dx = 8 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^2 = 8 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

Question 15.12

La figure ci-dessous contient le dessin du tétraèdre.



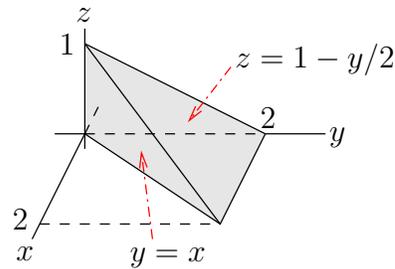
L'intersection du plan $2x + y + \frac{z}{3} = 1$ avec le plan $z = 0$ est la droite $2x + y = 1$.

Le volume du tétraèdre est

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} \int_0^{3(1-2x-y)} dz \, dy \, dx = \int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} z \Big|_{z=0}^{3(1-2x-y)} dy \, dx \\ &= 3 \int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} (1-2x-y) \, dy \, dx = 3 \int_0^{1/2} \left(y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=0}^{1-2x} dx \\ &= 3 \int_0^{1/2} \left((1-2x) - 2x(1-2x) - \frac{1}{2}(1-2x)^2 \right) dx \\ &= 3 \int_0^{1/2} \left((1-2x)^2 - \frac{1}{2}(1-2x)^2 \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^{1/2} (1-2x)^2 dx = -\frac{1}{4}(1-2x)^3 \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Question 15.13

La figure ci-dessous contient le dessin du tétraèdre S .

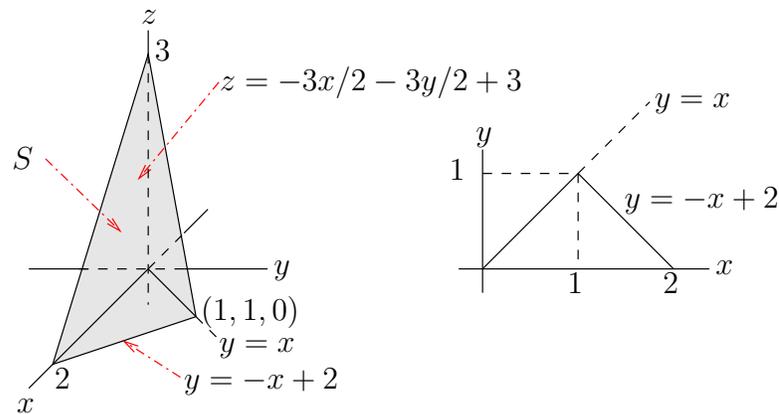


Le volume V to tétraèdre est

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_x^2 \int_0^{1-y/2} dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_x^2 \left(1 - \frac{y}{2}\right) dy \, dx = \int_0^2 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) \Big|_{y=x}^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Question 15.14

La figure ci-dessous contient le dessin du tétraèdre.

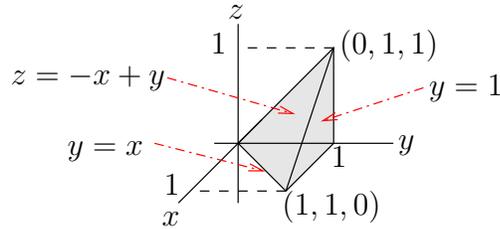


L'intersection du plan $3x + 3y + 2z = 6$ avec le plan $z = 0$ est la droite $y = -x + 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_S xy \, dV &= \int_0^1 \int_y^{2-y} \int_0^{3-3x/2-3y/2} xyz \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_y^{2-y} xyz \Big|_{z=0}^{3-3x/2-3y/2} dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_y^{2-y} \left(3xy - \frac{3x^2y}{2} - \frac{3xy^2}{2}\right) dx \, dy = \int_0^1 \left(\frac{3x^2y}{2} - \frac{x^3y}{2} - \frac{3x^2y^2}{4}\right) \Big|_{x=y}^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3(2-y)^2y}{2} - \frac{(2-y)^3y}{2} - \frac{3(2-y)^2y^2}{4}\right) - \left(\frac{3y^3}{2} - \frac{y^4}{2} - \frac{3y^4}{4}\right) dy \\ &= \int_0^1 (y^4 - 3y^2 + 2y) \, dy = \left(\frac{y^5}{5} - y^3 + y^2\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Question 15.15

La figure ci-dessous contient le dessin du tétraèdre S .



L'équation du plan qui contient les points $\mathbf{0}$, $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ est donnée par $((x, y, z) - (0, 0, 0)) \cdot \mathbf{n} = 0$ où \mathbf{n} est un vecteur perpendiculaire au plan. Nous obtenons un vecteur perpendiculaire au plan à l'aide du produit vectoriel des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ qui sont deux vecteurs du plan. Puisque

$$\mathbf{n} = (1, 1, 0) \times (0, 1, 1) = (1, -1, 1),$$

l'équation du plan qui contient les trois points est donnée par

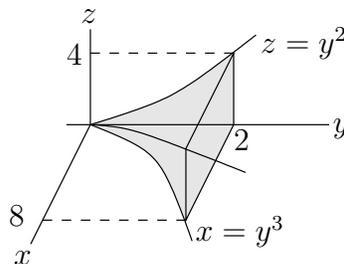
$$(x, y, z) \cdot (-1, 1, -1) = 0 \Rightarrow z = -x + y.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_S xz \, dV &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{-x+y} xz \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_x^1 \frac{xz^2}{2} \Big|_{z=0}^{-x+y} \, dy \, dx = \int_0^1 \int_x^1 \frac{x(-x+y)^2}{2} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(-x+y)^3}{6} \Big|_{y=x}^1 \, dx = \int_0^1 \frac{x(-x+1)^3}{6} \, dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (-x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x) \, dx \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

Question 15.16

La figure ci-dessous contient un dessin du solide S décrit par les bornes d'intégration.



Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy &= \int_0^8 \int_{x^{1/3}}^2 \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx, \\ \int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy &= \int_0^4 \int_{z^{1/2}}^2 \int_0^{y^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

et

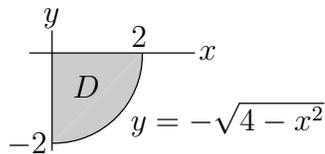
$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy = \int_0^8 \int_0^{x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^2 f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx \\ + \int_0^8 \int_{x^{2/3}}^4 \int_{z^{1/2}}^2 f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx .$$

Pour la dernière intégrale, il faut trouver la projection dans le plan x, z de l'intersection des surfaces $z = y^2$ et $x = y^3$ pour $x, y, z \geq 0$. L'intersection est une courbe donnée par l'équation $z^{1/2} = x^{1/3}$; c'est-à-dire, $z = x^{2/3}$. Pour $0 \leq x \leq 8$ et $0 \leq z \leq x^{2/3}$, nous avons que $x^{1/3} \leq y \leq 2$. Pour $0 \leq x \leq 8$ et $x^{2/3} \leq z \leq 4$, nous avons que $z^{1/2} \leq y \leq 2$.

18.15.2 Substitution

Question 15.19

a)



b) Le domaine D est formé des points $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ pour $0 \leq r \leq 2$ et $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$. Ainsi,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = r$$

et

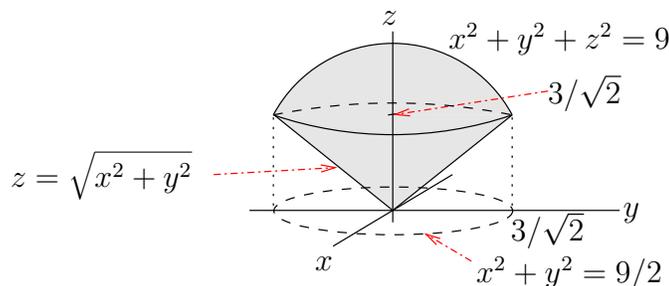
$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^0 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx = \int_{-\pi/2}^0 \int_0^2 \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r} r \, dr \, d\theta \\ = \int_{-\pi/2}^0 \int_0^2 r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \, dr \, d\theta .$$

c)

$$\int_{-\pi/2}^0 \int_0^2 r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^0 \left(\frac{r^3}{3} \cos(\theta) \sin(\theta) \right) \Big|_{r=0}^2 \, d\theta \\ = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^0 \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right) \Big|_{-\pi/2}^0 = -\frac{4}{3} .$$

Question 15.20

Le dessin de la région R est donné ci-dessous.



Si nous substituons $z^2 = x^2 + y^2$ pour $z \geq 0$ dans $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, nous obtenons $2z^2 = 9$. Donc $z = 3/\sqrt{2}$. L'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ avec la surface $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ est donc le cercle donné par $x^2 + y^2 = (3/\sqrt{2})^2 = 9/2$ et $z = 3/\sqrt{2}$.

a) Avec les coordonnées cartésiennes, nous avons

$$V = \int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{9/2-x^2}}^{\sqrt{9/2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dz dy dx .$$

Le calcul de cette intégrale n'est pas à conseiller.

b) En coordonnées cylindriques, la région R est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq r \leq 3/\sqrt{2}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2} = \sqrt{9 - r^2}$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r ,$$

le volume de la région R est

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{3/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{9-r^2}} r dz dr d\theta .$$

c) En coordonnées sphériques, la région R est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ et $0 \leq r \leq 3$. Remarquons que l'intersection du cône avec le plan $x = 0$ donne $|y| = |z|$. L'angle entre l'axe des z et le côté du cône est donc $\pi/4$. Puisque

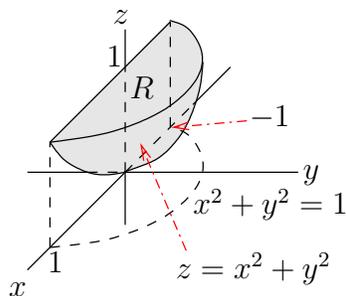
$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin(\phi) ,$$

le volume de la région R est

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta .$$

Question 15.21

a) Le dessin de la région R est donné ci-dessous.



En coordonnées cylindriques, la région R est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 1$ et $x^2 + y^2 = r^2 \leq z \leq 1$. Puisque

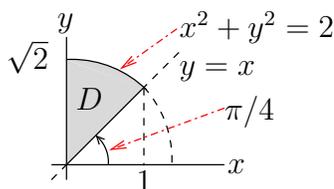
$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r,$$

nous avons

$$\begin{aligned} \iint_R z \, dV &= \int_0^\pi \int_0^1 \int_{r^2}^1 z r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} r \right) \Big|_{z=r^2}^1 \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r}{2} - \frac{z^5}{2} \right) \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{r^2}{4} - \frac{z^6}{12} \right) \Big|_{r=0}^1 \, d\theta = \frac{1}{6} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Question 15.22

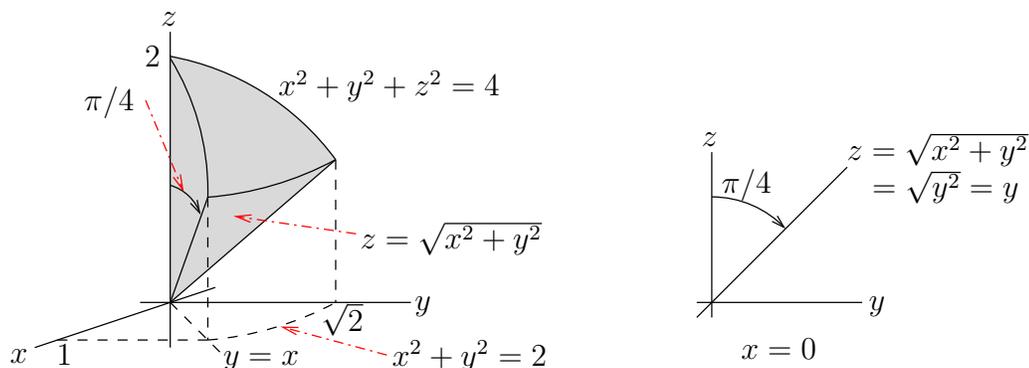
b) Nous avons que $0 \leq x \leq 1$ et $x \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$. Donc, pour x fixe entre 0 et 1, le point (x, y) se trouve sur le segment qui va du point (x, x) au point $(x, \sqrt{2-x^2})$; un point sur le cercle $x^2 + y^2 = 2$. L'ensemble de ces points forme la région D représentée dans la figure ci-dessous.



Nous avons que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Donc, pour (x, y) dans la région D , le point (x, y, z) se trouve sur le segment qui va du point $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ au point $(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$. le point $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ fait partie de l'hyperboloïde $z^2 = x^2 + y^2$ alors que le point $(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$ fait partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Pour trouver l'intersection de l'hyperboloïde avec la sphère, nous substituons $x^2 + y^2 = z^2$ dans $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ pour obtenir $2z^2 = 4$. Donc $z = \sqrt{2}$ puisque nous considérons la région $z > 0$. L'intersection est le cercle $x^2 + y^2 = 2$ avec $z = \sqrt{2}$.

Le dessin de la région E définie par les bornes d'intégration est donné ci-dessous.



En coordonnées sphériques, la région E est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

pour $0 \leq r \leq 2$, $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ et $0 \leq \phi \leq \pi/4$. Puisque

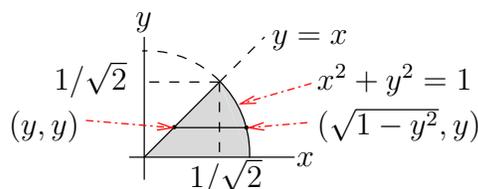
$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin(\phi), \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_{r=0} d\phi d\theta = \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \sin(\phi) d\phi d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-\cos(\phi)) \Big|_{\phi=0}^{\pi/4} d\theta = \frac{8}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

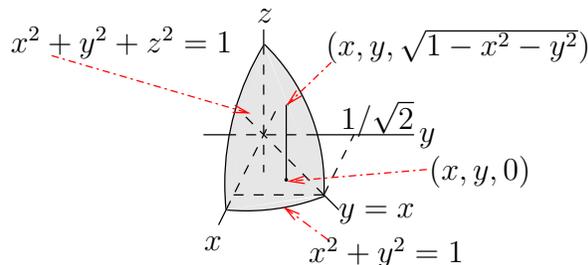
Question 15.23

a) Nous avons que $0 \leq y \leq 1/\sqrt{2}$ et $y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$. Donc, pour y fixe entre 0 et $1/\sqrt{2}$, le point (x, y) se trouve sur le segment qui va du point (y, y) au point $(\sqrt{1-y^2}, y)$; un point sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. L'ensemble de ces points forme la région D représentée dans la figure ci-dessous.



Nous avons que $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Donc, pour (x, y) dans la région D , le point (x, y, z) se trouve sur le segment qui va du point $(x, y, 0)$ au point $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$; un point sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Le dessin de la région E définie par les bornes d'intégration est donné ci-dessous.



Nous pourrions utiliser les coordonnées cylindriques à partir de la région D mais comme la hauteur est déterminée par la sphère de rayon 1 et l'intégrande est $x^2 + y^2 + z^2$, le carré de la distance du point (x, y, z) à l'origine, les coordonnées sphériques sont préférables. La région E est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

pour $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ et $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Puisque

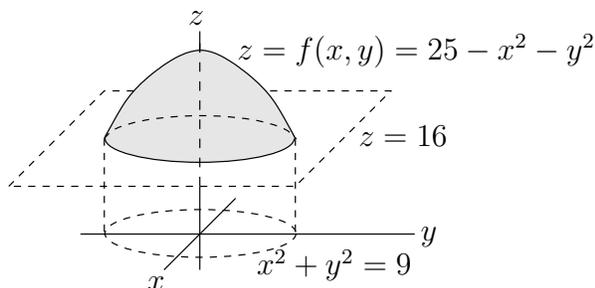
$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin(\phi) \end{aligned}$$

et $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \sin(\phi) dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^5}{5} \sin(\phi) \right) \Big|_{r=0}^1 d\phi d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \sin(\phi) d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} (-\cos(\phi)) \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{20}. \end{aligned}$$

Question 15.24

L'intersection entre la surface $z = 25 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 16$ est donnée par $16 = 25 - x^2 - y^2$. Nous obtenons le cercle $x^2 + y^2 = 9$ avec $z = 16$.



1^e méthode: Le volume du solide est

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{16}^{25-x^2-y^2} dz \, dy \, dx = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z \Big|_{z=16}^{25-x^2-y^2} dy \, dx \\
 &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (9 - x^2 - y^2) \, dy \, dx = \int_{-3}^3 \left(9y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dx \\
 &= 2 \int_{-3}^3 \left(9 - x^2 - \frac{1}{3}(9 - x^2) \right) \sqrt{9 - x^2} \, dx = 2 \int_{-3}^3 \left(6 - \frac{2}{3}x^2 \right) \sqrt{9 - x^2} \, dx .
 \end{aligned}$$

Avec la substitution trigonométrique $x = 3 \cos(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$, nous obtenons $dx = -3 \sin(\theta) \, d\theta$, $\theta = \pi$ lorsque $x = -3$ et $\theta = 0$ lorsque $x = 3$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 V &= -18 \int_{\pi}^0 \left(6 - 6 \cos^2(\theta) \right) \sin^2(\theta) \, d\theta = 108 \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2(\theta) \right) \sin^2(\theta) \, d\theta \\
 &= 108 \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) \, d\theta - 108 \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \, d\theta \\
 &= 54 \int_0^{\pi} (1 - \cos(2\theta)) \, d\theta - 27 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2(2\theta)) \, d\theta \\
 &= 54\pi - \frac{27}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(4\theta)) \, d\theta = 54\pi - \frac{27\pi}{2} = \frac{81\pi}{2} .
 \end{aligned}$$

2^e méthode: En coordonnées cylindriques, la région E bornée par la surface $z = 25 - x^2 - y^2$ et le plan $z = 16$ est formée des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$ et $16 \leq z \leq 25 - x^2 - y^2 = 25 - r^2$. Puisque

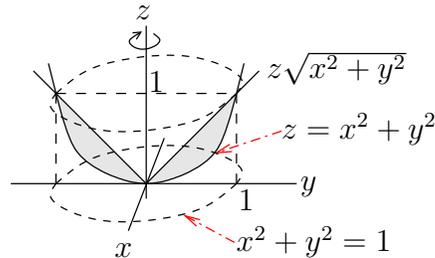
$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r ,$$

le volume du solide est

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{16}^{25-r^2} r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r z \Big|_{z=16}^{25-r^2} d\theta \, dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r (9 - r^2) \, d\theta \, dr \\
 &= 2\pi \int_0^3 (9r - r^3) \, dr = 2\pi \left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{2} .
 \end{aligned}$$

Question 15.25

Soit E la région au dessus de la parabolôide d'équation $z = x^2 + y^2$ et au dessous du cône d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. La figure ci-dessous présente une coupe transversale de E selon le plan $x = 0$.



L'intersection de la parabolôide et du cône est donnée par la solution de $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les deux solutions possibles sont $x^2 + y^2 = 0$ avec $z = 0$, et $x^2 + y^2 = 1$ avec $z = 1$.

En coordonnées cylindriques, E est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $r^2 = x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} = r$. Puisque

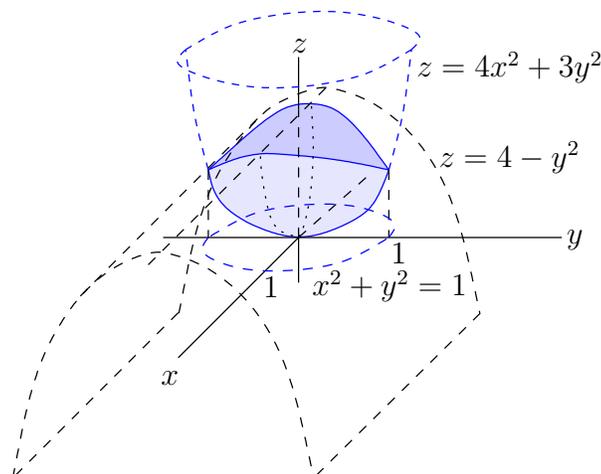
$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r,$$

le volume du solide E est

$$\begin{aligned} \iiint_E dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^r r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r z \Big|_{z=r^2}^r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - r^3) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^1 \, d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Question 15.27

Soit E le solide borné par le parabolôide $z = 4x^2 + 3y^2$ et le cylindre parabolique $y^2 + z = 4$. Le dessin du solide E est donné ci-dessous.



Les points (x, y, z) de l'intersection des deux surfaces doivent satisfaire $z = 4 - y^2 = 4x^2 + 3y^2$; c'est-à-dire, $x^2 + y^2 = 1$ et $z = 4 - y^2$. Cela décrit une courbe.

En coordonnées cylindriques, la région E est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $3r^2 + r^2 \cos^2(\theta) \leq z \leq 4 - r^2 \sin^2(\theta)$ car $4x^2 + 3y^2 = 4r^2 \cos^2(\theta) + 3r^2 \sin^2(\theta) = 3r^2 + r^2 \cos^2(\theta)$ et $4 - y^2 = 4 - r^2 \sin^2(\theta)$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r,$$

le volume du solide est

$$\begin{aligned} \iiint_E dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{3r^2 + r^2 \cos^2(\theta)}^{4 - r^2 \sin^2(\theta)} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r z \Big|_{z=3r^2 + r^2 \cos^2(\theta)}^{4 - r^2 \sin^2(\theta)} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - 3r^2 - r^2 \sin^2(\theta) - r^2 \cos^2(\theta)) r \, dr \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) \, dr \, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^1 \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

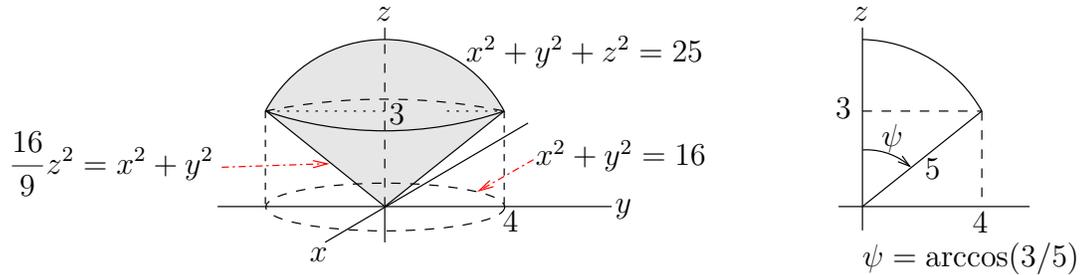
Question 15.29

Soit E la région bornée par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ et le cône $\frac{16}{9}z^2 = x^2 + y^2$ pour $z \geq 0$.

L'intersection de la sphère avec le cône est donnée par

$$25 - x^2 - y^2 = z^2 = \frac{9}{16} (x^2 + y^2).$$

Nous obtenons $16 = x^2 + y^2$ et $z = 3$. Le dessin du cornet est donné ci-dessous.



Afin de calculer la masse du cône, nous utilisons les coordonnées sphériques. La région E est l'ensemble des points

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \arccos(3/5)$ et $0 \leq r \leq 4$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin(\phi),$$

la masse du cône est

$$\begin{aligned} M &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(3/5)} r^4 \sin^3(\phi) \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(3/5)} r^4 (1 - \cos^2(\phi)) \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \, dr. \end{aligned}$$

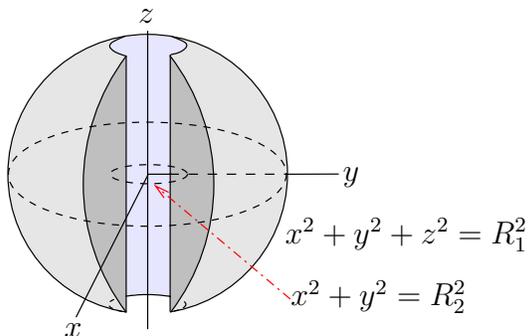
Si $u = \cos(\phi)$, alors $du = -\sin(\phi) \, d\phi$, $u = 1$ lorsque $\phi = 0$ et $u = 3/5$ lorsque $\phi = \arccos(3/5)$. Donc

$$\begin{aligned} M &= - \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_1^{3/5} r^4 (1 - u^2) \, du \, d\theta \, dr = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_{3/5}^1 r^4 (1 - u^2) \, du \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} r^4 \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_{u=3/5}^1 \, d\theta \, dr = \frac{52}{375} \int_0^5 \int_0^{2\pi} r^4 \, d\theta \, dr \\ &= \frac{104\pi}{375} \int_0^5 r^4 \, dr = \frac{104\pi}{375} \left(\frac{r^5}{5} \Big|_{r=0}^5 \right) = \frac{520\pi}{3} \text{ g.} \end{aligned}$$

Question 15.30

Soit E la sphère de rayon R_1 centrée à l'origine qui est percée par un cylindre de rayon $R_2 < R_1$ dont l'axe est un diamètre de la sphère. Nous pouvons supposer que l'axe du cylindre est l'axe des z car la densité est une fonction de la distance à l'origine seulement. L'équation du cylindre est donc alors $x^2 + y^2 = R_2^2$.

Le dessin du solide E est donnée ci-dessous.



Nous avons enlevé une tranche du solide pour mieux voir la partie de la sphère qui a été enlevée. Pour calculer la masse du solide, nous allons calculer la masse de la sphère (avant d'être percée par le cylindre) puis soustraire de cette masse la masse de la partie de la sphère qui a été enlevée par le passage du cylindre.

i) La masse de la sphère peut être facilement calculée à l'aide des coordonnées sphériques

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ et $0 \leq r \leq R_1$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = r^2 \sin(\phi),$$

la masse de la sphère est

$$\begin{aligned} M_s &= \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \, dr = - \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} r^4 \cos(\phi) \Big|_{\phi=0}^{\pi} \, d\theta \, dr \\ &= 2 \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} r^4 \, d\theta \, dr = 4\pi \int_0^{R_1} r^4 \, dr = \frac{4\pi r^5}{5} \Big|_0^{R_1} = \frac{4\pi}{5} R_1^5. \end{aligned}$$

ii) Pour calculer la masse de la partie cylindrique qui a été retirée de la sphère, nous utilisons les coordonnées cylindriques

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq r \leq R_2$ et

$$-\sqrt{R_1^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{R_1^2 - r^2} = \sqrt{R_1^2 - r^2}.$$

Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r,$$

la masse de cette partie cylindrique est

$$M_c = \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{R_1^2 - r^2}}^{\sqrt{R_1^2 - r^2}} (z^2 + r^2) r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{z^3}{3} + r^2 z \right) r \right) \Big|_{z=-\sqrt{R_1^2 - r^2}}^{\sqrt{R_1^2 - r^2}} \, d\theta \, dr$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} (R_1^2 + 2r^2) \sqrt{R_1^2 - r^2} r \, d\theta \, dr = \frac{4\pi}{3} \int_0^{R_2} (R_1^2 + 2r^2) \sqrt{R_1^2 - r^2} r \, dr .$$

Pour calculer cette dernière intégrale, posons $u = R_1^2 - r^2$. Donc $du = -2r \, dr$, $u = R_1^2$ lorsque $r = 0$ et $u = R_1^2 - R_2^2$ lorsque $r = R_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M_c &= -\frac{2\pi}{3} \int_{R_1^2 - R_2^2}^{R_1^2} (R_1^2 + 2(R_1^2 - u)) u^{1/2} \, du = \frac{2\pi}{3} \int_{R_1^2 - R_2^2}^{R_1^2} (3R_1^2 u^{1/2} - 2u^{3/2}) \, du \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(2R_1^2 u^{3/2} - \frac{4}{5} u^{5/2} \right) \Big|_{R_1^2 - R_2^2}^{R_1^2} = \frac{4\pi}{5} R_1^5 - \frac{4\pi}{15} (3R_1^4 - R_1^2 R_2^2 - 2R_1^4) \sqrt{R_1^2 - R_2^2} . \end{aligned}$$

La masse de notre solide est

$$M_s - M_c = \frac{4\pi}{15} (3R_1^4 - R_1^2 R_2^2 - 2R_1^4) .$$

18.16 Calcul vectoriel

18.16.1 Intégrale le long d'une courbe

Question 16.1

Nous avons que $\sigma(0) = (1, 1, 1)$ et $\sigma(1) = (e, e^{-1}, e^2)$. Ainsi, $0 \leq t \leq 1$ et

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot ds &= \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 (e^{3t}, e^{-t} + e^{2t}, e^t) \cdot (e^t, -e^{-t}, 2e^{2t}) \, dt = \int_0^1 (e^{4t} - e^{-2t} - e^t + 2e^{3t}) \, dt \\ &= \left(\frac{1}{4} e^{4t} + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^t + \frac{2}{3} e^{3t} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} e^4 + \frac{1}{2} e^{-2} - e + \frac{2}{3} e^3 - \frac{5}{12} . \end{aligned}$$

Question 16.2

Partageons le trajet en deux sections : C_1 est le quart de cercle de rayon 2 centré à l'origine de $(-2, 0)$ et $(0, 2)$, et C_2 est la segment de droite de $(0, 2)$ à $(3, 1)$.

Nous choisissons une représentation paramétrique pour chacune des sections. Pour C_1 ,

$$(x, y) = (2 \cos(\pi - \theta), 2 \sin(\pi - \theta)) = (-2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta))$$

pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Pour C_2 ,

$$(x, y) = (2 - t, 3t)$$

pour $0 \leq t \leq 1$. Ainsi,

$$\int_{C_1} \sqrt{y} x \, dx + 2xy \, dy = -4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) (\sin(\theta))^{3/2} \, d\theta - 16 \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos^2(\theta) \, d\theta$$

$$= -\frac{8\sqrt{2}}{5}(\sin(\theta))^{5/2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{16}{3}\cos^3(\theta)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{16}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \sqrt{y}x \, dx + 2xy \, dy &= -\sqrt{3} \int_0^1 \sqrt{t}(2-t) \, dt + 18 \int_0^1 (2-t)t \, dt \\ &= -\sqrt{3} \int_0^1 (2t^{1/2} - t^{3/2}) \, dt + 18 \int_0^1 (2t - t^2) \, dt \\ &= -\sqrt{3} \left(\frac{4}{3}t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2} \right) \Big|_0^1 + 18 \left(t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{14\sqrt{3}}{15} + 12.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\int_C \sqrt{y}x \, dx + 2xy \, dy &= \int_{C_1} \sqrt{y}x \, dx + 2xy \, dy + \int_{C_2} \sqrt{y}x \, dx + 2xy \, dy \\ &= \frac{20}{3} - \frac{14\sqrt{3}}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{5}.\end{aligned}$$

Question 16.4

Nous pouvons partager le trajet en trois segments de droite : C_1 de $(0, 0, 0)$ à $(0, 3, 0)$, C_2 de $(0, 3, 0)$ à $(2, 3, 1)$, et C_3 de $(2, 3, 1)$ à $(2, 0, 0)$.

Nous choisissons une représentation paramétrique pour chacun des segments. Pour C_1 ,

$$(x, y, z) = (0, t, 0)$$

pour $0 \leq t \leq 3$. Pour C_2 ,

$$(x, y, z) = (2t, 3, t)$$

pour $0 \leq t \leq 1$. Finalement, pour C_3 ,

$$(x, y, z) = (2, 3 - 3t, 1 - t)$$

pour $0 \leq t \leq 1$. Ainsi,

$$\int_{C_1} F \cdot ds = \int_{C_1} yz \, dx + xz \, dy + y \, dz = \int_0^1 0 \, dt = 0.$$

Ceci n'est pas surprenant car la force $F(x, y, z) = (0, 0, y)$ est perpendiculaire à la direction du déplacement sur C_1 .

$$\int_{C_2} F \cdot ds = \int_{C_2} yz \, dx + xz \, dy + y \, dz = \int_0^1 (6t + 3) \, dt = 6.$$

Finalement,

$$\int_{C_3} F \cdot ds = \int_{C_3} yz \, dx + xz \, dy + y \, dz = -9 \int_0^1 (1 - t) \, dt = -\frac{9}{2}.$$

Nous avons donc

$$\int_C F \cdot ds = \int_{C_1} F \cdot ds + \int_{C_2} F \cdot ds + \int_{C_3} F \cdot ds = \frac{3}{2}.$$

18.16.2 Rotationnel et divergence

Question 16.6

a) Nous avons $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ où $F_1(x, y, z) = e^x \cos(z)$, $F_2(x, y, z) = y$ et $F_3(x, y, z) = -e^x \sin(z)$. Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (0 - 0) \mathbf{i} + (-e^x \sin(z) + e^x \sin(z)) \mathbf{j} + (0 - 0) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ce qui confirme que F est conservateur grâce à la proposition 16.2.4. De plus, $F = \nabla f$ pour une fonction f .

b) Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfasse $F = \nabla f$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x, y, z) = e^x \cos(z) \Rightarrow f(x, y, z) = e^x \cos(z) + g(y, z)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x, y, z) = y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = y \Rightarrow g(y, z) = \frac{y^2}{2} + h(z)$$

pour une certaine fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons donc $f(x, y, z) = e^x \cos(z) + \frac{y^2}{2} + h(z)$. Finalement,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F_3(x, y, z) \Rightarrow -e^x \sin(z) + h'(z) = -e^x \sin(z) \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C$$

où C est une constante d'intégration. La fonction cherchée est $f(x, y, z) = e^x \cos(z) + \frac{y^2}{2} + C$.

Question 16.7

a) Nous avons que $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ où $F_1(x, y) = e^{2y}$ et $F_2(x, y) = 1 + 2xe^{2y}$. Grâce à la proposition 16.2.4 (exemple 16.2.5), il suffit de vérifier que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ pour démontrer que F est conservateur. Puisque

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (1 + 2xe^{2y}) = 2e^{2y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{2y}) = 2e^{2y},$$

nous avons bien que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ et F est conservateur. Il découle du théorème 16.1.17 que $F = \nabla f$ pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x, y) = e^{2y} \Rightarrow f(x, y) = xe^{2y} + g(y)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x, y) = 1 + 2xe^{2y} \Rightarrow 2xe^{2y} + g'(y) = 1 + 2xe^{2y} \Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y + C$$

où C est une constante d'intégration. La fonction cherchée est $f(x, y) = xe^{2y} + y + C$. Comme pour les intégrales définies, nous pouvons poser $C = 0$.

Si Γ est une courbe quelconque qui va du point $\sigma(0) = (0, 1)$ au point $\sigma(1) = (e, 2)$, donc en particulier la courbe C , nous avons que

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds = f(e, 2) - f(0, 1) = e^5 - 1$$

grâce au Théorème fondamental des intégrales le long de courbes.

c) Nous avons que $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j}$ où $F_1(x, y) = 2x + y^2 + 3x^2y$ et $F_2(x, y) = 2xy + x^3 + 3y^2$. Grâce à la proposition 16.2.4 (exemple 16.2.5), il suffit de vérifier que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ pour démontrer que F est conservateur. Puisque

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + x^3 + 3y^2) = 2y + 3x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y^2 + 3x^2y) = 2y + 3x^2,$$

nous avons bien que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ et F est conservateur. Il découle du théorème 16.1.17 que $F = \nabla f$ pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x, y) = 2x + y^2 + 3x^2y \Rightarrow f(x, y) = x^2 + xy^2 + x^3y + g(y)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x, y) = 2xy + x^3 + 3y^2 &\Rightarrow 2xy + x^3 + g'(y) = 2xy + x^3 + 3y^2 \\ &\Rightarrow g'(y) = 3y^2 \Rightarrow g(y) = y^3 + C \end{aligned}$$

où C est une constante d'intégration. La fonction cherchée est donc $f(x, y) = x^2 + xy^2 + x^3y + y^3 + C$. Comme pour les intégrales définies, nous pouvons prendre $C = 0$.

Si Γ est une courbe quelconque qui va du point $(0, 0)$ au point $(\pi, 2)$, donc en particulier la courbe C , nous avons que

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds = f(\pi, 0) - f(0, 0) = \pi^2$$

grâce au Théorème fondamental des intégrales le long de courbes.

e) Nous avons $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ où $F_1(x, y, z) = 2xyz$, $F_2(x, y, z) = x^2z + z \cos(yz)$ et $F_3(x, y, z) = x^2y + y \cos(yz) + 2z$. Grâce à la proposition 16.2.4, il suffit de vérifier que $\text{rot } F = \mathbf{0}$ pour démontrer que F est conservateur. Or,

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \left((x^2 + \cos(yz) - yz \sin(yz)) - (x^2 + \cos(yz) - yz \sin(yz)) \right) \mathbf{i} \\ &\quad + (2xy - 2xy) \mathbf{j} + (2xz - 2xz) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Donc F est conservateur. De plus, $F = \nabla f$ pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfasse $F = \nabla f$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1(x, y, z) = 2xyz \Rightarrow f(x, y, z) = x^2yz + g(y, z)$$

pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = F_2(x, y, z) = x^2z + z \cos(yz) &\Rightarrow x^2z + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = x^2z + z \cos(yz) \\ &\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = z \cos(yz) \Rightarrow g(y, z) = \sin(yz) + h(z) \end{aligned}$$

pour une certaine fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons donc $f(x, y, z) = x^2yz + \sin(yz) + h(z)$. Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} = F_3(x, y, z) &\Rightarrow x^2y + y \cos(yz) + h'(z) = x^2y + y \cos(yz) + 2z \\ &\Rightarrow h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = z^2 + C \end{aligned}$$

où C est une constante d'intégration. La fonction cherchée est donc $f(x, y, z) = x^2yz + \sin(yz) + z^2 + C$. Nous pouvons poser $C = 0$.

Si Γ est une courbe quelconque qui va du point $(0, 0, 0)$ au point $(2, \pi, 1/2)$, nous avons que

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds = f(2, \pi, 1/2) - f(0, 0, 0) = 2\pi + \frac{5}{4}$$

grâce au Théorème fondamental des intégrales le long de courbes.

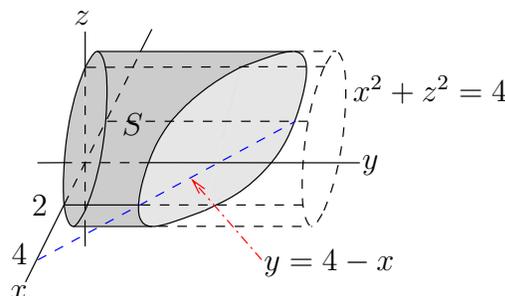
Question 16.8

Les champs de vecteurs qui sont de divergence nulle sont B, C et D. Le volume d'une petite région ne change pas sous l'influence du champ de vecteurs.

Les champs de vecteurs qui sont irrotationnel sont A et D. Une petite région ne tourne pas sur elle même sous l'influence du champ de vecteurs.

18.16.3 Intégrale sur une surface

Question 16.9



Une représentation paramétrique de la surface S est donnée par

$$(x, y, z) = (2 \cos(\theta), y, 2 \sin(\theta))$$

pour $(y, \theta) \in D = \{(y, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi \text{ et } 0 \leq y \leq 4 - x = 4 - 2 \cos(\theta)\}$. Puisque

$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| dA = \|(0, 1, 0) \times (-2 \sin(\theta), 0, 2 \cos(\theta))\| dA \\ &= \|(2 \cos(\theta), 0, 2 \sin(\theta))\| dA = \sqrt{4 \cos^2(\theta) + 4 \sin^2(\theta)} dA = 2 dA, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \iint_S xy \, dS &= \iint_D 4y \cos(\theta) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{4-2\cos(\theta)} 4y \cos(\theta) \, dy \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2y^2 \cos(\theta) \right) \Big|_{y=0}^{4-2\cos(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} 8(2 - \cos(\theta))^2 \cos(\theta) \, d\theta \\ &= 8 \int_0^{2\pi} (4 \cos(\theta) - 4 \cos^2(\theta) + \cos^3(\theta)) \, d\theta \\ &= -16 \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta = -16 \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) \Big|_0^{2\pi} = -32\pi \end{aligned}$$

car $\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} \cos^3(\theta) \, d\theta = 0$.

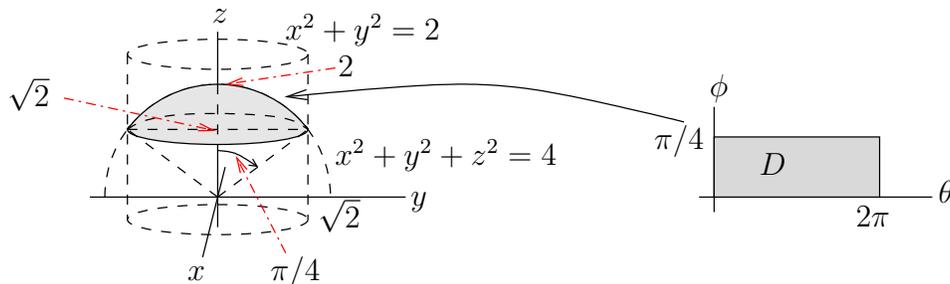
Question 16.10

L'intersection de la sphère et du cylindre est l'ensemble des points (x, y, z) qui satisfont

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ et } x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 2 + z^2 = 4 \text{ et } x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow z^2 = 2 \text{ et } x^2 + y^2 = 2.$$

Puisque nous considérons la partie supérieure de la sphère, nous obtenons $z = \sqrt{2}$. L'intersection est donc le cercle $x^2 + y^2 = 2$ avec $z = \sqrt{2}$.

Le dessin de la surface S est donné ci-dessous



Une représentation paramétrique de la surface S est donnée par

$$(x, y, z) = (2 \sin(\phi) \cos(\theta), 2 \sin(\phi) \sin(\theta), 2 \cos(\phi))$$

pour $(\theta, \phi) \in D = \{(\theta, \phi) : 0 \leq \theta < 2\pi \text{ et } 0 \leq \phi \leq \pi/4\}$. Puisque

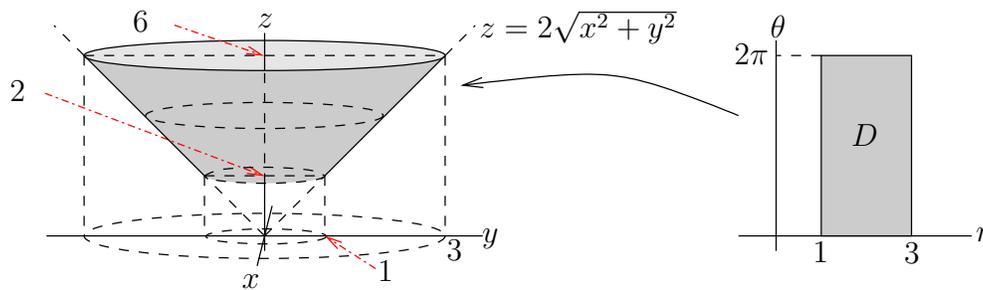
$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi} \right) \right\| dA \\ &= \|(-2 \sin(\phi) \sin(\theta), 2 \sin(\phi) \cos(\theta), 0) \times (2 \cos(\phi) \cos(\theta), 2 \cos(\phi) \sin(\theta), -2 \sin(\phi))\| dA \\ &= \left\| (-4 \sin^2(\phi) \cos(\theta), -4 \sin^2(\phi) \sin(\theta), -4 \sin(\phi) \cos(\phi)) \right\| dA \\ &= \sqrt{16 \sin^2(\phi)} dA = 4 \sin(\phi) dA \end{aligned}$$

car $\sin(\phi) \geq 0$ pour $0 \leq \phi \leq \pi/4$, nous avons

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2)z dS &= \iint_D 32 \sin^3(\phi) \cos(\phi) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} 32 \sin^3(\phi) \cos(\phi) d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(8 \sin^4(\phi) \Big|_{\phi=0}^{\pi/4} \right) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi . \end{aligned}$$

Question 16.11

Le dessin de l'entonnoir est donné ci-dessous.



Une représentation paramétrique de S est donnée par

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 2r)$$

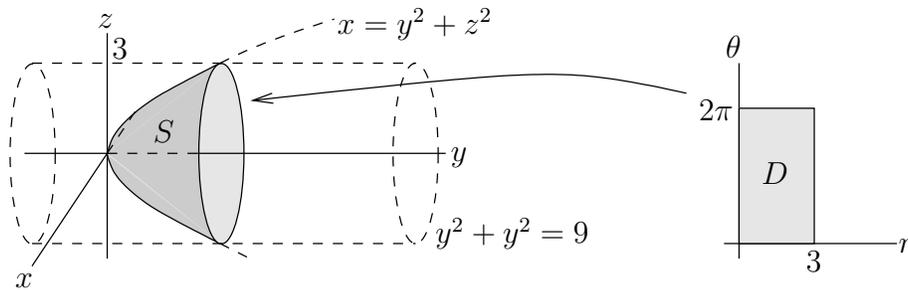
pour $(r, \theta) \in D = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 3 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Chaque tranche horizontale de S est un cercle de rayon r . Puisque

$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| dA \\ &= \|(\cos(\theta), \sin(\theta), 2) \times (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0)\| dA = \|(-2r \cos(\theta), -2r \sin(\theta), r)\| dA \\ &= 3r dA , \end{aligned}$$

la masse est donnée par

$$\begin{aligned} \iint_S \rho dS &= \iint_D 3(8 - 2r)r dA = 6 \int_0^{2\pi} \int_1^3 (4r - r^2) dr d\theta \\ &= 6 \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_{r=1}^3 d\theta = 44 \int_0^{2\pi} d\theta = 88\pi . \end{aligned}$$

Question 16.12



Une représentation paramétrique de la surface S est donnée par

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r^2, r \sin(\theta))$$

pour $(r, \theta) \in D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 3 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Puisque

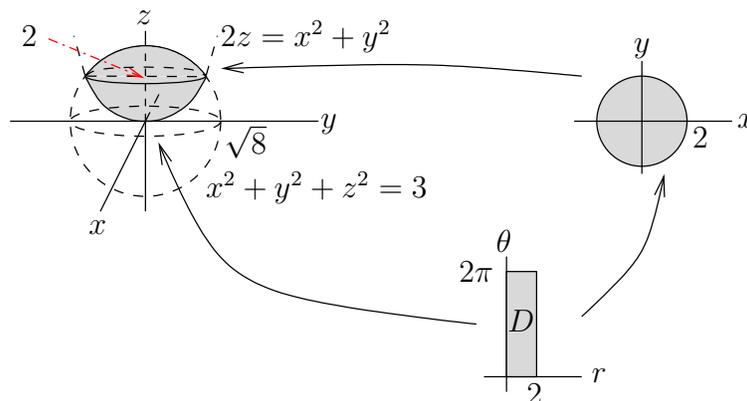
$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| dA \\ &= \left\| (\cos(\theta), 2r, \sin(\theta)) \times (-r \sin(\theta), 0, r \cos(\theta)) \right\| dA \\ &= \left\| (2r^2 \cos(\theta), -r, 2r^2 \sin(\theta)) \right\| dA \\ &= \sqrt{r^2 + 4r^4 \cos^2(\theta) + 4r^4 \sin^2(\theta)} dA = r\sqrt{1 + 4r^2} dA \end{aligned}$$

car $r \geq 0$, l'aire de S est

$$\begin{aligned} \iint_S dS &= \iint_D r\sqrt{1 + 4r^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r(1 + 4r^2)^{1/2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{(1 + 4r^2)^{3/2}}{12} \Big|_{r=0}^3 \right) d\theta = \frac{37^{3/2} - 1}{12} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{(37^{3/2} - 1)\pi}{6}. \end{aligned}$$

Question 16.14

Le solide est représenté dans la figure ci-dessous.



Il faut premièrement trouver l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ et du paraboloïde $z = (x^2 + y^2)/2$. Après avoir substitué l'expression pour z donnée par le paraboloïde dans l'équation de la sphère, nous obtenons

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 &= 8 \Rightarrow (x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 = 8 \\ &\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 + 4(x^2 + y^2) - 32 = 0 \\ &\Rightarrow ((x^2 + y^2) + 8)((x^2 + y^2) - 4) = 0. \end{aligned}$$

Puisque $x^2 + y^2 \geq 0$, la seule solution possible est $x^2 + y^2 = 4$. Dans ce cas $z = (x^2 + y^2)/2 = 2$. L'intersection est le cercle $x^2 + y^2 = 4$ avec $z = 2$.

Divisons la surface S en deux sections : la surface supérieure du solide, dénoté S_1 , qui est formée par la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ et surface inférieure du solide, dénotée S_2 , qui est formée par la partie du paraboloïde $z = (x^2 + y^2)/2$.

Commençons par la surface supérieure S_1 . Une représentation paramétrique est donnée par

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \sqrt{8 - r^2})$$

pour $(r, \theta) \in D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Puisque

$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| dA \\ &= \left\| \left(\cos(\theta), \sin(\theta), \frac{-r}{\sqrt{8 - r^2}} \right) \times (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0) \right\| dA \\ &= \left\| \left(\frac{-r^2 \cos(\theta)}{\sqrt{8 - r^2}}, \frac{-r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{8 - r^2}}, r \right) \right\| dA \\ &= \sqrt{\frac{r^4 \cos^2(\theta)}{8 - r^2} + \frac{r^4 \sin^2(\theta)}{8 - r^2} + r^2} dA = \frac{2\sqrt{2} r}{\sqrt{8 - r^2}} dA, \end{aligned}$$

l'aire de la surface supérieure S_1 est donnée par

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} dS &= \iint_D \frac{2\sqrt{2} r}{\sqrt{8 - r^2}} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{2\sqrt{2} r}{\sqrt{8 - r^2}} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-2\sqrt{2} \sqrt{8 - r^2} \Big|_{r=0}^2 \right) d\theta = 4(2 - \sqrt{2}) \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Pour la surface inférieure S_2 , une représentation paramétrique est donnée par

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r^2/2)$$

pour $(r, \theta) \in D$ défini ci-dessus. Puisque

$$dS = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right\| dA$$

$$\begin{aligned}
&= \|(\cos(\theta), \sin(\theta), r) \times (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0)\| \, dA \\
&= \|(-r^2 \cos(\theta), -r^2 \sin(\theta), r)\| \, dA \\
&= \sqrt{r^4 \cos^2(\theta) + r^4 \sin^2(\theta) + r^2} \, dA = r\sqrt{r^2 + 1} \, dA,
\end{aligned}$$

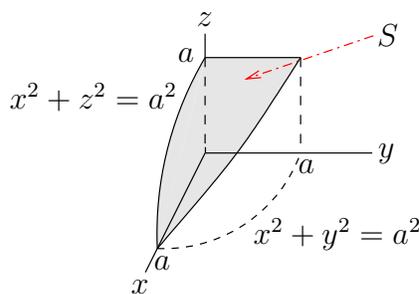
l'aire de la surface inférieure S_2 est donnée par

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} dS &= \iint_D r\sqrt{r^2 + 1} \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\sqrt{r^2 + 1} \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}(r^2 + 1)^{3/2} \Big|_{r=0}^2 \right) d\theta = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}$$

L'aire total de la surface S du solide est $8\pi(2 - \sqrt{2}) + \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$.

Question 16.15

Le dessin de la partie de la surface S qui se trouve dans la région définie par $x, y, z \geq 0$ est donné ci-dessous.



La surface S est formée de huit pièces de cette forme. Une représentation paramétrique est donnée par

$$(x, y, z) = (a \cos(\theta), y, a \sin(\theta))$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$ et $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} = a \sin(\theta)$. Puisque

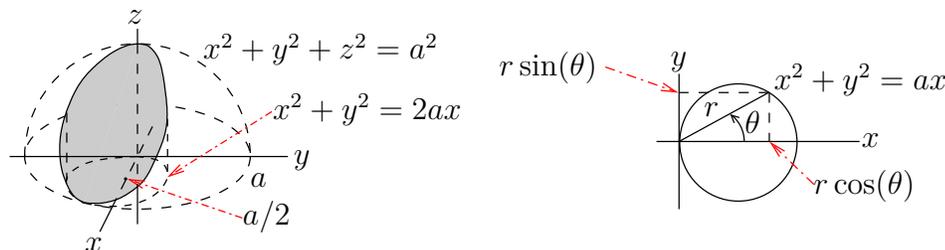
$$\begin{aligned}
dS &= \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right\| dA = \|(-a \sin(\theta), 0, a \cos(\theta)) \times (0, 1, 0)\| dA \\
&= \|(-a \cos(\theta), 0, -a \sin(\theta))\| dA = a \, dA,
\end{aligned}$$

l'aire de la surface S est donnée par

$$\begin{aligned}
\iint_S dS &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \sin(\theta)} a \, dy \, d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \left(ay \Big|_{y=0}^{a \sin(\theta)} \right) d\theta \\
&= 8a^2 \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \, d\theta = -8a^2 \cos(\theta) \Big|_0^{\pi/2} = 8a^2.
\end{aligned}$$

Question 16.16

Le dessin de la surface de la sphère pour $z > 0$ qui se trouve à l'intérieur du cylindre est donné ci-dessous.



Il y a une partie identique pour $z < 0$.

L'équation $x^2 + y^2 = ax$ représente bien un cylindre car

$$x^2 + y^2 = ax \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

C'est un cylindre de rayon $a/2$ dont l'axe est la droite parallèle à l'axe des z qui passe par $(a/2, 0, 0)$. La première représentation paramétrique à laquelle nous pourrions penser est celle donnée par les coordonnées cylindriques centrées sur la droite parallèle à l'axe des z qui passe par le point $(a/2, 0, 0)$; c'est-à-dire, $x = a/2 + r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = (a^2 - (a/2 + r \cos(\theta))^2 - r^2 \sin^2(\theta))^{1/2}$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq r \leq a/2$. Malheureusement, ce n'est pas un bon choix. Le calcul de l'intégrale est beaucoup plus compliqué avec cette représentation qu'avec la représentation paramétrique en coordonnées cylindrique centrées sur l'axe des z . C'est cette dernière représentation que nous allons utiliser. La représentation paramétrique est donnée par

$$(x, y, z) = \rho(\theta, r) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \sqrt{a^2 - r^2})$$

pour $(\theta, r) \in D = \{(\theta, r) : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ et } 0 \leq r \leq a \cos(\theta)\}$. Pour déterminer les bornes pour r , notons que $x^2 + y^2 = ax$ avec $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ donne $r^2 = ar \cos(\theta)$ et donc $r = a \cos(\theta)$. Puisque

$$\begin{aligned} dS &= \left\| \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \theta}, \frac{\partial \rho_2}{\partial \theta}, \frac{\partial \rho_3}{\partial \theta} \right) \times \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial r}, \frac{\partial \rho_2}{\partial r}, \frac{\partial \rho_3}{\partial r} \right) \right\| dA \\ &= \left\| (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0) \times \left(\cos(\theta), \sin(\theta), \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) \right\| dA \\ &= \left\| \left(-\frac{r^2 \cos(\theta)}{\sqrt{a^2 - r^2}}, -\frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{a^2 - r^2}}, -r \right) \right\| dA = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dA, \end{aligned}$$

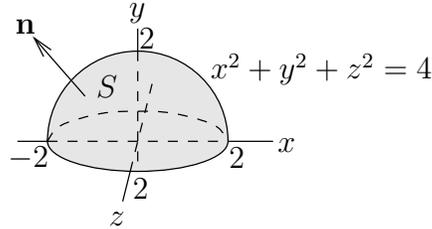
l'aire de la surface S est donnée par

$$\begin{aligned} \iint_S dS &= 2 \int_{\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a \cos(\theta)} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta = -2 \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left(a \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^{a \cos(\theta)} \right) d\theta \\ &= -2 \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left(a^2 \sqrt{\sin^2(\theta)} - a^2 \right) d\theta = -4a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\sin^2(\theta)} - 1 \right) d\theta \\ &= -4a^2 \int_0^{\pi/2} (\sin(\theta) - 1) d\theta = 4a^2 (\cos(\theta) + \theta) \Big|_0^{\pi/2} = 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

car $a^2\sqrt{\sin^2(\theta)} - a^2$ est une fonction paire et $\sin(\theta) \geq 0$ pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Question 16.18

Le dessin de la surface S est donné ci-dessous.



Une représentation paramétrique est donné par

$$(x, y, z) = (2 \cos(\theta) \sin(\phi), 2 \cos(\phi), 2 \sin(\theta) \sin(\phi))$$

pour $0 \leq \phi \leq \pi/2$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Soit

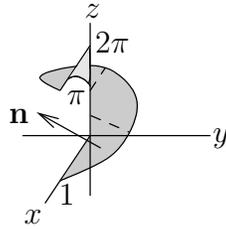
$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi} \right) \\ &= (-2 \sin(\theta) \sin(\phi), 0, 2 \cos(\theta) \sin(\phi)) \times (2 \cos(\theta) \cos(\phi), -2 \sin(\phi), 2 \sin(\theta) \cos(\phi)) \\ &= (4 \cos(\theta) \sin^2(\phi), 4 \sin(\phi) \cos(\phi), 4 \sin(\theta) \sin^2(\phi)) . \end{aligned}$$

Puisque $4 \sin(\phi) \cos(\phi) > 0$ pour $0 \leq \phi \leq \pi/2$, le vecteur \mathbf{m} est un vecteur normal à la surface S qui pointe dans la direction de l'orientation de la surface S . Notre représentation paramétrique est donc compatible avec l'orientation sur S . Le flux est

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} F(2 \cos(\theta) \sin(\phi), 2 \cos(\phi), 2 \sin(\theta) \sin(\phi)) \\ &\quad \cdot (4 \cos(\theta) \sin^2(\phi), 4 \sin(\phi) \cos(\phi), 4 \sin(\theta) \sin^2(\phi)) \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (4 \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\phi), 4 \cos^2(\phi), 4 \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\phi)) \\ &\quad \cdot (4 \cos(\theta) \sin^2(\phi), 4 \sin(\phi) \cos(\phi), 4 \sin(\theta) \sin^2(\phi)) \, d\phi \, d\theta \\ &= 16 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^3(\phi) \cos(\phi) + \cos^3(\phi) \sin(\phi)) \, d\phi \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (\sin^4(\phi) - \cos^4(\phi)) \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} d\theta = 8 \int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi . \end{aligned}$$

Question 16.20

Le dessin de la surface S est donné ci-dessous.



Soit

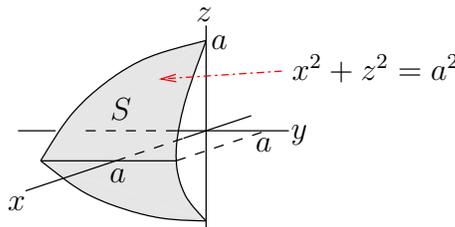
$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{\partial \rho}{\partial u} \times \frac{\partial \rho}{\partial v} = (\cos(v), \sin(v), 0) \times (-u \sin(v), u \cos(v), 1) \\ &= (\sin(v), -\cos(v), u) . \end{aligned}$$

Puisque $u \geq 0$, le vecteur \mathbf{m} est un vecteur normal à la surface S qui pointe dans la direction de l'orientation de la surface S . La représentation paramétrique est compatible avec l'orientation sur la surface S . Le flux est donc

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (u \sin(v), u \cos(v), v) \cdot (\sin(v), -\cos(v), u) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (u \sin^2(v) - u \cos^2(v) + uv) \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-u \cos(2v) + uv) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(2v) + v) \left(\frac{u^2}{2} \Big|_{u=0}^1 \right) \, dv = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-\cos(2v) + v) \, dv \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2v) + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi^2 . \end{aligned}$$

Question 16.21

Le dessin de la partie de la surface S pour $x \geq 0$ est donné ci-dessous.



Il y a une partie semblable pour $x \leq 0$.

Une représentation paramétrique est donnée par

$$(x, y, z) = (a \cos(\theta), y, a \cos(\theta))$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$ et $-a|\cos(\theta)| \leq y \leq a|\cos(\theta)|$. Pour déterminer le domaine d'intégration de y , notons que l'intersection des deux cylindres est donnée par

$$y^2 + z^2 = a^2 = x^2 + z^2 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow |y| = |x| .$$

Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (-a \sin(\theta), 0, a \cos(\theta)) \times (0, 1, 0) \\ &= (-a \cos(\theta), 0, -a \sin(\theta)) . \end{aligned}$$

Le vecteur \mathbf{q} est un vecteur normal à la surface S qui pointe dans la direction opposée à la direction de l'orientation de la surface S . Il faut donc utiliser $\mathbf{m} = -\mathbf{q}$ pour respecter l'orientation sur la surface S ou remplacer la représentation paramétrique par

$$(x, y, z) = (a \cos(-\theta), y, a \cos(-\theta)) .$$

Ce qui revient au même.

Puisque \cos et \sin sont des fonctions périodique de période 2π , le flux est donné par

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-a|\cos(\theta)|}^{a|\cos(\theta)|} F(a \cos(\theta), y, a \sin(\theta)) \cdot (a \cos(\theta), 0, a \sin(\theta)) \, dy \, d\theta .$$

Pour calculer l'intégrale, nous devons diviser le domaine d'intégration pour θ afin de traiter les bornes d'intégration $\pm a|\cos(\theta)|$ pour y . Puisque $|\cos(\theta)| = \cos(\theta)$ pour $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ et $|\cos(\theta)| = -\cos(\theta)$ pour $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, l'intégrale pour $-\pi/2 < \theta \leq 3\pi/2$ sera la somme de l'intégrale pour $-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$ et de l'intégrale pour $\pi/2 < \theta \leq 3\pi/2$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot d\mathbf{S} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-a \cos(\theta)}^{a \cos(\theta)} F(a \cos(\theta), y, a \sin(\theta)) \cdot (a \cos(\theta), 0, a \sin(\theta)) \, dy \, d\theta \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{a \cos(\theta)}^{-a \cos(\theta)} F(a \cos(\theta), y, a \sin(\theta)) \cdot (a \cos(\theta), 0, a \sin(\theta)) \, dy \, d\theta . \end{aligned}$$

La première intégrale est

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-a \cos(\theta)}^{a \cos(\theta)} F(a \cos(\theta), y, a \sin(\theta)) \cdot (a \cos(\theta), 0, a \sin(\theta)) \, dy \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-a \cos(\theta)}^{a \cos(\theta)} (a \cos(\theta), \cos(a \cos(\theta)y), a \sin(\theta)) \cdot (a \cos(\theta), 0, a \sin(\theta)) \, dy \, d\theta \\ &= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-a \cos(\theta)}^{a \cos(\theta)} dy \, d\theta = 2a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta = 2a^3 \sin(\theta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4a^3 \end{aligned}$$

et la deuxième intégrale est

$$\begin{aligned} &\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{a \cos(\theta)}^{-a \cos(\theta)} F(a \cos(\theta), y, a \sin(\theta)) \cdot (a \cos(\theta), 0, a \sin(\theta)) \, dy \, d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{a \cos(\theta)}^{-a \cos(\theta)} (a \cos(\theta), \cos(a \cos(\theta)y), a \sin(\theta)) \cdot (a \cos(\theta), 0, a \sin(\theta)) \, dy \, d\theta \\ &= a^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{a \cos(\theta)}^{-a \cos(\theta)} dy \, d\theta = -2a^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta = -2a^3 \sin(\theta) \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 4a^3 . \end{aligned}$$

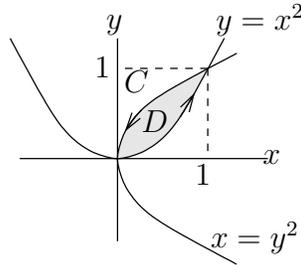
Notons que la deuxième intégrale peut être réduite à la première avec la substitution $\theta = \phi - \pi$. Le flux est donc

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = 8a^3 .$$

18.16.4 Théorèmes de Stokes et de Green

Question 16.23

Le dessin de la région D et de sa frontière C est donné ci-dessous.



Nous pourrions penser évaluer directement l'intégrale

$$\int_C (y + e^{x^2}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy$$

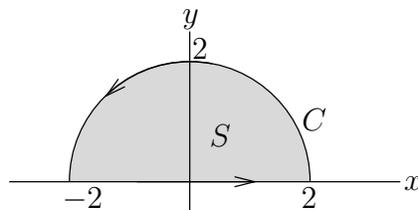
mais cela demanderait de longs et complexes calculs, sans compter le fait que l'intégrale doit être calculée sur deux sections de la courbe C , la section lorsque $y = x^2$ et celle lorsque $x = y^2$.

Une autre approche est d'utiliser le Théorème de Green. Notons que l'orientation de C est l'orientation positive associée à la région D comme il est requis pour le Théorème de Green. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_C (y + e^{x^2}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x + \cos(y^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(y + e^{x^2}) \right) dA \\ &= \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Question 16.24

Le dessin du parcours C de la particule incluant la direction de son déplacement est donné ci-dessous.



Le travail du champ de vecteur sur la particule est

$$W = \int_C F \cdot ds = \int_C x dx + (x^3 + 3xy^2) dy.$$

Grâce au Théorème de Green, nous pouvons remplacer le calcul de cette intégrale le long de la courbe C par l'intégrale double suivante.

$$W = \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^3 + 3xy^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x) \right) dA = \iint_S (3x^2 + 3y^2) dA .$$

Notons que l'orientation de C est l'orientation positive associée à la région S comme il est requis pour le Théorème de Green.

Pour évaluer cette dernière intégrale, il est raisonnable d'utiliser les coordonnées polaires

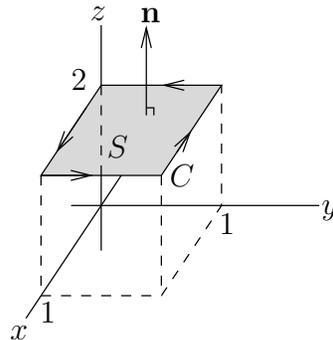
$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

pour $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq \pi$. Puisque $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ et $3x^2 + 3y^2 = 3r^2$, nous obtenons

$$W = 3 \int_0^\pi \int_0^2 r^3 dr d\theta = 3 \int_0^\pi \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\theta = 12 \int_0^\pi d\theta = 12\pi .$$

Question 16.25

Le dessin de la courbe C est donné ci-dessous.



Nous pourrions calculer directement cette intégrale. Il faudrait décomposer le rectangle C en quatre segments qui connectent les quatre points. Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul. Il est simple. Nous allons utiliser le Théorème de Stokes qui dit que

$$\int_C F \cdot ds = \iint_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S}$$

où S est la région du plan $z = 2$ délimitée par le rectangle C . Nous avons $C = \partial S$. L'orientation sur S est dans la direction positive de l'axe des z pour qu'elle soit consistante avec la direction de C . Une représentation paramétrique de S est

$$(x, y, z) = \rho(x, y) = (x, y, 2)$$

pour $0 \leq x, y \leq 1$. Soit

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \times \frac{\partial \rho}{\partial y} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1) .$$

Le vecteur \mathbf{m} est le vecteur normal unitaire à la surface S qui pointe vers le haut, donc dans la direction de l'orientation de la surface S . Notre choix de représentation paramétrique pour S est donc consistant avec la direction de S .

Puisque

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xy & xz \end{vmatrix} = (0, -z + y, y - z)$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne, nous avons

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot ds &= \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{rot} F(\rho(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \times \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (0, -2 + y, y - 2) \cdot (0, 0, 1) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (y - 2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - 2y \right) \Big|_{y=0}^1 dx = -\frac{3}{2} \int_0^1 dx = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Question 16.26

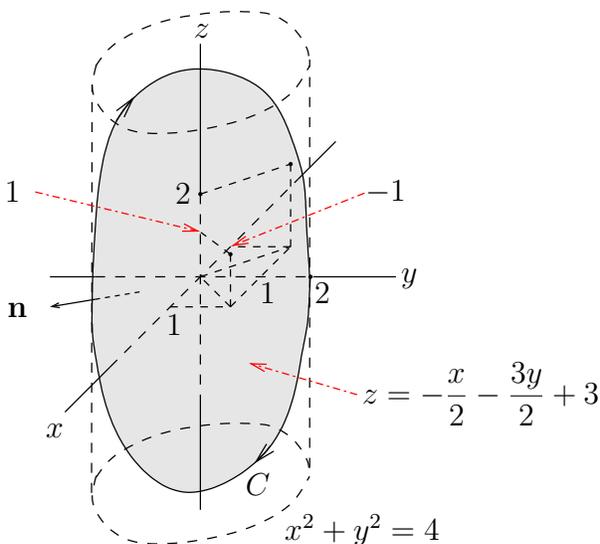
Il faut premièrement trouver l'équation du plan contenant les trois points donnés. Un vecteur normal \mathbf{v} au plan est donné par le produit vectoriel de deux vecteurs non colinéaires \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 qui sont parallèles au plan. Un choix possible est $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1) - (0, 2, 0) = (1, -1, 1)$ et $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 2) - (0, 2, 0) = (-1, -1, 2)$. Ainsi,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne. L'équation du plan tangent est donc donnée par

$$(-1, -3, -2) \cdot ((x, y, z) - (0, 2, 0)) = 0 \Rightarrow -x - 3(y - 2) - 2z = 0 \Rightarrow z = -\frac{x}{2} - \frac{3y}{2} + 3.$$

La courbe C est le résultat de l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et du plane $z = -x/2 - 3y/2 + 3$. Le dessin de cette courbe est donné ci-dessous.



Nous pourrions calculer directement l'intégrale $\int_C F \cdot ds$ en utilisant la représentation paramétrique de la courbe C donnée par

$$(x, y, z) = \rho(\theta) = (2 \cos(\theta), -2 \sin(\theta), -\frac{1}{2} \cos(\theta) + \frac{3}{2} \sin(\theta) + 3)$$

pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que cette représentation paramétrique est bien consistante avec la direction sur C . Nous allons utiliser le Théorème de Stokes qui dit que

$$\int_C F \cdot ds = \iint_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S}$$

où S est la région du plan $z = -x/2 - 3y/2 + 3$ qui est contenue à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 4$. L'orientation sur S est donnée par un vecteur normal qui pointe dans la direction de z négatif pour qu'elle soit consistante avec la direction sur C . Une représentation paramétrique de S est

$$(x, y, z) = \rho(\theta, r) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), -\frac{r}{2} \cos(\theta) - \frac{3r}{2} \sin(\theta) + 3)$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$ et $0 \leq r \leq 2$. Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \times \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ &= \left(-r \sin(\theta), r \cos(\theta), \frac{r}{2} \sin(\theta) - \frac{3r}{2} \cos(\theta) \right) \times \left(\cos(\theta), \sin(\theta), -\frac{1}{2} \cos(\theta) - \frac{3}{2} \sin(\theta) \right) \\ &= \left(-\frac{r}{2}, -\frac{3r}{2}, -r \right). \end{aligned}$$

le vecteur \mathbf{m} est un vecteur normal à la surface S qui pointe dans la direction de z négatif car $r \geq 0$. La représentation paramétrique pour S est donc consistante avec l'orientation sur S .

Puisque

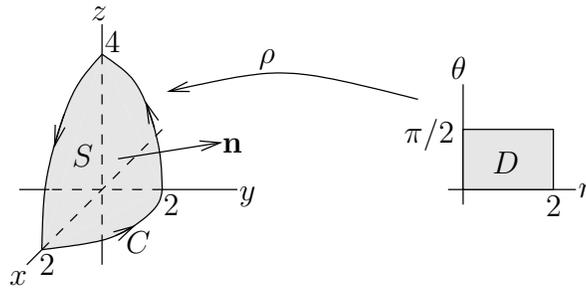
$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 2y)$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne, nous avons

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\mathbf{s} &= \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \operatorname{rot} F(\rho(\theta, r)) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \times \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (0, 0, 1 - 2r \sin(\theta)) \cdot \left(-\frac{r}{2}, -\frac{3r}{2}, -r \right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-r + 2r^2 \sin(\theta)) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3} \sin(\theta) \right) \Big|_{r=0}^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-2 + \frac{16}{3} \sin(\theta) \right) d\theta = \left(-2\theta - \frac{16}{3} \cos(\theta) \right) \Big|_0^{2\pi} = -4\pi . \end{aligned}$$

Question 16.27

Le dessin de la surface S avec sa frontière $C = \partial S$ est donné ci-dessous.



Le dessin inclus aussi le vecteur normal unitaire \mathbf{n} qui définit l'orientation de la surface S associée à la direction positive sur le courbe C .

Nous pourrions calculer directement l'intégrale le long de la courbe C en faisant la somme de l'intégrale le long de la courbe C dans le plan $z = 0$, puis dans le plan $x = 0$ et finalement dans le plan $y = 0$. Ce n'est pas cette approche qui sera utilisée. Grâce au Théorème de Stokes, nous avons que

$$\int_C F \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} .$$

C'est cette dernière intégrale que nous allons évaluer.

Une représentation paramétrique de S est

$$(x, y, z) = \rho(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 4 - r^2)$$

pour $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Soit

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \rho}{\partial r} \times \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta), -2r) \times (-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0)$$

$$= (2r^2 \cos(\theta), 2r^2 \sin(\theta), r) .$$

le vecteur \mathbf{m} est un vecteur normal à la surface S qui pointe dans la direction de l'orientation de la surface S . Notre choix de représentation paramétrique pour S est donc consistant avec l'orientation de S .

Puisque

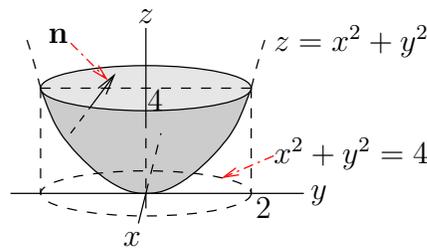
$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yz(1-z) & xz & xyz \end{vmatrix} = (x(z-1), y(z-1), 2z-z^2)$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne seulement, nous avons

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot ds &= \iint_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \text{rot } F(\rho(r, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \times \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (r \cos(\theta)(3-r^2), r \sin(\theta)(3-r^2), -8+6r^2-r^4) \\ &\quad \cdot (2r^2 \cos(\theta), 2r^2 \sin(\theta), r) dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (-3r^5 + 12r^3 - 8r) dr d\theta = \int_0^1 \left(-\frac{y^6}{2} + 3r^4 - 4r^2 \right) \Big|_{r=0}^2 d\theta = 0 . \end{aligned}$$

Question 16.28

Le dessin de la surface S est donné ci-dessous.



Grâce au Théorème de Stokes, nous avons que

$$\iint_S \text{rot } F \cdot d\mathbf{S} = \int_C F \cdot ds$$

où $C = \partial S$ est la frontière de S . En fait, C est le cercle $x^2 + y^2 = 4$ pour $z = 4$. L'orientation positive sur C qui est associée à l'orientation sur S est dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre quand nous regardons C à partir d'un point $(0, 0, z)$ avec $z > 4$.

Une représentation paramétrique pour C est

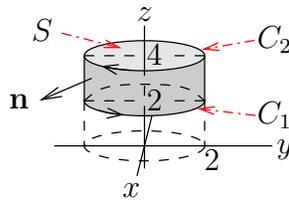
$$(x, y, z) = \sigma(\theta) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 4)$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$. Nous avons

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} &= \int_C F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) \cdot \sigma'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos(\theta), 0, -2 \sin(\theta)) \cdot (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0) d\theta \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = -2 \sin^2(\theta) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Question 16.29

Le dessin de la surface S est donné ci-dessous.



Nous pourrions calculer directement cette intégrale. Cependant

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 e^{xz^2} & z^4 e^{yz^2} & xy \end{vmatrix} \\ &= (x - (4z^3 + 2yz^5)e^{yz^2}, -y + (3z^2 + 2xz^4)e^{xz^2}, 0) \end{aligned}$$

si nous développons le déterminant selon la première ligne seulement. Ceci n'est pas très encourageant pour le calcul de l'intégrale.

Nous allons donc utiliser le Théorème de Stokes qui dit que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\mathbf{S} = \int_C F \cdot ds$$

où $C = \partial S$, la frontière de S . Nous décomposons C en deux courbes : C_1 est le cercle $x^2 + y^2 = 4$ avec $z = 2$ et C_2 est le cercle $x^2 + y^2 = 4$ avec $z = 4$. L'orientation positive sur C_1 et C_2 imposée par l'orientation de S est indiquée dans la figure ci-dessus ; dans le sens contraire des aiguilles d'une montre sur C_1 et dans le sens des aiguilles d'une montre sur C_2 lorsque que vu d'un point $(0, 0, z)$ avec $z > 4$.

Une représentation paramétrique pour C_1 est

$$(x, y, z) = \sigma_1(\theta) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 2)$$

pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Puisque $\sigma_1'(\theta) = (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0)$, la représentation paramétrique est consistante avec l'orientation de C_1 .

Une représentation paramétrique pour C_2 est

$$(x, y, z) = \sigma_2(\theta) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 4)$$

pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Puisque $\sigma'(\theta) = (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0)$, cette représentation paramétrique est associée à l'orientation inverse de C_2 . Il faudra donc prendre la valeur négative de l'intégrale.

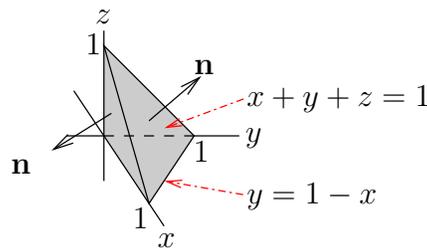
Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot ds &= \int_{C_1} F \cdot ds + \int_{C_2} F \cdot ds \\ &= \int_0^{2\pi} (8e^{8 \cos(\theta)}, 16e^{8 \sin(\theta)}, 4 \cos(\theta) \sin(\theta)) \cdot (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0) d\theta \\ &\quad - \int_0^{2\pi} (64e^{32 \cos(\theta)}, 256e^{32 \sin(\theta)}, 16 \cos(\theta) \sin(\theta)) \cdot (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0) d\theta \\ &= -16 \int_0^{2\pi} \sin(\theta) e^{8 \cos(\theta)} d\theta + 32 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) e^{8 \sin(\theta)} d\theta \\ &\quad + 128 \int_0^{2\pi} \sin(\theta) e^{32 \cos(\theta)} d\theta - 512 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) e^{32 \sin(\theta)} d\theta \\ &= (2e^{8 \cos(\theta)}) \Big|_0^{2\pi} + (4e^{8 \sin(\theta)}) \Big|_0^{2\pi} - (4e^{32 \cos(\theta)}) \Big|_0^{2\pi} - (16e^{32 \sin(\theta)}) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

18.16.5 Théorème de la divergence

Question 16.30

Le dessin du tétraèdre E est donné ci-dessous.



Le Théorème de la divergence nous donne

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} F dV$$

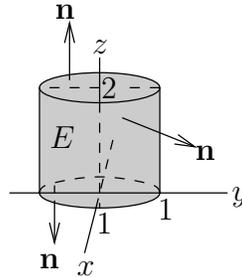
où $S = \partial E$. Puisque $\operatorname{div} F(x, y, z) = 3$, nous obtenons

$$\iiint_E \operatorname{div} F dV = 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} dz dy dx = 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(z \Big|_0^{1-x-y} \right) dz dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \, dx = 3 \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{1-x} \, dx \\
&= 3 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) \, dx = 3 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Question 16.31

Le dessin du solide E est donné ci-dessous.



Grâce au Théorème de la divergence, le flux de F qui s'échappe de E est donné par

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} F \, dV$$

où $S = \partial E$. Pour calculer l'intégrale triple, utilisons les coordonnées cylindriques

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq z \leq 2$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, r, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ r \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r$$

et

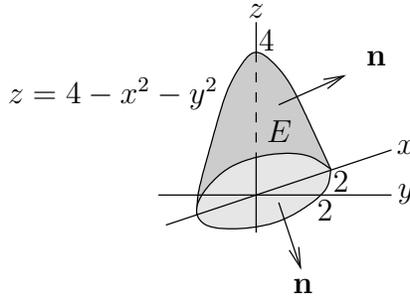
$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\iiint_E \operatorname{div} F \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 3(r^2 + z^2)r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(3r^3z + z^3r \right) \Big|_{z=0}^2 \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (6r^3 + 8r) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}r^4 + 4r^2 \right) \Big|_{r=0}^1 \, d\theta = \frac{11}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = 11\pi.
\end{aligned}$$

Question 16.32

Le dessin du solide E est donné ci-dessous.



Grâce au Théorème de la divergence, Le flux de F qui s'échappe de E est donné par

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} F \, dV$$

où $S = \partial E$. Pour calculer l'intégrale triple, nous utilisons les coordonnées cylindriques

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq z \leq 4 - r^2$. Puisque

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, r, z)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ r \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r$$

et $\operatorname{div} F(x, y, z) = x^2 + y^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \iiint_E \operatorname{div} F \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^3 \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^3 z) \Big|_{z=0}^{4-r^2} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r^3 - r^5) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(r^4 - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_{r=0}^2 \, d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

18.17 Systèmes d'équations différentielles

18.17.1 Systèmes d'équations différentielles linéaires

Question 17.1

a) Nous avons les valeurs propres et vecteurs propres suivants.

valeur propre	un vecteur propre
$\lambda_1 = -5$	$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}^\top$
$\lambda_2 = 7$	$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^\top$

La solution générale est donc de la forme

$$\mathbf{x} = \alpha e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \beta e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = \alpha e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha e^{-5t} + 2\beta e^{7t} \\ \alpha e^{-5t} + \beta e^{7t} \end{pmatrix}.$$

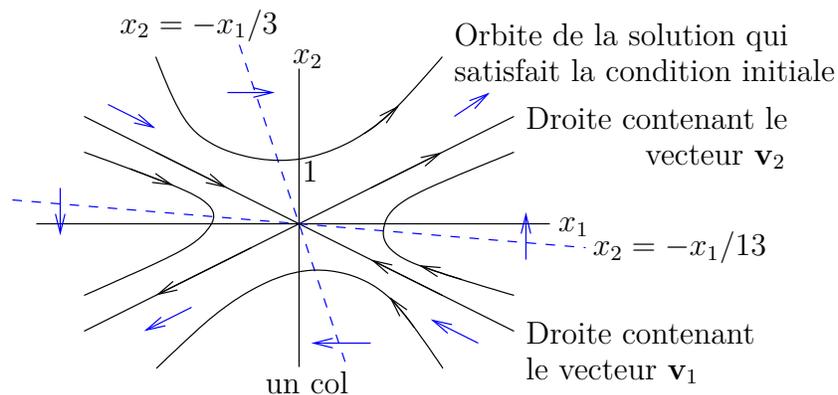
Pour satisfaire la condition initiale $(0 \ 1)^\top$ à $t = 0$, il faut choisir α et β de telle sorte que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, $-2\alpha + 2\beta = 0$ et $\alpha + \beta = 1$. La première équation donne $\beta = \alpha$. Si nous substituons $\beta = \alpha$ dans l'équation $\alpha + \beta = 1$, nous obtenons $\alpha = \beta = 1/2$. La solution qui satisfait la condition initiale est

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -e^{-5t} + e^{7t} \\ \frac{1}{2}e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{7t} \end{pmatrix}.$$

Puisque $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, les deux valeurs propres sont de signes opposés, nous obtenons le portrait de phases suivant.



Pour nous aider à tracer le portrait de phases, nous avons aussi inclus les nullclines avec la direction dans chacune des régions du plan découpées par les nullclines.

c) Il y a une seule valeur propre et tous les vecteurs propres associés à cette valeur propre sont des multiples du vecteur que nous avons choisi comme vecteur propre dans notre tableau.

valeur propre	un vecteur propre
$\lambda = -1$	$\mathbf{v} = (1 \ -1)^\top$

Il faut donc trouver un vecteur \mathbf{u} tel que $(A + I)\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Si nous posons $\mathbf{u} = (a \ b)^\top$, il faut résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

$R_2 + R_1 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ainsi $a + b = 1$. Si $a = 1$, alors $b = 0$. Nous obtenons le vecteur $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$.

La solution générale est donc de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \alpha e^{\lambda t} \mathbf{v} + \beta e^{\lambda t} (\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^{-t}(1+t) \\ -\alpha e^{-t} - \beta e^{-t}t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

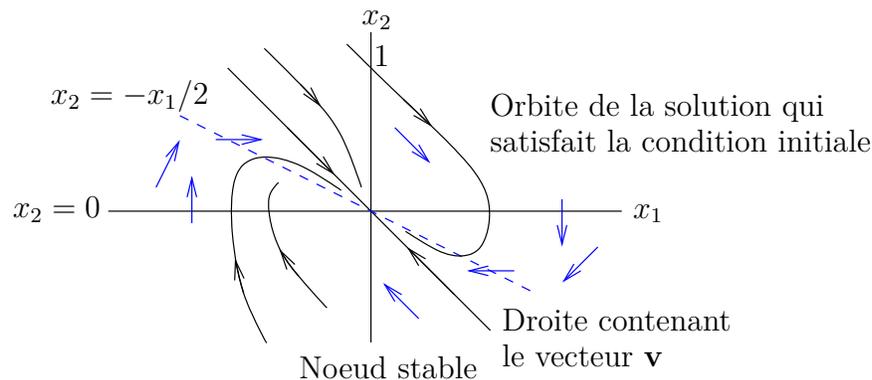
Pour satisfaire la condition initiale $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à $t = 0$, il faut choisir α et β de telle sorte que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

Nous trouvons $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. La solution qui satisfait la condition initiale est

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -e^{-t} + e^{-t}(1+t) \\ e^{-t} - e^{-t}t \end{pmatrix}.$$

Puisque la seule valeur propre, λ_1 , est négative, nous obtenons le portrait de phases suivant.



Pour nous aider à tracer le portrait de phases, nous avons aussi inclus les nullclines avec la direction dans chacune des régions du plan découpées par les nullclines.

18.17.2 Analyse global

Question 17.2

a) Nous avons un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, y)$$

avec $f_1(x, y) = 4x + y + 25$ et $f_2(x, y) = 3x + 2y + 15$.

I: Le nullcline associé à x est la droite $f_1(x, y) = 4x + y + 25 = 0$ et le nullcline associé à y est la droite $f_2(x, y) = 3x + 2y + 15 = 0$.

II: Pour trouver le point d'équilibre de ce système d'équations différentielles, il faut résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} f_1(x, y) = 4x + y + 25 = 0 \\ f_2(x, y) = 3x + 2y + 15 = 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 4x + y &= -25 \\ 3x + 2y &= -15 \end{aligned}$$

La matrice augmenté du système est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -25 \\ 3 & 2 & -15 \end{array} \right) .$$

$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -10 \\ 3 & 2 & -15 \end{array} \right) .$$

$R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 5 & 15 \end{array} \right) .$$

$(1/5)R_2 \rightarrow R_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) .$$

Finalement, $R_1 + R_2 \rightarrow R_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) .$$

La solution est $x = -7$ et $y = 3$. Il y a un seul point d'équilibre qui est $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$. C'est le point d'intersection des deux nullclines.

III: La dérivée de f est

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Si nous évaluons au point \mathbf{p} , nous trouvons naturellement

$$Df(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

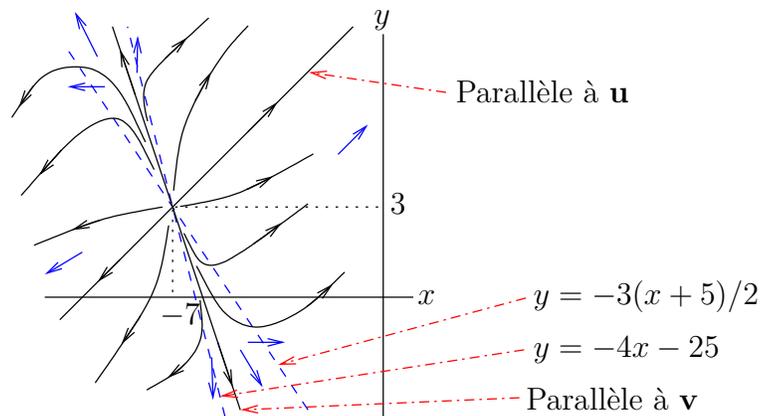
La linéarisation du système d'équation différentielle au point \mathbf{p} est donc

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ sont 1 et 5. L'origine est donc un noeud instable pour le système linéarisé car les deux valeurs propres sont positives.

Le vecteur $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 5 alors que le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

IV: Le portrait de phase est donné ci-dessous.



Pour nous aider à tracer le portrait de phases, nous avons aussi inclus les nullclines avec la direction dans chacune des régions du plan découpées par les nullclines.

Question 17.5

a) Le terme $x(1-x)(x-0.5)$ décrit le taux de croissance des proies s'il n'y a pas de prédateurs. Le terme $-xy/8$ représente l'effet des prédateurs sur le taux de croissance des proies. l'effet est négatif car les proies sont mangées par les prédateurs. Le terme $-dy$ décrit le taux de croissance des prédateurs s'il n'y a pas de proies. Il est négatif car les prédateurs n'ont pas de proies pour se nourrir et nourrir leur progéniture. Le terme xy représente l'effet des proies sur le taux de croissance des prédateurs. C'est un effet positif car les prédateurs peuvent se nourrir et nourrir leur progéniture.

Le produit xy représente la proportion de contact entre les proies et les prédateurs.

b) Si nous supposons que $y = 0$, nous avons une seule équation différentielle.

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)(x-0.5) .$$

Cette équation à trois points d'équilibre : $x = 0, 0.5$ et 1 . Son portrait de phases est donné ci-dessous.



Il faut avoir $x(0) \geq 0.5$ pour éviter que $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Si $x < 0.5$, il n'y a pas suffisamment de proies pour que le taux de reproduction permette de maintenir ou d'augmenter la population totale.

c) les nullclines associés à x sont donnés par $x(1-x)(x-0.5) - xy/8 = 0$. Si $x \neq 0$, nous obtenons le polynôme $y = 8(1-x)(x-0.5)$. Les nullclines associés à x sont donc la droite $x = 0$ et la courbe $y = 8(1-x)(x-0.5)$.

Les nullclines associés à y sont donnés par $-dy + xy = 0$. Si $y \neq 0$, nous obtenons la droite $x = d$. Les nullclines associés à y sont donc les droites $y = 0$ et $x = d$.

L'intersection des nullclines nous donne les points d'équilibre. nous obtenons les points d'équilibre $(0, 0)$, $(0.5, 0)$, $(1, 0)$ et $(d, 8(1-d)(d-0.5))$. Pour que ce dernier point d'équilibre ait un sens biologique (i.e. les deux coordonnées soient positives ou nulles), il faut que $0.5 \leq d \leq 1$.

d) Le seul point d'équilibre avec des coordonnées positives est $\mathbf{p} = (d, 8(1-d)(d-0.5))$ pour $0.5 < d < 1$. Le système (17.7.1) est de la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, y)$$

où $f_1(x, y) = x(1-x)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{xy}{8}$ et $f_2(x, y) = -dy + xy$. Ainsi, la dérivée de f est

$$\mathbf{Df}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 + 3x - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}y & -\frac{1}{8}x \\ y & -d + x \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'évalué au point \mathbf{p} , nous trouvons

$$\mathbf{Df}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -3d^2 + 3d - \frac{1}{2} - (1-d)\left(d - \frac{1}{2}\right) & -\frac{1}{8}d \\ 8(1-d)\left(d - \frac{1}{2}\right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2d^2 + \frac{3d}{2} & -\frac{1}{8}d \\ -8d^2 + 12d - 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

La linéarisation du système (17.7.1) au point \mathbf{p} est donc

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2d^2 + \frac{3d}{2} & -\frac{d}{8} \\ -8d^2 + 12d - 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer les valeurs de d pour lesquelles nous avons des valeurs propres avec la partie réelle négative. Il faut se rappeler que le polynôme caractéristique peut être exprimé de deux façons équivalentes :

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

et

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - \operatorname{tr}(Df(\mathbf{p}))\lambda + \det(Df(\mathbf{p})) \\ &= \lambda^2 - \left(-2d^2 + \frac{3d}{2}\right)\lambda + \frac{1}{8}d(-8d^2 + 12d - 4). \end{aligned}$$

Donc,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2d^2 + \frac{3d}{2} = -2d\left(d - \frac{3}{4}\right)$$

et

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{8}d(-8d^2 + 12d - 4) = -d(d-1)\left(d - \frac{1}{2}\right).$$

Pour que la partie réelle des deux valeurs propres soit inférieure à zéro, il faut que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2d\left(d - \frac{3}{4}\right) < 0$$

et

$$\lambda_1 \lambda_2 = -d(d-1)\left(d - \frac{1}{2}\right) > 0,$$

De la première inégalité, nous obtenons $d < 0$ ou $d > 3/4$. De la deuxième inégalité, nous obtenons $d < 0$ ou $1/2 < d < 1$. Si nous considérons seulement les valeurs positives de d , le point d'équilibre \mathbf{p} est donc linéairement stable pour $3/4 < d < 1$.

Pour $d = 3/4$ et $d = 1$, il faut vraiment utiliser le système non-linéaire pour analyser la stabilité du point \mathbf{p} . Ce n'est pas fait ici.

e) Si $d = 0.9$, alors $\mathbf{p} = (0.9, 0.32)$. La linéarisation de (17.7.1) au point $(0.9, 0.32)$ est

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.27 & -0.1125 \\ 0.32 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres de la matrice sont approximativement $-0.135 \pm 0.1333229i$, deux nombres complexes avec la partie imaginaire plus petite que zéro, Le point \mathbf{p} est donc un foyer stable.

La linéarisation de (17.7.1) au point $(0, 0)$ est

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres de la matrice sont -0.5 et -0.9 , deux valeurs négatives, l'origine est un noeud stable.

la linéarisation de (17.7.1) au point $(0.5, 0)$ est

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.0625 \\ 0 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

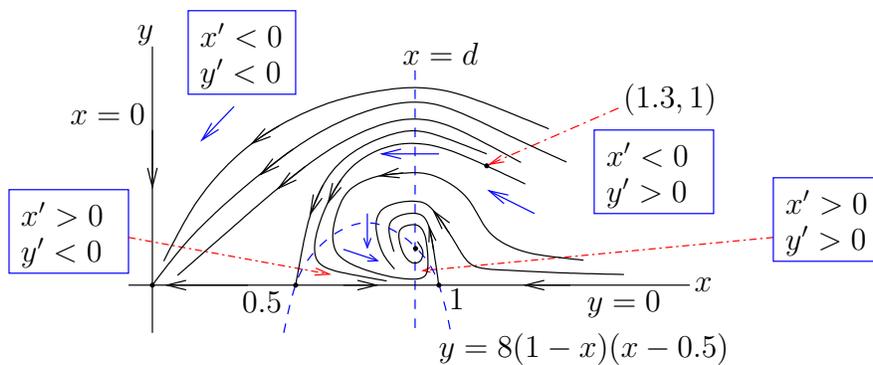
Comme les valeurs propres de la matrice sont -0.4 et 0.25 , une valeur propre négative et une positive, le point $(0.5, 0)$ est un col.

Finalement, la linéarisation au point $(1, 0)$ est

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.125 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

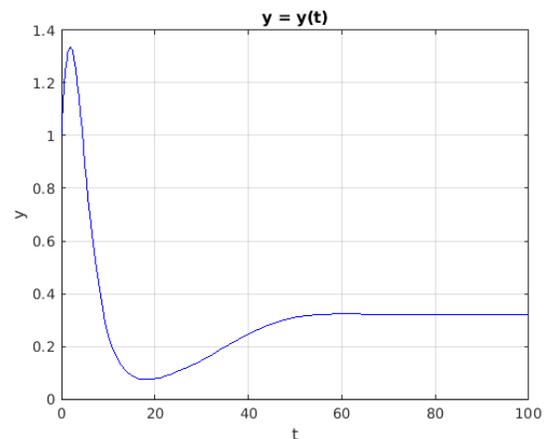
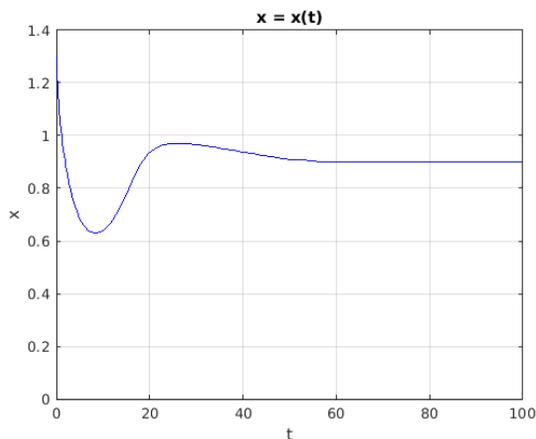
Comme les valeurs propres de la matrice sont -0.5 et 0.1 , une valeur propre négative et une positive, le point $(1, 0)$ est aussi un col.

Nous avons déterminé le signe de x' et y' dans chacune des régions découpées par les nullclines avant de tracer quelques solutions. Le portrait de phase (pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$) est donné ci-dessous.

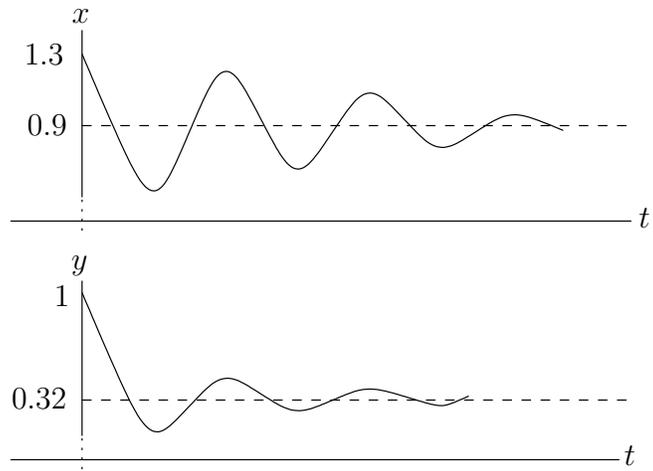


f) C'est une solution qui s'enroule autour du point \mathbf{p}

g) Les graphes de x et y sont respectivement donnés dans les figures suivantes.



Pour observer plus d'oscillations autour du point d'équilibre \mathbf{p} , il faudrait intégrer pour une très longue période de temps (puis comprimer le graphe selon l'axe des t et étirer le graphe selon l'axe des x et y). Qualitativement, les graphes de x et y devraient être semblables à ceux qui suivent.



Bibliographie

- [1] F. R. Adler, **Modeling the Dynamics of Life : Calculus and Probability for Life Scientists**, Brooks/Cole, 2005.
- [2] D. Betounes, **Partial Differential Equations for Computational Science**, Springer-Verlag, 1998.
- [3] R. L. Borelli et C. S. Coleman, **Differential Equations, a Modeling Perspective**, Wiley, 1998.
- [4] M. Braun, **Differential Equations and their Applications, 4th edition**, Springer-Verlag, 1993.
- [5] L. Carroll, **Alice's Adventures in Wonderland**,
- [6] G. B. Folland, **Advanced Calculus**, Prentice Hall, 2002
- [7] R. Illner, C. S. Bohun, S. McCollum et T. an Roode, **Mathematical Modelling : A Case Studies Approach**, AMS, 2005.
- [8] S. Lipschutz, **Linear Algebra**, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1968.
- [9] J. E. Marsden and A. J. Tromba, **Vector Calculus, 2nd edition**, W. H. Freedman and Company, 1981.
- [10] J. D. Murray, **Mathematical Biology, 1 : An Introduction, 3th edition**, Springer-Verlag, 2002.
- [11] C. Newhouser, **Calculus for Biology and Medecine 2nd Edition**, Prentice Hall, 2004
- [12] B. Noble and J. W. Daniel, **Applied Linear Algebra, 3rd edition**, Prentice-Hall, 1988.
- [13] M. Olinick, **An Introduction to Mathematical Models in the Social and Life Sciences**, Addison-Wesley, 1978
- [14] D. A. Roff, **The Evolution of Life Histories**, Chapman and Hall, 1992

Index

- Élément neutre, 8, 9
- Équation de Van der Pol, 798
- Équation de réaction diffusion, 520
- Équation de réaction diffusion, 519
- Équation différentielle, 467
 - autonome, 479
 - bien posée, 503
 - modèle logistique, 485
 - orbite d'une solution, 480
 - point d'équilibre, 480
 - asymptotiquement stable, 482
 - instable, 482
 - stable, 482
 - portrait de phases, 480
 - séparable, 469
- Équation logistique, 238
- Application linéaire, 642
- Approximation linéaire, 199, 201, 698
- Approximation quadratique, 201
- Arccosinus, 30
- Arcsinus, 28
- Arctangente, 30
- Asymptote horizontale, 97
- Asymptote verticale, 101, 102
- Binôme
 - Coefficient du binôme, 455
 - Formule du binôme, 455
- Bord d'une surface, 750
- Borne d'intégration, 314
- Centre de masse, 411, 413, 719
- Chaîne de Markov, 604
- Champ de pentes, 473
- Champ de vecteurs, 725
 - conservateur, 731
 - divergence, 733
 - rotationnel, 731
- Changement de variable, 284, 331
- Changement de variables, 715
- Comportement asymptotique à l'infini, 207
- Comportement asymptotique à l'origine, 209
- Comportement asymptotique semblable
 - à l'infinité, 107
 - au voisinage d'un point, 106
- Condition initiale, 471
- Coordonnées cylindriques, 717
- Coordonnées polaires, 630, 716
- Coordonnées sphériques, 718
- Cosécante, 19
- Cosinus, 17
- Cotangente, 19
- Courbe de niveaux, 649
- Courbe fermée, 729
- Courbe orientée, 723
- Courbure, 174
- Dérivée d'ordre supérieure, 175
- Dérivée d'une fonction, 125, 698
- Dérivée d'une fonction à un point, 120
- Dérivée directionnelle, 677
- Dérivée partielle, 666
 - d'ordre supérieure, 667
- Dérivée partielle en un point, 665
- Dérivée seconde, 175
- Déterminant, 581, 582
- Degré d'une équation différentielle, 469
- Distribution normale, 334
- Domaine d'intégration, 708
- Droite sécante, 117
- Droite tangent, 119
- Ensemble convexe, 687
- Ensemble fermé, 654
- Ensemble ouvert, 653
- Ensemble simplement connexe, 730
- Erreur absolue, 505

- Erreur de troncature, 353, 358, 364, 688
 Erreur relative, 505
 espace propre généralisé, 602
 Factoriel, 64
 Famille de courbes, 500
 Famille de courbes orthogonales, 501
 Fonction, 1
 bornée, 313
 composition, 5
 concave, 174
 concave vers le bas, 174
 concave vers le haut, 174
 convexe, 174
 Croissante, 113
 Décroissante, 113
 de plusieurs variables, 641
 domaine, 4, 641
 extension, 8
 graphe, 2, 645
 image, 3, 642
 injective, 11
 inverse, 10
 Maximum absolu, 114
 Maximum global, 114
 Maximum local, 113
 Minimum absolu, 114
 Minimum global, 114
 Minimum local, 114
 Strictement croissante, 113
 surjective, 12
 variable dépendante, 2
 variable indépendante, 2
 Fonction affine, 645
 Fonction continue
 en un point, 89, 92, 657, 658
 sur un intervalle, 91
 Fonction continue par morceaux, 313
 Fonction de classe C^k , 668, 700
 Fonction exponentielle, 33
 Fonction identité, 9
 Fonction linéaire, 642
 Fonction logarithmique, 34
 Fonctions hyperboliques, 74
 Fonctions sinusoidales, 26
 amplitude, 26
 moyenne, 26
 période, 26
 phase, 26
 Formule de l'angle double pour la tangente, 298
 formule du binôme, 71
 Formules d'addition en trigonométrie, 21
 Formules de l'angle double, 24, 288
 Frontière d'un ensemble, 654
 Gradient, 679
 Homotopie, 730
 Infimum, 184
 Intégrable au sens de Riemann, 327
 Intégrale définie, 314
 Intégrale double, 708
 Intégrale impropre
 convergence, 337, 341
 divergence, 337, 341
 pour une fonction non bornée, 341
 sur un domaine non borné, 337
 Intégrale indéfinie, 280
 Intégrale triple, 709
 Intégrande, 280, 314, 708
 Intégration par parties, 293
 Intérêt
 Composé k fois par année, 417
 Composé annuellement, 417
 Composé de façon continue, 418
 Intervalle d'intégration, 314
 Inverse additif, 8
 Inverse multiplicatif, 9
 Jacobian, 715, 716
 Limite d'une fonction, 80
 à droite, 81
 à gauche, 81
 à l'infini, 96, 103
 en un point, 85, 655
 Limite infinie à l'infini, 106
 Limite infinie d'une fonction, 100, 104
 à droite, 102

- à gauche, 102
- Logarithme népérien, 36
- Logarithme naturel, 36
- Lois de Hooke, 400
- Méthode d'élimination de Gauss, 574
- Méthode d'Euler, 504
- Méthode de bisection, 226
- Méthode de Lagrange, 695, 697
- Méthode de Newton, 222
- Méthode de Simpson, 364
- Méthode des trapèzes, 357
- Méthode du point milieu, 353
- Masse, 396
- Matrice, 563
 - élément, 563
 - augmentée, 574
 - carrée, 563
 - composante, 563
 - diagonale d'une matrice, 571
 - identité, 571
 - inverse additif, 571
 - inverse multiplicatif, 572
 - invertible, 572
 - matrices égales, 563
 - produit de deux matrices, 567
 - produit par un scalaire, 564
 - somme de deux matrices, 564
 - Trace, 570
 - transposée, 565
 - triangulaire inférieure, 586
 - triangulaire supérieure, 586
- Matrice de déformation, 736
- Matrice de Markov, 604
- Matrice de rotation, 736
- Moment par rapport à l'axe des x , 411, 412, 719
- Moment par rapport à l'axe des y , 411, 412, 719
- Multiplicateur de Lagrange, 695
- Nombre complexe, 590
 - conjugué, 590
 - partie imaginaire, 590
 - partie réelle, 590
 - valeur absolue, 590
- Nombre d'Euler, 71
- Non-dimensionalisation, 770
- Normale, 743
- Norme euclidienne, 652
- Ordre d'une équation différentielle, 469
- Période, 20
- Période d'une fonction, 26
- Partition, 707
- Permutation, 582
 - signe, 583
- Point au bord, 750
- Point critique, 174, 690
- Point d'inflexion, 176
- Point intérieur, 750
- Polynôme caractéristique, 590
- Polynôme de Taylor, 201, 688
- Primitive, 279
- Procédure de Markov, 604
- Produit scalaire, 566
- Projection orthogonale, 549, 551
- règle de dérivée du quotient, 146
- Règle de l'Hospital, 212
- Règle de la main droite, 531
- Règle de substitution, 284, 331, 715
- Règle des valeurs marginales, 191, 192
- Racine d'une fonction, 221
- Représentation paramétrique d'une courbe, 613
- Représentation paramétrique d'une droite, 533
- Représentation paramétrique d'une surface, 675
- Représentation paramétrique du plan, 541
- Représentation standard d'un plan, 538
- Représentation standard d'une droite, 534
- Représentation vectorielle d'une droite, 533
- Représentation vectorielle du plan, 540
- Sécante, 19
- Série, 54
 - alternée, 66
 - convergence, 54
 - convergence absolue, 69

- convergence conditionnelle, 69
- divergence, 54
- géométrique, 55
- harmonique, 55
- Somme partielle, 54
- télescopique, 59
- termes, 54
- Série de MacLaurin, 444
- Série de Taylor, 444
- Série du binôme, 456
- Série entière, 437
 - coefficient, 437
 - convergence, 438
 - intervalle de convergence, 439
 - rayon de convergence, 439
 - somme partielle, 438
 - terme, 437
- Section Verticale, 650
- Sinus, 17
- Solution, 468
- Somme à droite, 312
- Somme à Gauche, 310
- Somme de Riemann, 313, 708
- Somme de Riemann pour le point milieu, 315
- Somme inférieure, 326
- Somme supérieure, 326
- Strictement définie négative, 691
- Strictement définie positive, 691
- Suite, 43
 - bornée, 47
 - bornée inférieurement, 47
 - bornée supérieurement, 47
 - convergence, 44, 653
 - convergence à l'infini, 48
 - convergence dans \mathbb{R}^n , 652
 - croissante, 47
 - décroissante, 47
 - limite, 44, 653
 - terme, 43
- suite
 - convergence dans \mathbb{R}^n , 589
- Supremum, 184
- Surface, 750
 - orientée, 742
 - représentation paramétrique locale, 748
- Surplus du consommateur, 421
- Surplus du producteur, 422
- Système conservateur, 800
- Système d'équations différentielles
 - autonome, 778
 - champ de vecteurs, 789
 - condition initiale, 779
 - d'ordre un, 778
 - linéaire
 - centre, 787
 - col, 787
 - foyer instable, 787
 - foyer stable, 787
 - noeud instable, 787
 - noeud stable, 787
 - linéaires, 781
 - nullcline, 791
 - orbite, 780
 - orbite fermée, 798
 - période, 798
 - point d'équilibre, 790
 - solution, 779
 - solution périodique, 798
- Système de Lotka-Voltera, 770
- Système dynamique discret, 228
 - état d'équilibre, 234
 - condition initiale, 228
 - fonction génératrice, 228
 - fonction itérative, 228
 - graphe en forme de toile d'araignée, 232
 - orbite d'une solution, 231
 - orbite périodique, 247
 - période d'une orbite, 247
 - point d'équilibre, 234
 - asymptotique stabilité, 235
 - instable, 235
 - point fixe, 234
 - point périodique, 247
 - portrait de phase, 231
 - solution, 228
 - solution générale, 236
 - solution périodique, 247
 - asymptotique stabilité, 248
- Tangent, 19

- Taux de croissance absolu, [485](#)
- Taux de croissance relatif, [465](#), [485](#)
- Taux de variation instantané, [117](#)
- Taux de variation moyen, [115](#)
- Test de la dérivée première, [178](#)
- Test de la dérivée seconde, [178](#)
- Théorème de la moyenne, [129](#)
- Théorème de la moyenne de Cauchy, [213](#)
- Théorème de la moyenne pour l'intégrale, [380](#)
- Théorème de Taylor, [200](#), [688](#)
- Théorème des accroissement finis, [129](#)
- Théorème des gendarmes, [46](#), [87](#)
- Théorème des valeurs extrêmes, [184](#), [660](#)
- Théorème des valeurs intermédiaires, [95](#)
- Théorème fondamental du calcul, [328](#)
- Théorème fondamental du calcul vectoriel, [728](#)
- Théorème fondamental du calcul, deuxième version, [334](#)
- Théorème sandwich, [46](#), [87](#)
- Transposition, [582](#)
- Travail, [398](#)

- Valeur future, [418](#), [420](#)
- Valeur moyenne, [379](#)
- Valeur présente, [418](#), [420](#)
- Valeur propre, [589](#)
 - multiplicité algébrique, [598](#)
 - multiplicité géométrique, [598](#)
- Variété, [750](#)
- Variable aléatoire, [334](#)
- Variable d'intégration, [280](#), [314](#)
- Vecteur, [523](#)
 - canonique, [527](#)
 - longueur, [523](#)
 - Normal à un plan, [538](#)
 - orthogonal, [528](#)
 - Orthogonal à un plan, [538](#)
 - perpendiculaire, [528](#)
 - Perpendiculaire à un plan, [538](#)
 - produit avec un nombre réel, [525](#)
 - produit scalaire, [527](#)
 - produit vectoriel, [530](#)
 - somme de vecteurs, [526](#)
- Vecteur normal, [743](#)
- Vecteur propre, [589](#)

- Voisinage, [653](#)
- Voisinage troué, [653](#)

- Zéro d'une fonction, [221](#)